

Київський національний університет будівництва і архітектури
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет будівництва і архітектури
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Мостовенко Олексій Володимирович

УДК 514.18

ДИСЕРТАЦІЯ

Формування дискретних каркасів безмоментних великопрогонних
архітектурних покриттів

05.01.01 - Прикладна геометрія, інженерна графіка

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

О.В. Мостовенко

Науковий керівник Ковальов Сергій Миколайович, д.т.н., професор

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Мостовенко О.В. Формування дискретних каркасів безмоментних великопрогонних архітектурних покриттів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – «Прикладна геометрія, інженерна графіка». – Київський національний університет будівництва і архітектури.

Захист відбудеться у Київському національному університеті будівництва і архітектури, Київ, 2024.

При проектуванні громадських, промислових та інших споруд, що перекриваються великопрогонним покриттям (такі як залізобетонні оболонки, вантові системи, тенти тощо), значну роль відіграє заощадження будівельних матеріалів.

Таким вимогам відповідають так звані тектонічні конструкції, де одним з основних чинників є безмоментність конструкцій, які під дією власної ваги працюють тільки на розтягіння або стиск. У таких конструкціях заощаджуються витрати на армування.

Відомо багато досліджень, пов'язаних з формуванням дискретних каркасів безмоментних оболонок, проте в зазначених публікаціях забезпечувалась безмоментність тільки самої поверхні покриття, а безмоментність елементів спирання, таких як арки опорного контура та арки стикування поверхонь комбінованих покриттів, не приймалися до уваги.

Тому задача формування поверхонь безмоментних покриттів з безмоментними елементами спирання є актуальною.

Оскільки формоутворюючими чинниками таких поверхонь є фізичні властивості, їх математичний опис є можливим тільки у вигляді диференціальних рівнянь, які у загальному випадку розв'язуються наближено чисельними методами. Одним з таких методів є статико-геометричний метод, основною перевагою якого є наочність формування, а математичний апарат відповідає методу скінченних різниць.

В роботі виконано критичний аналіз літератури в області архітектурної тектоніки і геометричних методів дискретного моделювання кривих лінії та поверхонь.

Архітектурна тектоніка передбачає органічний зв'язок форми архітектурної споруди з її конструктивною системою та рівновагою її елементів.

Аналіз літератури, пов'язаної із архітектурною тектонікою, показав, що в більшості випадків форма безмоментних покриттів обмежується найпростішими з геометричної точки зору поверхнями, а саме:

- Циліндричними поверхнями;
- Поверхнями обертання;
- Поверхнями другого порядку.

Метод скінченних різниць дозволяє визначати дискретні точкові каркаси одновимірних і двовимірних криволінійних образів, які описано диференціальними рівняннями із заданими початковими або крайовими умовами. Використання цього методу для формування криволінійних великопрогонних покриттів в архітектурі обмежується недостатньою наочністю методу. Як будь який математичний апарат, метод не дозволяє наочно и точно врахувати статичні і геометричні особливості формування поверхонь таких покриттів, що веде до обмеження можливостей врахування насамперед заданих вихідних умов, і можливостей управління формою поверхонь.

Статико-геометричний метод є наочним узагальненням методу скінченних різниць і на відміну від останнього дозволяє варіювати форму поверхні, що моделюється, та враховувати різноманітні статичні та геометричні вимоги до поверхонь.

Розглянуто роботи, які присвячено формуванню дискретних точкових каркасів поверхонь просторових безмоментних покриттів на основі чисельного вирішення диференціальних рівнянь, що описують поверхні, які формуються при натягування на визначений контур.

Розглянуто на основі статико-геометричного методу, що наближено моделюють мінімальні поверхні, поверхні з внутрішнім надлишковим тиском, поверхні які моделюють вантові, тентові та пневматичні конструкції.

На основі цього методу в ряді робіт вирішено велику кількість задач, пов'язаних з формоутворенням та керуванням формою поверхонь безмоментних покриттів з врахуванням різноманітних, наперед заданих умов.

Аналіз розглянутих досліджень на основі статико-геометричного методу показав, що задачі формування точкових каркасів поверхонь складених покриттів зі стиснутими та розтягнутими зонами, та безмоментними арками стикування і опорним контуром – не розглядалися.

Також було розглянуто плоскі системи безмоментних конструкцій. Арочні та ланцюгові конструкції при спиранні на вертикальні огорожуючі конструкції або на стовпи породжують в останніх згинаючі моменти. Для уникнення таких моментів елементи спирання повинні бути нахиленими за напрямом реакцій, що виникають під дією власної ваги арки, або ланцюга та розпору.

Звідси виникають геометричні задачі встановлення відповідності між параметрами дискретної кривої, яка є геометричною моделлю арки або ланцюга і параметрами прямолінійних елементів спирання дискретно-визначеної кривої.

Розглянуто безмоментні плоскі системи, що складаються з параболічних елементів, які наближено моделюють безмоментні арки або провисаючі ланцюги, та прямолінійних елементів, які моделюють розкоси спирання.

Визначено залежності між геометричними та статичними параметрами (власна вага) таких систем.

Для рівноваги систем, що складаються з двох або більшого числа ланцюгів або арок, у вузлах стикування були розраховані проміжні опори.

Розглянуто два підходи до формування дискретного каркасу ланцюгової лінії.

Перший підхід передбачає поступове вирівнювання довжин ланок дискретно визначеної кривої при рівномірному зовнішньому навантаженні на вузли. При цьому крок вузлів уздовж осі Ox стане нерівномірним.

Другій підхід передбачає поступове уточнення навантаження на кожен вузол відповідно до довжин двох ланок, що примикають до вузла.

Розглянуто два важливих принципи організації ітераційного процесу, для визначення дискретної множини точок ланцюгової лінії.

Використовуючи всі результати досліджень цього розділу, можна побудувати геометричну схему безмоментної конструкції, яка складається зі стиснутих арок, розтягнутих ланцюгів та елементів спірання з заданими вузлами.

Наступне дослідження присвячено формуванню врівноважених розтягнутих або стиснутих сіток разом з крайовим контуром та арками стикування сіток при моделюванні комбінованих поверхонь.

Виведено рекурентні формули, рівноваги вузлів крайового контура, на основі яких побудовано обчислювальні шаблони для складання рівнянь рівноваги контурних вузлів при різних поєднаннях внутрішніх та контурних зусиль у ребрах сітки.

Ці формули було узагальнено для моделювання комбінованих врівноважених сіток, які складаються з розтягнутих і стиснутих зон. При цьому такі зони мають розділятися або стиснутою аркою, або розтягнутим вантом, форми яких визначаються також за умови рівноваги.

Для оперативного керування формою врівноважених структур запропоновано використання апарату суперпозицій, де було сформульовано п'ять умов його застосування.

Сформульовані умови, що обмежують застосування апарату суперпозицій, дозволили керувати формою поверхонь покриттів, що формуються під дією власної ваги покриття.

У дисертаційному дослідженні наведено декілька прикладів використання апарату суперпозицій для керування формою таких покриттів.

Розглянуто можливість зменшення похибки, що виникає у результаті визначення координат вузлів дискретного каркаса поверхні безмоментного покриття постійної товщини. На це істотно впливає правильність розподілу власної ваги покриття між вузлами сітки. Власна вага елемента покриття, яка враховується як зовнішнє зусилля, діюче на вузол сітки, для покриття постійної товщини, повинна бути пропорційною площі цього елемента.

Виведено формули для підрахунку власної ваги елементів безмоментного покриття постійної товщини.

Наступне дослідження - врахування власної ваги елементів покриття для зменшення похибки при розрахунку координат вузлів триангуляційної сітки.

Для зменшення такої похибки було використано відомий алгоритм покрокового уточнення результатів, але цей відомий алгоритм не враховує особливостей тектонічних покриттів. Тому цей алгоритм було удосконалено із врахуванням формування опорних арок покриття під дією власної ваги.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ
у яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Статті у міжнародних виданнях та виданнях, які включено до науково-
метричних баз:

1. Мостовенко Олексій В., Ковальов С.М., Мостовенко Олександр В. дискретне моделювання тектонічних покриттів архітектурних споруд у вигляді триангуляційної сітки. *International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technolgies*. Indexed in INDEX COPERNICUS high impact factor (ICV: 84.86) Issue No32 Part 1 April 2024. P. 135-144. (Особистий внесок здобувача: виконання ітераційного процесу).

Статті у наукових фахових виданнях України:

2. Мостовенко Ол-й В. Формування дискретно визначених кривих при заміні закріплених вузлів зусиллями. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 77.- К.:КНУБА, 2007р.- 212с. С 198-205.

3. Ковальов С.М., Мостовенко Ол-й В. Синтез двох способів дискретного задання кубичної параболи. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 43 наук.праці: Редкол.: Ю.М. Тормосов (відпов.ред.) та ін.: Харк. держ. університет харчування та торгівлі.-Харків, 2007.-Вип.17.- 293с.: іл., табл. С 47-53. (Особистий внесок здобувача: створення аналітичного опису ряду точок на основі нескінченної послідовності).

4. Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М., Вязанкін В.О. Можливості розв'язання системи рівнянь рівноваги растягнутой сітки в загальному вигляді. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 80.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.- К.:КНУБА, 2008р.- 570с. С 16-18. (Особистий внесок здобувача: вивід формул для визначення координат дискретної сітки).

5. Мостовенко Ол-й В. Координати вузлів натягнутой нитки при довільно заданому навантажені. *Міжвідомчий науково-технічний збірник*

«Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 80. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2008р.- 570с. С 170-174.

6. *Мостовенко Ол-й.В.* Основи формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних просторових конструкцій в архітектурі. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 81. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2009р.- 252с. С 149-154.

7. *Мостовенко Ол-й В.* Формування дискретних каркасів врівноважених комбінованих систем. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 82. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2009р.- 400с. С 335-340.

8. *Мостовенко Ол-й В., Вязанкін В.О.* Заміна суперпозиції скінченного числа точок ланцюгом послідовних суперпозицій пар точок. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 84. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2010р.- 319с. С 296-300. (Особистий внесок здобувача: побудова сітки на основі суперпозицій).

9. *Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М.,* Формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних покриттів при рівномірному розподілі навантаження у плані. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 87. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2011р.- 490с. С 176-181. (Особистий внесок здобувача: формування дискретного каркаса).

10. *Мостовенко Ол-й В, Аннілогова В.О.* Дискретна модель ланцюгової лінії. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Випуск 92. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2016р.- 132с. С 10-14. (Особистий внесок здобувача: розробка першого варіанту формування ланцюгової лінії).

11. Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М., Мостовенко Ол-р В. Аналіз точності визначення кривизни дискретно представленої кривої. *Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Відповідальний редактор Ванін В.В. Випуск 103. -К.:КНУБА, 2022р.- 490с. С 134-141. (*Особистий внесок здобувача: розробка математичного алгоритму, аналіз результатів*).

Додаткові публікації

12. Мостовенко Ол-сій В., Родін Р.П., Золотова А.В. Основи методології визначення геометричних параметрів різальної частини інструментів. *Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”*. Випуск 97. Відповідальний редактор Ванін В. В. Київ: КНУБА, 2020 р. 160с. С. 44-50. (*Особистий внесок здобувача: розрахунок, аналіз результатів*).

Тези і матеріали конференцій:

13. Мостовенко Ол-й В. Можливості розв’язання системи рівнянь рівноваги растягнутої сітки в загальному вигляді [Текст] /О.В. Мостовенко, С.М. Ковальов, В.О. Вязанкін/ Доповіді V міжнародної кримської науково-практичної конференції [«Геометричне та комп’ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн»], (Сімферополь, 29 вересня - 3 жовтня 2008р.)/ М-во освіти і науки України, - Симферополь. С 16-18.

14. Мостовенко Ол-й В. Формування дискретних каркасів врівноважених комбінованих систем // Доповіді VI міжнародної кримської науково-практичної конференції [«Геометричне та комп’ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн»], (Сімферополь, 28 вересня - 2 жовтня 2009р.) / М-во освіти і науки України, - Симферополь. С 16-18.

15. Мостовенко Ол-й В. Заміна пар точок суперпозиції кінцевого числа точок ланцюгом послідовних суперпозицій // Доповіді VII міжнародної науково-практичної конференції, присвяченої 65-річчю ДВНЗ «Ужгородський національний університет» та 125-річчю Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». [«Геометричне моделювання, комп’ютерні технології та дизайн: теорія,

практика, освіта»], (Ужгород, 3 – 6 травня 2011р.) / М-во освіти і науки України. - Ужгород.-С.296-300.

16. Мостовенко Олексій В. Використання апарату суперпозиції для управління формою врівноваженої дискретної структури [Текст] / О.В. Мостовенко, С.М. Ковальов, О.В. Мостовенко/ Тези доповідей XXV Міжнародної науково-практичної конференції [«Сучасні проблеми геометричного моделювання»], (Запоріжжя, 6-9 червня 2023 р.) / М-во освіти і науки України. - Запоріжжя. - С. 28-29.

17. Мостовенко Ол-й. Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії [Текст] /О.В. Мостовенко, С.М. Ковальов, О.В. Мостовенко / Обуховські читання: XVIII Міжнародна науково-практична конференція, (Київ, 28 березня 2024р.) / М-во освіти і науки України, НУБП. – Київ : НУБП, 2024. - С 14-18.

ANNOTATION

Mostovenko O.V. Formation of discrete frames of moment-free large-span architectural coverings. – Qualification scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 05.01.01 – "Applied Geometry and Engineering Graphics". – Kyiv National University of Construction and Architecture.

The defense will take place at the Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2024.

When designing public, industrial, and other buildings with large-span coverings (such as reinforced concrete shells, cable systems, tents, etc.), saving building materials plays a significant role. Such requirements are met by the so-called tectonic structures, where one of the main factors is the moment-free nature of the structures, which under the influence of their own weight work only in tension or compression. In such structures, the costs of reinforcement are saved.

There are many studies related to the formation of discrete frames of moment-free shells, but in the mentioned publications, only the moment-free nature of the covering surface itself was ensured. The moment-free nature of the supporting elements, such as the arches of the support contour and the arches of the surface junction of combined coverings, was not taken into account.

Therefore, the task of forming surfaces of moment-free coverings with moment-free supporting elements is relevant.

Since the shape-forming factors of such surfaces are physical properties, their mathematical description is possible only in the form of differential equations, which are generally solved approximately by numerical methods. One such method is the static-geometric method. Its main advantage is the visibility of formation, and the mathematical apparatus corresponds to the finite difference method.

The work includes a critical analysis of the literature in the field of architectural tectonics and geometric methods of discrete modeling of curves and surfaces.

Architectural tectonics implies an organic connection between the form of an architectural structure with its constructive system and the equilibrium of its elements.

The analysis of the literature related to architectural tectonics showed that in most cases, the form of moment-free coverings is limited to the simplest geometrical surfaces, namely:

- Cylindrical surfaces;
- Surfaces of revolution;
- Second-order surfaces.

The finite difference method allows the determination of discrete point frames of one-dimensional and two-dimensional curved images described by differential equations with given initial or boundary conditions. The use of this method for the formation of curved large-span coverings in architecture is limited by the insufficient visibility of the methods. As with any mathematical apparatus, the method does not allow for a clear and precise accounting of the static and geometric features of forming surfaces of such coverings, which leads to limitations in accounting primarily for the given initial conditions and the possibilities of controlling the shape of the surfaces.

The static-geometric method is a visual generalization of the finite difference method and, unlike the latter, allows for varying the shape of the modeled surface and accounting for various static and geometric requirements for the surfaces.

The work reviewed those dedicated to the formation of discrete point frames of surfaces of spatial moment-free coverings based on the numerical solution of differential equations describing the surfaces formed when tensioned over a defined contour.

Considered on the basis of the static-geometric method, which approximately models minimal surfaces, surfaces with internal excess pressure, surfaces modeling cable, tent, and pneumatic structures.

Based on this method, a large number of problems related to the formation and control of the shape of moment-free covering surfaces were solved in a series of works, considering various, primarily given, conditions.

The analysis of the considered studies based on the static-geometric method showed that the tasks of forming point frames of surfaces of composite coverings with compressed and stretched zones and moment-free junction and support contour arches were not considered.

Flat systems of moment-free constructions were also reviewed. Arch and chain constructions when supported on vertical enclosing structures or columns generate bending moments in the latter. To avoid such moments, the supporting elements must be inclined in the direction of the reactions arising under the weight of the arch or chain and the thrust.

This gives rise to geometric tasks of establishing a correspondence between the parameters of the discrete curve, which is the geometric model of the arch or chain, and the parameters of the straight-line supporting elements of the discretely defined curve.

Moment-free flat systems consisting of parabolic elements that approximately model moment-free arches or sagging chains and straight-line elements that model support braces were reviewed.

Dependencies between geometric and static parameters (own weight) of such systems were determined.

For the equilibrium of systems consisting of two or more chains or arches at the junction nodes, intermediate supports were calculated.

Two approaches to the formation of the discrete frame of the chain line were considered.

The first approach involves gradually leveling the lengths of the segments of the discretely defined curve with a uniform external load on the nodes. In this case, the step of the nodes along the Ox axis becomes uneven.

The second approach involves gradually refining the load on each node according to the lengths of the two segments adjoining the node.

Two important principles of organizing the iterative process for determining the discrete set of points of the chain line were considered.

Using all the research results of this section, a geometric scheme of a moment-free structure consisting of compressed arches, stretched chains, and supporting elements with given nodes can be constructed.

The next study is devoted to the formation of balanced stretched or compressed nets along with the edge contour and junction arches of nets when modeling combined surfaces.

Recurrent equilibrium formulas for the edge contour nodes were derived, based on which computational templates for compiling the equilibrium equations of contour nodes with various combinations of internal and contour forces in the grid ribs were built.

These formulas were generalized for modeling combined balanced nets consisting of stretched and compressed zones. In this case, such zones should be separated either by a compressed arch or a stretched cable, the shapes of which are also determined under equilibrium conditions.

For operational control of the shape of balanced structures, the use of the superposition apparatus was proposed, where five conditions for its application were formulated.

The formulated conditions limiting the application of the superposition apparatus allowed for controlling the shape of covering surfaces formed under the weight of the covering.

The dissertation research provides several examples of using the superposition apparatus to control the shape of such coverings.

The possibility of reducing the error arising from determining the coordinates of the nodes of the discrete frame of a moment-free covering surface of constant thickness was considered. This is significantly influenced by the correctness of distributing the own weight of the covering among the grid nodes. The own weight of the covering element, which is considered as an external force

acting on the grid node for a covering of constant thickness, should be proportional to the area of this element.

Formulas for calculating the own weight of elements of a moment-free covering of constant thickness were derived:

The next study is the consideration of the own weight of covering elements to reduce the error when calculating the coordinates of grid nodes when forming a triangulation grid.

To reduce such an error, a known step-by-step refinement algorithm was used, but this known algorithm did not take into account the features of tectonic coverings. Therefore, this algorithm was improved, considering the formation of supporting arches of the covering under the weight of the covering.

LIST OF SCIENTIFIC WORKS OF THE APPLICANT ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION

in which the main scientific results of the dissertation are published

*Articles in international publications and publications included in scientific
metric databases:*

1. *Mostovenko Oleksiy V., Kovalov S.M., Mostovenko Oleksandr V.* Discrete modeling of tectonic coverings of architectural structures in the form of a triangulation grid. *International Periodic Scientific Journal. Modern Engineering and Innovative Technologies*. Indexed in INDEX COPERNICUS high impact factor (ICV: 84.86), Issue No. 32, Part 1, April 2024, pp. 135-144.

Articles in scientific specialized publications of Ukraine:

2. *Mostovenko Oleksiy V.* Formation of discretely defined curves when replacing fixed nodes with forces. *Interdepartmental Scientific and Technical Collection "Applied Geometry and Engineering Graphics"*. Issue 77. - K.: KNUCA, 2007. - 212 p., pp. 198-205.

3. *Kovalov S.M., Mostovenko Oleksiy V.* Synthesis of two methods of discrete definition of a cubic parabola. *Geometric and Computer Modeling. 43 scientific papers: Editorial board: Yu.M. Tormosov (responsible editor) et al.:*

Kharkiv State University of Food Technology and Trade. - Kharkiv, 2007. - Issue 17. - 293 p.: ill., tables, pp. 47-53.

4. Mostovenko Oleksiy V., Kovalov S.N., Vyazankin V.O. Possibilities of solving the equilibrium equations system of a stretched grid in general form. *Interdepartmental Scientific and Technical Collection "Applied Geometry and Engineering Graphics"*. Issue 80. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - K.: KNUCA, 2008. - 570 p., pp. 16-18.

5. Mostovenko Oleksiy V. Coordinates of nodes of a stretched thread under arbitrarily assigned load. *Interdepartmental Scientific and Technical Collection "Applied Geometry and Engineering Graphics"*. Issue 80. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - K.: KNUCA, 2008. - 570 p., pp. 170-174.

6. Mostovenko Oleksiy V. Fundamentals of forming discrete frames of moment-free spatial structures in architecture. *Interdepartmental Scientific and Technical Collection "Applied Geometry and Engineering Graphics"*. Issue 81. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - K.: KNUCA, 2009. - 252 p., pp. 149-154.

7. Mostonenko O. V. Formation of discrete frameworks of balanced combined systems. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphic»*. Issue 82. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - Kyiv: KNUCA, 2009. - 400 p. pp. 335-340.

8. Mostonenko O. V., Viazankin V.O. Replacement of the superposition of a finite number of points by a chain of consecutive superpositions of pairs of points. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphics»*. Issue 84. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - Kyiv: KNUCA, 2010. - 319 p. pp. 296-300."

9. Mostonenko O. V., Kovaliov S.M. Formation of discrete frameworks of momentless surface coverings under uniform load distribution in the plane. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphics»*. Issue 87. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - Kyiv: KNUCA, 2011. - 490 p. pp. 149-154.

10. Mostonenko O. V., Anpilohova V.O. Discrete model of a chain line. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphics»*. Issue 92. Responsible editor V.Ye. Mykhailenko. - Kyiv: KNUCA, 2016. - 132 p. pp. 10-14.

11. Mostonenko O. V., Kovaliov S.M., Mostovenko O. V. Analysis of the accuracy of curvature determination of discretely represented curves. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphics»*. Responsible editor Vanin V.V. Issue 103. - Kyiv: KNUCA, 2022. - 490 p. pp. 134-141.

Additional publications

12. Mostenko O. S., Rodin R.P., Zolotova A.V. Fundamentals of methodology for determining geometric parameters of cutting parts of tools. *Interdepartmental scientific and technical collection «Applied Geometry and Engineering Graphics»*. Issue 97. Responsible editor Vanin V.V. Kyiv: KNUCA, 2020. 160 p. pp. 44-50.

Conference proceedings and materials:

13. Mostenko Al. V., Kovalev S.N., Vyazankin V.A. Capabilities of solving the equilibrium equations system of a stretched network in general form. *Proceedings of the Fifth International Crimean Scientific and Practical Conference 'Geometric and Computer Modeling: Energy Conservation, Ecology, Design'*. September 29 - October 3, 2008. Ukraine, Autonomous Republic of Crimea, Simferopol. Pages 16-18.

14. Mostovenko Ol. V. Formation of discrete frameworks of balanced combined systems. *Proceedings of the Sixth International Crimean Scientific and Practical Conference 'Geometric and Computer Modeling: Energy Conservation, Ecology, Design'*. September 28 - October 2, 2009. Ukraine, Autonomous Republic of Crimea, Simferopol. Pages 16-18.

15. Mostovenko Ol. V. Replacement by a chain of sequential superpositions of pairs of points superposition of a finite number of points. *Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference dedicated*

to the 65th anniversary of Uzhhorod National University and the 125th anniversary of National Technical University 'Kharkiv Polytechnic Institute'. 'Geometric Modeling, Computer Technologies, and Design: Theory, Practice, Education'. May 3-6, 2011. Ukraine, Uzhhorod. Pages 296-300.

16. *Mostovenko Oleksii V., Kovaliov S.M., Mostovenko Ol. V. Use of superposition apparatus for shape control of balanced discrete structure. Abstracts of the XXV International Scientific and Practical Conference 'Current Problems of Geometric Modeling'. June 6-9, 2023. Ukraine, Zaporizhzhia. Page 46, Pages 28-29.*

17. *Mostovenko O. V., Kovaliov S., Mostovenko O. V. Formation of a discrete framework of a chain line. Obukhov Readings: XVIII International Scientific and Practical Conference. Kyiv, March 28, 2024: conference abstracts. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine. Kyiv. 2024. 176 p. Pages 14-18.*

З М І С Т

Перелік та пояснення умовних скорочень.....	21
ВСТУП	22
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ЇЇ АНАЛІЗ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ	28
1.1. Геометрична форма споруди і архітектурна тектоніка.....	28
1.2. Метод скінченних різниць.....	36
1.3. Статико-геометричний метод формування безмоментних просторових конструкцій.....	46
Висновки по розділу 1.....	53
РОЗДІЛ 2. ПЛОСКІ СХЕМИ БЕЗМОМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ.....	55
2.1. Схеми складених плоских конструкцій з стиснутими елементами спірання.....	55
2.2. Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії.....	66
2.3. Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії за заданою ординатою екстремального вузла.....	77
Висновки по розділу 2.....	89
РОЗДІЛ 3. РІВНОВАГА ВУЗЛІВ, ЩО НАЛЕЖАТЬ ОПОРНОМУ КОНТУРУ СІТКИ ТА АРКАМ СТИКУВАННЯ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ.....	91
3.1. Рівняння рівноваги вузлів крайового контура при різноманітних поєднаннях роботи сітки та опорного контура.....	91
3.2. Формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних комбінованих покриттів.....	105
3.3. Керування формою врівноважених комбінованих систем.....	112
Висновки по розділу 3.....	120
РОЗДІЛ 4. ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ БЕЗМОМЕНТНОГО ТЕКТОНІЧНОГО ПОКРИТТЯ СТАЛОЇ ТОВЩИНИ З СТАЛИМ ПЕРЕРІЗОМ ОПОРНИХ АРОК.....	122

4.1. Розподіл власної ваги елементів покриття між вузлами сітки.....	122
4.2. Формування триангуляційної сітки для моделювання форми покриття з урахуванням параметрів клітин і ребер опорних арок.....	127
4.3. Формування дискретного каркаса безмоментного покриття у вигляді сітки з чотирикутними клітинами.....	135
Висновки по розділу 4.....	143
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	144
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	146
ДОДАТОК.....	157

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ДВК – дискретно визначена крива

ДВП – дискретно визначена поверхня

ДПК – дискретно представлена крива

ДПП – дискретно представлена поверхня

МСР – метод скінчених різниць

ум. од. – умовні одиниці

ДВК і ДВП – дискретні образи, якщо відомий апарат формування дискретного образу з довільним кроком

ДПК і ДПП – дискретні образи, якщо апарат формування дискретного образу не визначено

ВСТУП

Актуальність теми. Останнім часом велика увага приділяється вирішенню економічних проблем в усіх галузях народного господарства, у тому числі в архітектурі та будівництві.

При проектуванні громадських, промислових та інших споруд, що перекриваються такими великопрогонними покриттями як залізобетонні оболонки, вантові системи, тенти тощо, значну роль відіграє заощадження будівельних матеріалів [56,78]. Такій вимозі відповідають, так звані, тектонічні конструкції, де одним з основних чинників є безмоментність конструкції [82, 85, 86], які під дією власної ваги працюють тільки на розтягання або стиск. У таких конструкціях заощаджуються витрати на армування.

Сучасний стан проблеми. Відомо багато досліджень, пов'язаних з формуванням дискретних каркасів безмоментних оболонок [3, 6, 26, 28, 31, 57, 59, 65, 67, 78] тощо. Проте в зазначених публікаціях забезпечувалась безмоментність тільки самої поверхні покриття, а безмоментність елементів спирання, таких як арки опорного контура та арки стикування поверхонь комбінованих покриттів, не приймалися до уваги. Тому задача формування поверхонь безмоментних покриттів з безмоментними елементами спирання є актуальною. Оскільки формоутворюючими чинниками таких поверхонь є фізичні властивості, їх математичний опис є можливим тільки у вигляді диференціальних рівнянь, які у загальному випадку розв'язуються наближено чисельними методами [76, 83]. Одним з таких методів є статико – геометричний метод, основною перевагою якого є наочність формоутворення [7, 8, 16, 23, 25, 44, 46, 63, 67, 69, 70, 72], а математичний апарат відповідає методу скінченних різниць [7].

Значущість проблеми. З економічної точки зору, тектонічні конструкції дозволяють заощаджувати витрати на їх зведення, оскільки вони не потребують значних витрат, пов'язаних з армуванням. З естетичної точки

зору, такі конструкції є привабливими, оскільки їх форма відповідає напруженому стану.

Теоретичною та інформаційною базою для проведення досліджень слугували роботи вітчизняних та зарубіжних вчених у різних галузях:

– у галузі архітектурного проектування: О.В. Кащенко [18], С.М. Ковальова [78], В.Є. Михайленка [26], Спрингера Ф., Симона і Поттмана Х. [85], Т.Г. Сміт [84], Л. Веліміровича [86];

– у галузі геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ: Н.М. Аушевої [1, 2], С.І. Ботвіновської [6-9], О.В. Кащенко [18], С.М. Ковальова [19-27, 78], В.Є. Михайленка [26, 31], Є.В. Пугачова [56], В.І. Скочка [71] тощо;

– у теорії інтерполяції: Н.М. Аушевої [1, 2], В.М. Верещаги [12, 13], С.М. Ковальова [20, 21, 25, 26, 27], В.М. Найдиша [47-53], Є.В. Пугачова [56], С.І. Пустюльги [57-65];

– у галузі математичного програмування: Д. МакКракена [74], У. Дорна [74], І.Д. Фокса [75], М.А. Пратта [75], Т.Е. Шуп [83].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація відповідає паспорту спеціальності 05.01.01 - «Прикладна геометрія, інженерна графіка» у частині п.1 «... створення та розвиток теоретичних основ прикладної геометрії та розширення її операційних можливостей» - відповідає змісту розділів 2, 3, 4.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розробка геометричного апарата для формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних покриттів архітектурних споруд з безмоментними елементами спірання.

Для досягнення сформульованої цілі поставлено наступні **задачі дослідження:**

1. Виконати критичний аналіз літератури в області архітектурної тектоніки і геометричних методів дискретного моделювання кривих ліній і

поверхонь. На основі такого аналізу визначити геометричні проблеми, які потрібно розв'язати для виконання сформульованої цілі.

2. Визначити властивості методу суперпозицій, що дозволяють їх використати для варіювання параметрів форми ліній і поверхонь тектонічних покриттів в архітектурі.

3. Розробити геометричні схеми врівноважених плоских систем, що відповідають вимогам тектонічних конструкцій.

4. Розробити алгоритми дискретного формування стиснутих арок та розтягнутих тросів у вигляді ланцюгової лінії.

5. Вивести рекурентні формули рівноваги вузлів крайового контура та ліній стикування комбінованих поверхонь безмоментних покриттів.

6. Сформулювати вимоги, що обмежують застосування апарату суперпозицій для варіювання форми поверхонь покриттів, що формуються під дією власної ваги.

7. Доповнити і вдосконалити алгоритм для врахування власної ваги елементів вспарушених тектонічних покриттів.

Об'єктом досліджень є поверхні безмоментних тектонічних архітектурних споруд.

Предметом дослідження є геометричні способи та алгоритми формування дискретних сіток, що моделюють безмоментні покриття архітектурних споруд.

Методи досліджень. Розробку геометричного апарата для формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних покриттів архітектурних споруд з безмоментними елементами спірання здійснено на основі засобів прикладної та аналітичної геометрії, статико-геометричного методу, теорії параметричного аналізу та методу скінченних різниць. Розрахунки тестових прикладів виконано у програмному середовищі пакета MathCad 14.0.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступних результатах:

*У роботі **вперше:***

- доведено властивість методу суперпозицій щодо відношення коефіцієнтів зусиль натягіння або стиску у ребрах дискретної моделі поверхні безмоментного покриття;
- запропоновано геометричні схеми врівноважених плоских систем, що складаються зі стиснутих арок, розтягнутих ланцюгів та похилих лінійних опор;
- виведено рекурентні формули рівноваги вузлів крайового контура та ліній стикування комбінованих поверхонь безмоментних покриттів.

Отримав подальший розвиток:

- спосіб формування дискретних аналогів ланцюгової лінії;

Удосконалено:

- спосіб суперпозиції для керування формою поверхонь тектонічних покриттів;
- алгоритм для врахування власної ваги елементів тектонічних покриттів при формуванні їх поверхонь.

Практичне значення отриманих результатів. Запропоновано способи формування врівноважених сіток з безмоментними елементами спирання дозволяють зробити систему поверхня плюс елементи спирання повністю безмоментною, що дає змогу заощаджувати використання металевої арматури при зведенні покриття.

Ступінь обґрунтованості наукових положень та висновків, сформульованих у дисертаційній роботі, забезпечується конкретністю постановки задач, застосуванням адекватного математичного апарату. Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів підтверджується результатами обчислень численних тестових прикладів та результатами впроваджень.

Впровадження отриманих результатів. Результати дисертаційного дослідження прийнято до впровадження у ТОВ «Альтіс-Констракшн» - формування тектонічних поверхонь разом з опорним контуром та ТОВ

«КСМ-Транс» - використання апарату формування безмоментних каркасів покриттів при вирішенні естетичних та економічних задач в архітектурі та будівництві.

Особистий внесок здобувача. Усі положення, що виносяться на захист і складають наукову новизну дисертаційної роботи, отримано особисто здобувачем. У публікаціях за участю співавторів результати, що належать здобувачеві, вказано у списку публікацій здобувача за темою дисертації.

Апробація результатів дослідження. Основні положення і результати роботи доповідались, обговорювались і здобули позитивну оцінку на Всеукраїнському науковому семінарі з прикладної геометрії та технічної естетики (Україна, м. Київ, КНУБА, 18.03.2024 р), а також на численних конференціях КНУБА.

Виступи за темою дисертації зроблено на конференціях:

1. *Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М., Вязанкін В.О.* Можливості розв'язання системи рівнянь рівноваги розтягнутої сітки в загальному вигляді. *Доповіді п'ятої міжнародної кримської науково-практичної конференції «Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн».* 29 вересня - 3 жовтня 2008р. Україна, АР Крим, м.Симферополь. С 16-18.

2. *Мостовенко Ол-й В.* Формування дискретних каркасів врівноважених комбінованих систем. *Доповіді шостої міжнародної кримської науково-практичної конференції «Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн».* 28 вересня - 2 жовтня 2009р. Україна, АР Крим, м.Симферополь. С 16-18.

3. *Мостовенко Ол-й В.* Заміна пар точок суперпозиції кінцевого числа точок ланцюгом послідовних суперпозицій. *Доповіді VII міжнародної науково-практичної конференції, присвяченої 65-річчю ДВНЗ «Ужгородський національний університет» та 125-річчю Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* «Геометричне

модельовання, комп'ютерні технології та дизайн: теорія, практика, освіта». 3 – 6 травня 2011р. Україна, м Ужгород.-С.296-300.

4. *Мостовенко Олексій В., Ковальов С.М., Мостовенко Ол-р В.* Використання апарату суперпозиції для управління формою врівноваженої дискретної структури. *Тези доповідей XXV Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного модельовання»*. 6-9 червня 2023 р. Україна, м. Запоріжжя. с. 46, С. 28-29.

5. *Мостовенко Ол-й., Ковальов С., Мостовенко Ол-р.* Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії. *Обуховські читання: XVIII Міжнародна науково-практична конференція*, м. Київ, 28 березня 2024 року: тези конференції. Національний університет біоресурсів і природокористування України. Київ. 2024. 176 с. С 14-18.

Публікації. Основні теоретичні положення, висновки і результати, отримані у процесі дослідження, опубліковано у 17 наукових працях, з яких: 1 – у міжнародних виданнях та виданнях, що належать до науково-метричних баз, 10 – у виданнях, що належать до переліку фахових видань, 5 – у матеріалах науково-практичних конференцій, 1 – у додаткових публікаціях.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається з анотацій, списку праць здобувача, вступу, чотирьох розділів з висновками, загальних висновків по роботі, списку використаних джерел (87 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи становить 159 сторінок, що містить 66 рисунків та 22 таблиці. Додатки розміщено на 2 сторінках.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ЇЇ АНАЛІЗ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

Архітектурна тектоніка передбачає органічний зв'язок форми архітектурної споруди з її конструктивною системою та рівновагою її елементів. У значній мірі вимогам архітектурної тектоніки відповідають форми, які працюють на стиск або розтягіння без виникнення значних згинаючих моментів. Такі форми математично описуються у вигляді диференціальних рівнянь, які в свою чергу, як правило, розв'язуються чисельними методами, основними з яких є метод скінченних різниць, математичний апарат числових послідовностей та статико-геометричний метод.

1.1. Геометрична форма споруди і архітектурна тектоніка.

Із стародавніх часів архітектори висловлювали думку, що форма архітектурної споруди повинна бути результатом об'єднання вимог міцності, стійкості, функціональності та краси [79, 81, 84].

З часом така думка прийняла науково обґрунтовану форму і з'явилося поняття архітектурної тектоніки. В літературі зустрічаються різні визначення поняття архітектурної тектоніки, які тим не менше, мають спільну основу. Згідно з енциклопедичним визначенням «тектонікою» в архітектурі є «художній вираз закономірностей споруди, що притаманні конструктивній системі будівлі, її об'єктивних фізичних властивостей, співвідношення несучих та несомих частин. Тектонікою є «специфічний засіб архітектурної виразності, який органічно пов'язаний з конструктивною системою споруди та об'єктивними закономірностями її зведення – міцністю, стійкістю та рівновагою. Особливості конструктивної системи споруди відповідають архітектурній формі.»

Найдавнішою схемою архітектурних споруд вважається стоїчно-балочна система, що сформувалась на основі використання деревини, як основного будівельного матеріалу. Незважаючи на те, що з часом камінь та цегла замінили деревину, така система залишалась основним принципом будівництва у стародавньому світі. [14, 79, 82].

З розвитком суспільства виникло протиріччя між потребами у великопрогонних приміщеннях і обмеженістю прогонів (до 5 метрів) при використанні кам'яних конструкцій, за схемою стоїчно-балочної системи.

Численні пам'ятки архітектури стародавніх Єгипту, Греції, Риму та Візантії наочно відбивають це протиріччя. Прикладами можуть бути храми стародавнього Єгипту (рис. 1.1.) та античні храми (рис. 1.2.), де неможливість перекриття великих прогонів змушувала архітекторів передбачати значну кількість колон або стовпів.

Винахід арки, купола та склепіння дозволив поступово розв'язувати наведені протиріччя шляхом збільшення прогонів, що перекриваються (рис. 1.3.), при зменшенні числа опор.

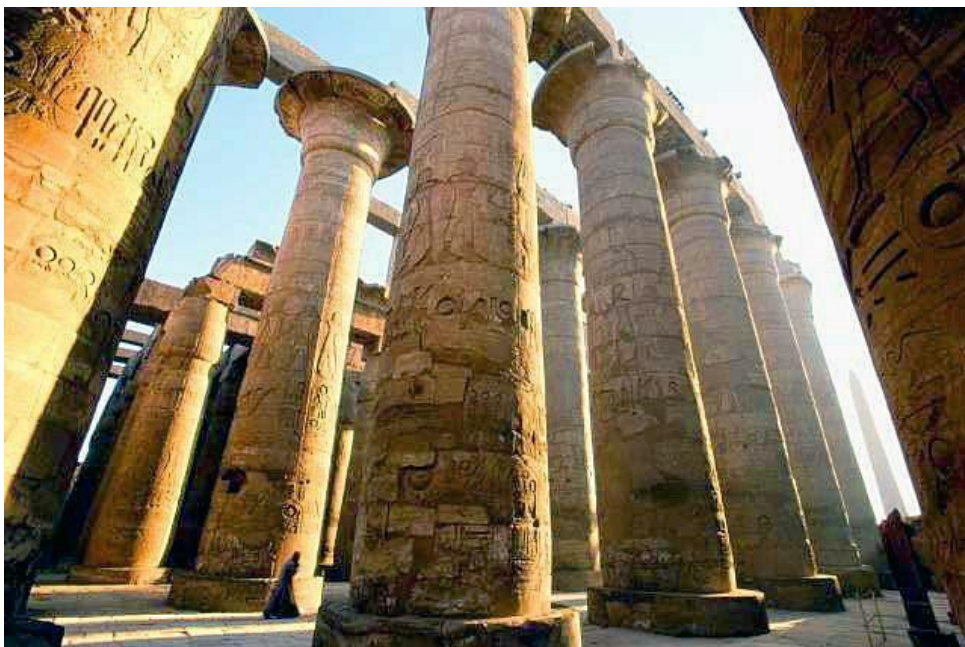


Рис. 1.1. Храм в Карнаці.



Рис. 1.2. Парфенон в Афінах.



Рис. 1.3. Підземне водосховище в Стамбулі.

Аркою є архітектурний елемент (криволінійне перекриття) наскрізного прорізу у стіні, або прогону між опорами. [14]. Арка є безмоментною конструкцією, яка породжує боковий розпір.

Стійкість арки залежить від її форми. Ідеальною формою осі арки є ланцюгова лінія:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad (1.1.1)$$

або лінія рівного опору:

$$e^{\frac{y}{a}} \left| \cos \frac{x}{a} \right| = 1, \quad (1.1.2)$$

де зусилля стиску концентруються вздовж осі арки.

Властивості ланцюгової лінії було досліджено у XVII сторіччі німецьким математиком Г. Лейбніцем, нідерландським математиком Х. Гюйгенсом та швейцарським вченим І. Бернуллі. До цього Г. Галілей вважав, що лінією провисання ланцюга є парабола 2-го порядку:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (1.1.3)$$

Парабола (1.1.3) в дійсності, за формою нагадує ланцюгову лінію (1.1.1) але має значно простіший аналітичний опис. Тому параболу (1.1.3), навіть в наш час використовують як форму безмоментної арки.

В стародавні часи форму арки обирали інтуїтивно, у більшості випадків – як півколо, а її безмоментність забезпечувалась за рахунок масивності конструкції. Якщо ланцюгова лінія вписується в товщину арки, така арка є безмоментною.

Придання арці третього виміру приводить до утворення циліндричного склепіння або купола. Циліндричне склепіння – найдавніший основний тип монументального покриття; воно перекриває прямокутний у плані простір та рівномірно передає розпір і вертикальне навантаження на опори у вигляді повздовжніх неперервних стін, рядів колон або стовпів.

У більшості випадків склепіння і купола є безмоментними покриттями, де під дією власної ваги не виникає значних згинаючих моментів. В існуючій літературі систематизація склепінь і куполів наводиться не за геометричними ознаками, а за архітектурними ознаками конструкції. Різноманітність форм склепінь в основному досягається за рахунок композиційних рішень при обмеженості форм самих поверхонь. Яскравим прикладом можуть бути

готичні склепіння собору Сен-Шапель в Парижі, де сполучення елементарних циліндричних поверхонь утворює гармонійну тектонічну форму в цілому (рис. 1.4.).



Рис. 1.4. Собор Сен-Шапель в Парижі.

Відповідно до визначення поняття архітектурної тектоніки, архітектурну споруду можна вважати тектонічною, якщо значні згинаючі моменти не виникають як у конструкції покриття, так і в елементах спирання покриття. Криволінійна форма безмоментної арки або покриття породжує значні зусилля розпору, що в свою чергу веде до виникнення значних згинаючих моментів в елементах конструкції. В класичній архітектурі така проблема вирішувалась в різний спосіб. Існують класичні споруди, де значний розпір конструкції покриття нівелюється за рахунок масивних стін, або додаткових склепінь, які спираються на масивні стіни. Такий принцип, зокрема, було використано при будівництві мавзолею Санта-Констанца в Римі (рис. 1.5.).



Рис 1.5. Мавзолей Санта-Констанца в Римі.

Іншим способом загашення розпору є застосування контрфорсів. Такий спосіб знайшов поширення у готичній архітектурі. Наприклад, в соборі в Ам'єні розпір покриття центрального нефу споруди гаситься контрфорсами, які винесено за межі нефу (рис. 1.6.).



Рис. 1.6. Готичний собор в Ам'єні

Найкраща тектонічна організація спирання великопрогонного купола на інші конструкції була здійснена в соборі Св. Софії в Стамбулі (Константинополі), де опорний контур центрального купола у вигляді аркади, статично пов'язаний з самим куполом. Таке рішення створює враження його паріння над оточуючими конструкціями (рис. 1.7.).



Рис. 1.7. Собор Св. Софії в Стамбулі

Тектонічні форми великопрогонних покриттів, де криволінійне покриття та елементи його спирання утворюють єдину статичну систему знайшли поширення і в сучасній архітектурі. Існує багато прикладів склепінь, куполів, оболонки, вантових систем та ін., які повністю відповідають принципам тектоніки. Прикладами можуть бути Житній ринок на Подолі в Києві (1974 - 1980 рр., архітектори О. П. Моніна і В. Г. Штолько), де провисаюча вантова система у вигляді циліндричної поверхні спирається на похилі стовпи, які утворюють єдину безмоментну статичну систему з покриттям (рис. 1.8.).



Рис. 1.8. Житній ринок в Києві.

Іншим прикладом може бути Критий Ринок в Єревані (арх. Г. Агабабян). Циліндрична поверхня залізобетонного склепіння прогоном 30,9м спирається на арочні рами, які загашують розпір покриття (рис. 1.9.).



Рис.1.9. Критий ринок в Єревані

До безмоментних систем можна віднести склепіння багатьох станцій метрополітену в Києві (рис. 1.10) та інших містах.



Рис. 1.10. Станція метрополітену «Майдан Незалежності» в Києві

Серед світових тектонічних споруд також можна відзначити архітектурні форми італійського інженера П.Л. Нерві, мексиканського архітектора Ф. Канделлі, іспанського архітектора Торройя, американського архітектора Маріо Сальвадорі.

Аналіз літератури показав, що різноманітність зведених в натурі тектонічних споруд було досягнуто не стільки за рахунок різноманітності

форм поверхонь покриттів, скільки за рахунок творчих пошуків архітекторів. Здебільшого поверхні таких покриттів зводяться до циліндричних поверхонь, поверхонь обертання та поверхонь другого порядку. Є багато прикладів зведених оригінальних споруд з криволінійними формами, які візуально є дуже виразними і привабливими, але не є безмоментними, і тому, не повністю відповідають вимогам архітектурної тектоніки. Прикладом може бути Оперний театр у Сідней (Австралія).

Обмеженість геометрії цих споруд обумовлена відсутністю доступного геометричного апарата формування довільних поверхонь, які разом з елементами спірання утворюють тектонічні форми.

1.2. Метод скінченних різниць.

«Обчислення скінченних різниць - розділ математики, в якому вивчаються функції при дискретній зміні аргумента, на відміну від інтегрального та диференціального обчислень, де аргумент змінюється неперервно» [75, 76, 83].

Зазвичай метод скінченних різниць використовується для наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Ідея методу полягає в тому, що безкінечно малі прирости функції у диференціальному рівнянні замінюються кінцевими приростами функції з визначеним кроком (на заданій сітці) [54].

З геометричної точки зору звичайні диференціальні рівняння описують криві лінії, а диференціальні рівняння з частинними похідними - поверхні.[75, 76, 83]. Будь-яке диференціальне рівняння описує множину кривих ліній або поверхонь [26]. Для визначення єдиної лінії або поверхні мають бути задані початкові або крайові умови. Якщо додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної, то задача називається задачею з початковими умовами або задачею Коші. Коли додаткові умови

задаються при двох або більше значеннях незалежної змінної, то задача називається крайовою [76].

Так, при переході від диференціального рівняння до кінцево-різницевого рівнянь, початкові та крайові умови також стають дискретними.

Відображена на рис. 1.11 крива лінія $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a$, з крайовими вузлами

$X_0 = 0; X_n = X_B; Y_0 = Y_A; Y_n = Y_B$, подана у вигляді дискретної скінченної множини точок зі сталим кроком h по осі Ox . Таким чином, абсциса будь-якої точки може бути виражена через абсцису попередньої точки:

$$X_{i+1} = X_i + h. \quad (1.2.1)$$

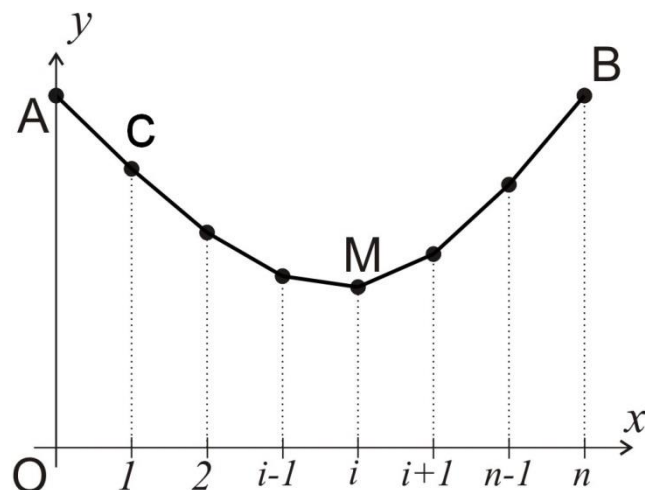


Рис. 1.11. Дискретно представлена крива

Так само, знаючи залежність $y = f(x)$ можна записати величину зміни ординати довільної точки, в залежності від попередньої:

$$\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i, \quad (1.2.2)$$

де: i - номер точки.

Такий вираз називається скінченною різницею першого порядку [26]. Скінченна різниця другого порядку визначається як різниця двох скінченних різниць першого порядку:

$$\Delta^2 Y_i = \Delta Y_{i+1} - \Delta Y_i = (Y_{i+2} - Y_{i+1}) - (Y_{i+1} - Y_i) = Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + Y_i. \quad (1.2.3)$$

Узагальненням останніх двох виразів є скінченна різниця порядку n :

$$\Delta^n Y_i = Y_{i+1} - C_n^1 Y_{i+n-1} + C_n^2 Y_{i+n-2} + \dots + (-1)^n Y_i, \quad (1.2.4)$$

де: C_n^k - число сполучень з n по k .

Значення (1.2.2) приросту функції можна визначити також через ординату попереднього вузла:

$$\nabla Y_i = Y_i - Y_{i-1}. \quad (1.2.5)$$

Отже, вираз (1.2.2) називається правою різницею, а (1.2.5) - лівою. Праві та ліві різниці створюють ряд незручностей, пов'язаних з асиметрією математичних виразів. Тому, найчастіше використовують так звані центральні різниці, які мають половинний крок між вузлами.

$$\delta Y_{i+1/2} = Y_{i+1} - Y_i \quad (1.2.6)$$

$$\delta Y_{i-1/2} = Y_i - Y_{i-1}$$

Тоді, центральна різниця другого порядку буде симетричною відносно розглянутого вузла.

$$\delta^2 Y_i = \delta Y_{i+1/2} - \delta Y_{i-1/2} = Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} \quad (1.2.7)$$

Для наочності центральні скінченні різниці часто подають у вигляді обчислювальних шаблонів (різницевих операторів), де в кружечках записують коефіцієнт відповідних вузлів, а взаємне розташування вузлів відповідає положенню кружечків [76].

$$\delta Y_{i+1/2} = \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-1} \end{array} \quad (1.2.8)$$

$$\delta^2 Y_i = \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-2} \text{---} \textcircled{1} \end{array} \quad (1.2.9)$$

$$\delta^3 Y_{i+1/2} = \begin{array}{c} \textcircled{-1} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{-3} \text{---} \textcircled{1} \end{array} \quad (1.2.10)$$

$$\delta^4 Y_i = \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-4} \text{---} \textcircled{6} \text{---} \textcircled{-4} \text{---} \textcircled{1} \end{array} \quad (1.2.11)$$

Основною перевагою метода скінченних різниць є те, що він дозволяє зводити розв'язання крайової задачі, яка описана диференціальним рівнянням, до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

При розв'язанні двохточкової крайової задачі (рис. 1.11) із заданими крайовими умовами $y(0) = A$ і $y(n) = B$ на інтервалі $[0, n]$, можна записати абсциси будь-якого вузла:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.2.12)$$

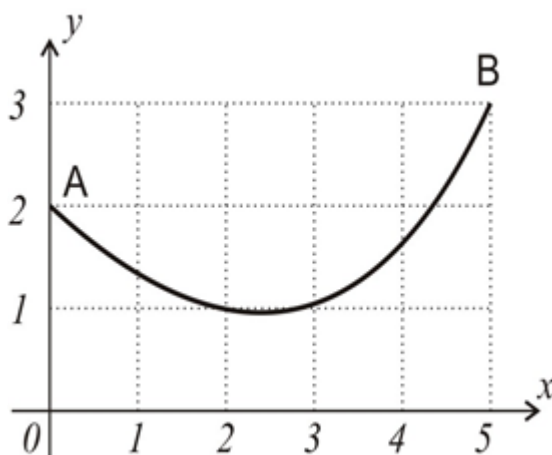
Так, скінченно-різницевий вираз для похідних дозволяє представити диференціальне рівняння у вигляді різницевого:

$$y''(x_i) \approx \frac{1}{h}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad (1.2.13)$$

де: h - крок вузлів по Ox .

Якщо рівняння (1.2.13) записати для кожного з проміжних вузлів між вузлами A та B , отримаємо систему з $n - 1$ алгебраїчних рівнянь з $n - 1$ невідомими, де n - число ребер ДВК, розв'язок якої дає значення ординат для невідомих вузлів [76].

Приклад 1.2.1 (рис. 1.12.). Виначити ординати вузлів кривої лінії з кроком $h = 1$, якщо задано:



- диференціальне рівняння кривої:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 \quad (1.2.14)$$

- крайові умови:

$$x_A = 0; \quad x_B = 5.$$

$$y_A = 2; \quad y_B = 3.$$

Рис 1.12. Дискретно визначена крива

Ця задача є крайовою, тому рівняння кривої (1.2.14) замінимо центральною скінченною різницею:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 1. \quad (1.2.15)$$

Складемо різниці рівняння (1.2.15) для всіх проміжних вузлів кривої на інтервалі $5 > x > 0$:

$$\begin{aligned} 2 - 2y_1 + y_2 &= 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 1 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 &= 1 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 &= 1 \end{aligned}$$

Розв'язання цієї системи дає результат:

y_1	y_2	y_3	y_4
0,2	-0,6	-0,4	0,8

Скінченно-різницева апроксимація диференціального рівняння призводить до певної похибки, яка називається похибкою різницевої апроксимації [53]. Однак для даного випадку похибка апроксимації не виникає, оскільки диференціальне рівняння (1.2.14) описує параболу другого порядку:

$$y = a_0 + a_1x + 0,5x^2,$$

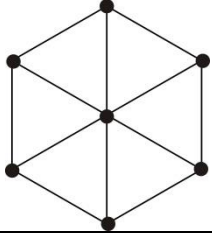
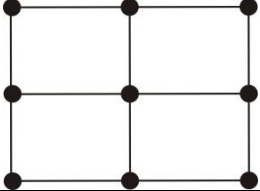
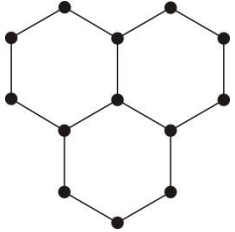
три довільні суміжні точки якої завжди задовольняють рівнянню (2.1.15).

За аналогією з кривими лініями, поверхні описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних з заданими початковими або крайовими умовами.[26]. Однак дискретизація двовимірних об'єктів може бути виконана на сітках з різною топологією.

Існує три типи правильних сіток, де кожна клітина обмежена однаковою кількістю ребер, і в кожному вузлі збігається однакова кількість ребер.

Такі сітки наведені в таблиці 1.1:

Таблиця 1.1.


Тип сітки	Зображення	Кількість ребер, що обмежують клітину	Кількість ребер, що збігаються у вузлі
1		3	6
2		4	4
3		6	3

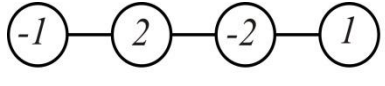
Для кожної з цих сіток існують двовимірні різницеві оператори, які, для наочності, зручно розглядати у вигляді обчислювальних шаблонів, аналогічно (1.2.8 - 1.2.11). На практиці, зазвичай використовують сітки 1-го або 2-го типу. Наведемо приклади найбільш поширених двовимірних різницевих операторів [76] для сіток 2-го типу.

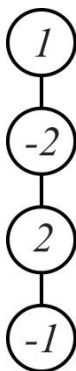
$$2h \frac{\partial z}{\partial vx} \approx -z_{i-1,j} + z_{i+1,j} = \begin{array}{c} (-1) \text{---} (1) \end{array}$$


$$2h \frac{\partial z}{\partial y} \approx -z_{i,j-1} + z_{i,j+1} = \begin{array}{c} (1) \\ | \\ (-1) \end{array}$$


$$h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j} = \begin{array}{c} (1) \text{---} (-2) \text{---} (1) \end{array}$$

$$h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \approx z_{i,j-1} - 2z_{i,j} + z_{i,j+1} =$$


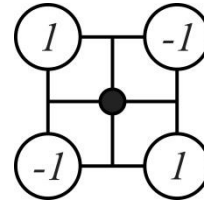
$$2h^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \approx -z_{i-2,j} + 2z_{i-1,j} - 2z_{i+1,j} + z_{i+2,j} =$$


$$2h^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \approx -z_{i,j-2} + 2z_{i,j-1} - 2z_{i,j+1} + z_{i,j+2} =$$


$$h^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \approx z_{i-2,j} - 4z_{i-1,j} + 6z_{i,j} - 4z_{i+1,j} + z_{i+2,j} =$$


$$h^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \approx z_{i,j-2} - 4z_{i,j-1} + 6z_{i,j} - 4z_{i,j+1} + z_{i,j+2} =$$


$$4h^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \approx z_{i-1,j-1} + z_{i+1,j+1} - z_{i-1,j+1} - z_{i+1,j-1} =$$

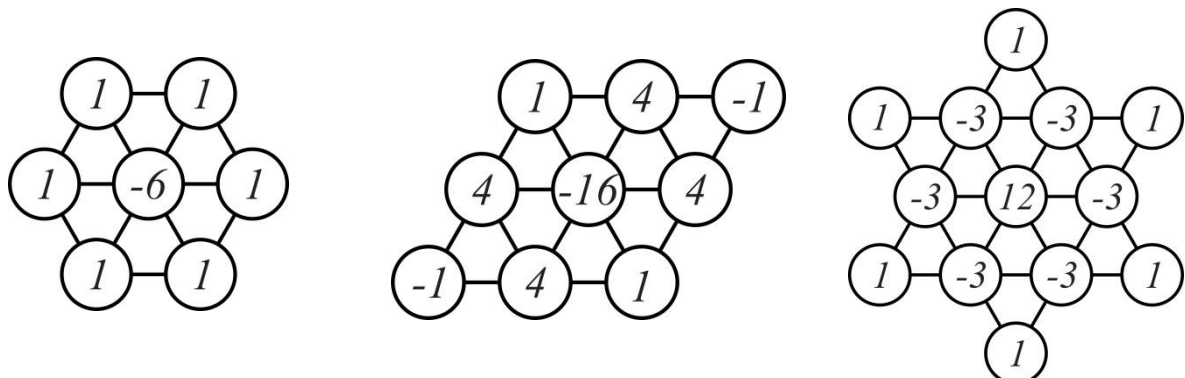


Додавання похідних здійснюється суперпозицією відповідних операторів:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \approx$$

$$h^4 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) \approx$$

Аналогічні різновиди операторів можна утворити і для трикутної сітки (сітки 1-го типу):



Приклад 1.2.2 (рис. 1.13). Визначити аплікати точок поверхні в вузлах квадратної сітки (2-го типу), якщо задано диференціальне рівняння поверхні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1, \quad (1.2.16)$$

та крайові умови у вигляді чотирьох прямих:

1. OC $2x - 3z = 0; \quad y = 0.$
2. OA $y - z = 0; \quad x = 0.$
3. AB $x + z - 3 = 0; \quad y = 3.$
4. BC $2y + 3z - 6 = 0; \quad x = 3.$

Приймаємо, що крок сітки $h=1$.

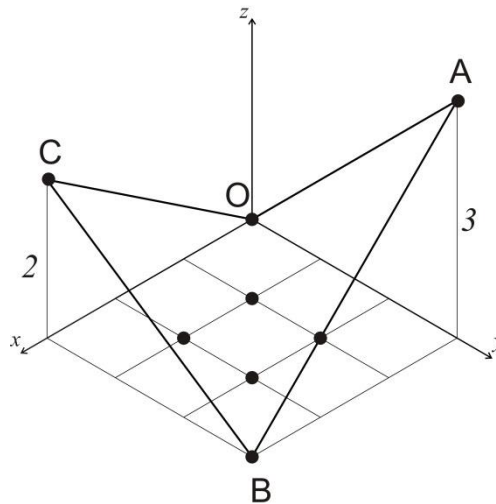


Рис. 1.13. Крайові умови до прикладу 1.2.2.

Така сітка має чотири внутрішні вузли, для яких потрібно визначити значення аплікату. Для нумерації вузлів сітки складаємо топологічну схему (рис. 1.14).

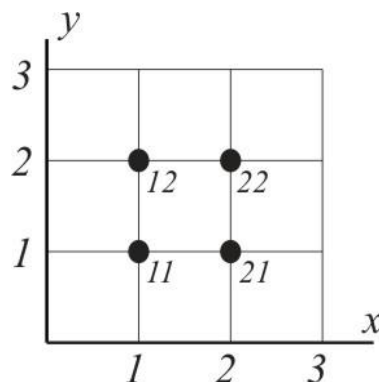


Рис. 1.14. Топологічна схема

Замінюємо диференціальне рівняння (1.2.16) скінченно-різницеvim оператором:

$$z_{i-1,j} + z_{i+1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} - 4z_{i,j} - 1 = 0 \quad (1.2.17)$$

Для внутрішніх вузлів сітки складаємо рівняння (1.2.17):

$$\begin{aligned} 1 + Z_{21} + \frac{2}{3} + Z_{12} - 4Z_{11} - 1 &= 0 \\ Z_{11} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + Z_{22} - 4Z_{21} - 1 &= 0 \\ 2 + Z_{22} + Z_{11} + 2 - 4Z_{12} - 1 &= 0 \\ Z_{12} + \frac{2}{3} + Z_{21} + 1 - 4Z_{22} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Результати розв'язку системи (1.2.18) наведено в таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

	<i>i=0</i>	<i>i=1</i>	<i>i=2</i>	<i>i=3</i>
<i>j=0</i>	0	0,667	1,333	2
<i>j=1</i>	1	0,611	0,722	1,333
<i>j=2</i>	2	1,056	0,611	0,667
<i>j=3</i>	3	2	1	0

Метод скінченних різниць дозволяє визначати дискретні точкові каркаси одновимірних та двовимірних криволінійних об'єктів, які описані диференціальними рівняннями з вказаними початковими або крайовими умовами. Проте, використання цього методу для формоутворення криволінійних покриттів у архітектурі обмежується недостатньою наочністю методу. Як і будь-який формальний математичний апарат, метод не дозволяє наочно та просто враховувати статичні та геометричні особливості формування поверхонь таких покриттів, що призводить до обмеження можливостей врахування вже заданих вихідних умов та можливостей управління формою поверхні.

1.3. Статико-геометричний метод формування безмоментних просторових конструкцій

Початком наукових досліджень у галузі прикладної геометрії у формуванні поверхонь великопрогонних покриттів можна вважати 60-ті роки ХХ століття. Перші роботи в цьому напрямку не були пов'язані зі статичними властивостями конструкцій, а були присвячені розширенню можливостей формоутворення поверхонь [31].

У зв'язку з тим, що просторові конструкції, такі як вантові системи, тентові та пневматичні конструкції не можуть мати довільну форму, а форма поверхні пов'язана з натягом конструкції, у окремих роботах цього періоду, при розробці методів формоутворення поверхонь, враховувалася зовнішня схожість з поверхнями покриття з відповідним аналізом точності геометричної моделі.

Лише окремі роботи були присвячені формуванню дискретних точкових каркасів поверхонь просторових безмоментних покриттів на основі чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, що описують поверхні, які формуються при натягуванні на певний контур [31]. Частина цих досліджень знайшла узагальнення в монографії авторів Михайленка В.Є. та Ковальова С.М.

При незначній власній вазі розтягнутого покриття його поверхню можна приблизно вважати мінімальною [77, 86], диференціальне рівняння якої відомо з умови рівності нулю середньої кривини поверхні в будь-якій точці. Це диференціальне рівняння можна перевести в аналітичний вигляд лише у деяких окремих випадках, при певній формі опорного контура. При довільно заданому опорному контурі це рівняння розв'язується лише наближено чисельними методами [74, 75].

Більш складною є задача складання диференціального рівняння поверхні, натягнутої на опорний контур при заданому значенні внутрішнього надлишкового тиску. Таку поверхню з певним наближенням можна вважати

поверхнею пневматичної конструкції [28]. Диференціальні рівняння цієї поверхні при заданому опорному контурі (крайових умовах) також розв'язуються наближено чисельними методами.

Більш складні геометричні моделі дозволяють враховувати деякі конструктивні особливості вантових, тентових та пневматичних покриттів.

Новий напрямок у прикладній геометрії великопрогонних поверхонь відкрив статико-геометричний метод формування дискретних каркасів поверхонь на основі рівноваги вузлів дискретної сітки під впливом внутрішніх та зовнішніх сил, що діють на вузли [7, 31].

В основі статико-геометричного методу формування точкового каркасу дискретної структури лежить твердження, що серед нескінченної множини можливих рівноважних станів дискретної структури, складеної з вузлів і ребер між ними, існує окремий випадок, коли зусилля, що виникають у розтягнутих або стиснутих ребрах, пропорційні довжинам цих ребер [7, 26].

На основі цього методу в ряді досліджень вирішено багато задач, пов'язаних із формоутворенням та керуванням формою поверхонь безмоментних покриттів з урахуванням різних наперед заданих умов [4, 5-9, 11, 15-19, 22, 23, 32].

На рис. 1.15. наведено приклад чотирьох ребер розтягнутої сітки, вузли якої перебувають у рівновазі під дією зовнішньої сили P та зусиль R_A, R_B, R_C, R_D у чотирьох розтягнутих ребрах (AM, BM, CM, DM).

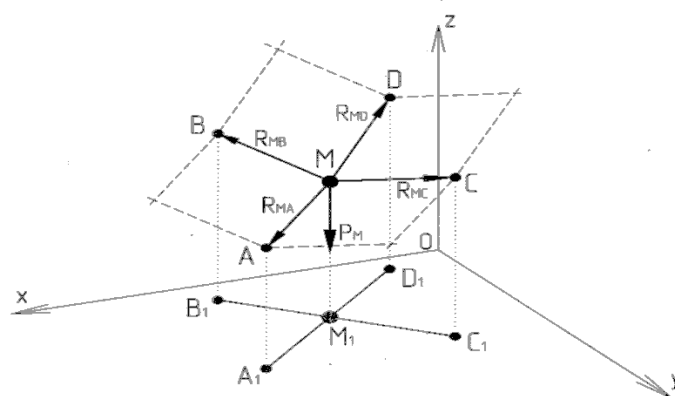


Рис. 1.15. Рівновага вузла M

Якщо вектори зусиль $\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$ пропорційні довжинам відповідних ребер AM, BM, CM, DM , то рівновага вузла M описується векторним рівнянням:

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C + \bar{R}_D + \bar{P}_M = 0$$

яке можна записати у координатній формі:

$$u_A + u_B + u_C + u_D - 4u_M + kP_{M,u} = 0, \quad (1.3.1)$$

де:

u – узагальнене позначення координат x, y, z ;

$P_{M,u}$ - зовнішнє зусилля, що прикладене до вузла M ;

k - коефіцієнт пропорційності.

Якщо задані координати вузлів опорного контура сітки, можна записати систему рівнянь рівноваги (1.3.1) для всіх вузлів, які мають таку ж кількість невідомих координат, як і кількість рівнянь рівноваги. Розв'язання цієї системи рівнянь дає шукані координати дискретного точкового каркасу модельованої поверхні.

Важливою властивістю статико-геометричного методу формування дискретних точкових каркасів поверхонь є те, що будь-яка дискретна структура, що складається з вузлів і ребер між ними, може бути представлена як рівноважна система, організована за вказаним принципом. Тому статико-геометричний метод дозволяє формувати будь-які дискретні структури будь-якої кількості вимірів у просторі будь-якої розмірності [7, 10].

Статико-геометричний метод отримав широкий розвиток у багатьох наукових дослідженнях [3-11, 15-23, 25, 26, 28, 32, 45, 46, 64, 66, 68-72].

У роботах Даніловської Н.О. був запропонований метод формування дискретних точкових каркасів безмоментних склепінь-оболонки на заданому опорному контурі, де як зовнішня сила, що діє на довільний вузол, береться власна вага елемента покриття, що припадає на цей вузол. З огляду на те, що власна вага елемента покриття заданої товщини пропорційна його площі, яка точно невідома до формування поверхні, був запропонований ітераційний

метод уточнення координат вузлів сформованої сітки. Виконано аналіз точності отриманих результатів.

У роботі [78] був запропонований метод формування точкових каркасів вантових сіток. Показано, що є можливість наближеного формування поверхні покриття вантової системи як дискретної сітки геодезичних ліній.

У роботах Грищенка В.Г. було показано можливості формування дискретного точкового каркасу усередненої поверхні великопрогонного покриття під впливом зовнішніх навантажень змінного характеру (снігових і вітрових). Було доведено, що рівновага дискретної сітки не порушується при її афінному перетворенні.

У роботах [3-11, 15, 16, 19-23 тощо] опорні контури сіток були задані як вихідні дані.

У роботах Ч. Х. Хая було досліджено питання формування дискретних точкових каркасів тентових покриттів з гнучким опорним контуром. Показано, що зміни зусиль натягу опорного контуру впливають на форму модельованої поверхні. Доведено, що функціональне додавання (суперпозиція) розтягнутих сіток, сформованих статико-геометричним методом за певних умов, не порушує статичної рівноваги. Опорний контур сітки формувався разом з сіткою, причому коефіцієнт пропорційності довжин векторів зусиль відносно довжин внутрішніх і контурних в'язей приймався різним, моделюючи натягнення самого тенту та його гнучких підборів. У роботі розглядалися лише розтягнуті сітки.

Показано, що метод суперпозицій (метод функціонального додавання) дозволяє керувати формою поверхні зі збереженням врівноваженості вузлів дискретного каркаса, причому, число параметрів управління формою дорівнює числу складових сіток з однаковою топологією. Цю властивість було математично доведено пізніше в роботі [46], де метод суперпозицій представлено як суму афінних перетворень. В роботі не враховано, що відношення коефіцієнтів натягу у контурних і внутрішніх ребрах вихідних

сіток повинно бути не змінним. В протилежному випадку порушується рівновага вузлів результуючої сітки і розв'язання задачі є лише наближеним.

Розглянемо приклад функціонального додавання двох сіток відповідно, з коефіцієнтами суперпозиції k і $(1-k)$. Нехай відношення коефіцієнтів натягу у контурних ребрах до відповідних коефіцієнтів натягу у внутрішніх ребрах для першої складової сітки буде k' , а для другої k'' . Тоді можна розглянути лише одне контурне ребро AB вихідних сіток та зусилля у цьому ребрі \bar{R} (рис. 1.16).

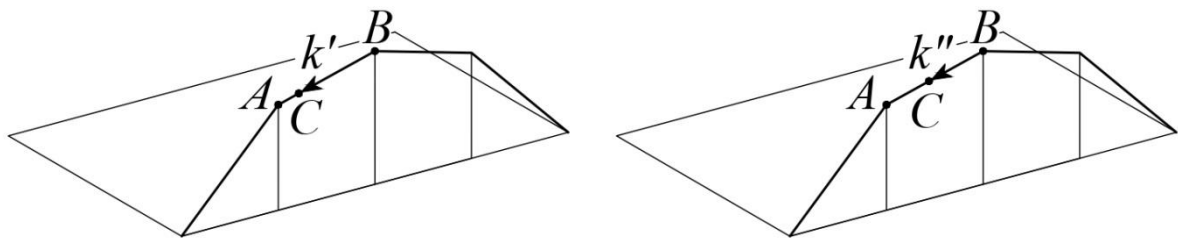


Рис. 1.16. Контурне ребро вихідних сіток суперпозиції.

Якщо у результаті функціонального додавання напрям вектора зусилля збігається з напрямом ребра, то рівновага не порушується. У протилежному випадку рівновага сітки не зберігається. Для спрощення розрахунків розглянемо тільки горизонтальну проекцію ребра AB . Відповідно до формули суперпозиції, можна записати координати вузлів A і B та координати кінцевої точки C вектора \bar{R} :

$$\begin{aligned} x_A &= kx_{A'} + (1-k)x_{A''}; & y_A &= ky_{A'} + (1-k)y_{A''}; \\ x_B &= kx_{B'} + (1-k)x_{B''}; & y_B &= ky_{B'} + (1-k)y_{B''}; \\ x_C &= kx_{C'} + (1-k)x_{C''}; & y_C &= ky_{C'} + (1-k)y_{C''}, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

де: x_A, y_A, x_B, y_B - координати вузлів вихідних сіток, які задані, а координати точок C' і C'' визначаються з урахуванням коефіцієнтів k' і k'' :

$$\begin{aligned}
x_{C'} &= x_{A'} + (x_{B'} - x_{A'})k'; \\
y_{C'} &= y_{A'} + (y_{B'} - y_{A'})k'; \\
x_{C''} &= x_{A''} + (x_{B''} - x_{A''})k''; \\
y_{C''} &= y_{A''} + (y_{B''} - y_{A''})k''.
\end{aligned}
\tag{1.3.2}$$

При підстановці (1.3.2) в (1.3.1) отримаємо:

$$\begin{aligned}
x_C &= k[x_{A'} + (x_{B'} - x_{A'})k'] + (1-k)[x_{A''} + (x_{B''} - x_{A''})k'']; \\
y_C &= k[y_{A'} + (y_{B'} - y_{A'})k'] + (1-k)[y_{A''} + (y_{B''} - y_{A''})k''].
\end{aligned}
\tag{1.3.3}$$

Рівняння прямої AB , що проходить через точки A і B , координати яких (1.3.1) отримано у результаті функціонального додавання, має вигляд:

$$y = \frac{x(y_B - y_A)}{x_B - x_A} - \frac{x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} + y_A.
\tag{1.3.4}$$

При підстановці (1.3.1) до (1.3.4) отримаємо значення tg кута нахилу прямої AB до осі Ox :

$$tg \alpha = \frac{k(y_{B'} - y_{A'}) + (1-k)(y_{B''} - y_{A''})}{k(x_{B'} - x_{A'}) + (1-k)(x_{B''} - x_{A''})}.
\tag{1.3.5}$$

Аналогічно визначається tg кута нахилу прямої AC :

$$tg \alpha = \frac{k \cdot k'(y_{B'} - y_{A'}) + (1-k) \cdot k''(y_{B''} - y_{A''})}{k \cdot k'(x_{B'} - x_{A'}) + (1-k) \cdot k''(x_{B''} - x_{A''})}.
\tag{1.3.6}$$

Порівнюючи (1.3.5) та (1.3.6) можна побачити, що напрям прямої AB не збігається з напрямом вектора \overline{R} . Якщо $k' = k''$, ці коефіцієнти у виразі (1.3.6) скорочуються і вирази (1.3.5) та (1.3.6) стають тотожними.

Роботи Корольок С.В. є логічним продовженням дослідження Ч. Х. Хая. В них показано, що статико-геометричний метод дозволяє враховувати різні зусилля натягу вздовж ниток основи та утка тканини тентових покриттів. На основі експериментальних досліджень враховано реальні співвідношення цих зусиль.

Дослідження [28] присвячено питанням формування поверхонь пневматичних конструкцій з внутрішнім надлишковим тиском на основі статико-геометричного методу. У роботі наведено ітераційні алгоритми

формування дискретних точкових каркасів поверхонь пневматичних конструкцій. У якості першого наближення сітки прийнято розтягнуту сітку, яку сформовано під дією рівномірно розподіленого вертикального навантаження на вузли з подальшим уточненням у кожній ітерації напрямків зусиль внутрішнього надлишкового тиску. Опорний контур сітки не формувався, а приймався заданим як вихідні дані.

У дисертації [3] наведено можливості керування формою поверхні різнотовщинної оболонки за рахунок зміни розподілу зовнішнього навантаження між вузлами.

В результаті досліджень, проведених у роботах професора Пустюльги С.І. та його аспірантів [57-65, 68-70] статико-геометричний метод отримав новий розвиток.

Математичний апарат статико-геометричного методу в певній мірі повторює апарат методу скінченних різниць, який, у свою чергу, надає можливість наближено розв'язувати диференціальні рівняння. Будь-яке наближене рішення потребує оцінки виникаючих похибок. Похибки, які виникають при дискретному моделюванні поверхонь статико-геометричним методом, не можуть бути повністю оцінені тими ж методами, що й у методі скінченних різниць, через деякі відмінності та різне призначення цих методів. У роботі [58] показано, що існує також третій метод дискретного моделювання поверхонь за допомогою двовимірних числових послідовностей, за допомогою якого можна використовувати той же самий математичний апарат. Порівняльний аналіз і синтез трьох описаних методів дозволив автору значно розширити можливості статико-геометричного методу та давати оцінку похибкам моделювання.

Незважаючи на різноманіття досліджених питань у перерахованих роботах, ніде не розглядалися питання формування опорного контуру стиснутих сіток як єдиного цілого з самою сіткою, а саме такий підхід дозволяє отримувати форми, що повністю відповідають такому принципу архітектурної тектоніки, коли форма поверхні покриття повністю відповідає

його статичній роботі. Цьому принципу відповідають лише результати, отримані в роботах Ч. Х. Хая, під час формування точкових каркасів розтягнутих тентових покриттів з гнучким контуром.

Ряд робіт у напрямку дискретного геометричного моделювання присвячено питанням дискретної апроксимації кривих ліній і поверхонь, згущенню точкових каркасів ДПК і ДПП та мінімізації похибок дискретного моделювання [12, 13, 29, 30, 73, 80].

У перерахованих дослідженнях не ставились завдання формування точкових каркасів поверхонь складних покриттів зі стиснутими та розтягнутими зонами і безмоментними дугами з'єднання цих зон.

ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ

1. Аналіз літератури, пов'язаної з архітектурною тектонікою показав, що в більшості випадків форми безмоментних покриттів обмежуються найпростішими, з геометричної точки зору поверхнями, а саме: циліндричними поверхнями, поверхнями обертання та поверхнями другого порядку. Різноманітність більшості зведених в натурі тектонічних споруд було досягнуто не стільки за рахунок різноманітності форм поверхонь покриттів, скільки за рахунок творчих пошуків архітекторів.

2. Безмоментність сучасних тектонічних споруд з поверхнями складної геометричної форми забезпечувалась не геометричними розрахунками, а інтуїцією архітекторів у зв'язку з відсутністю відповідного геометричного апарату. Відсутність такого апарату приводить до пошуку безмоментною форми за рахунок її коригування у процесі розрахунків на міцність та стійкість.

3. Поверхні безмоментних покриттів складної геометричної форми можуть бути описані лише диференціальними рівняннями з заданими крайовими умовами. Такі рівняння не можуть бути розв'язані аналітично, тому розв'язуються наближено методом скінченних різниць.

4. Використання методу скінченних різниць для формоутворення безмоментних криволінійних покриттів в архітектурі обмежується недостатньою наочністю і труднощами, пов'язаними з узагальненням методу для розв'язання задач управління формою поверхні.

5. Статико-геометричний спосіб є наочним узагальненням способу скінченних різниць і, на відміну від останнього, дозволяє керувати формою поверхонь, що формуються, та враховувати різноманітні статичні та геометричні вимоги до поверхні.

6. Доведена властивість методу суперпозицій щодо відношення коефіцієнтів зусиль натягу у в'язях дозволяє варіювати параметри форми без порушення врівноваженості вузлів дискретних каркасів поверхонь.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 1: [43]

РОЗДІЛ 2.

ПЛОСКІ СХЕМИ БЕЗМОМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Арочні та ланцюгові конструкції при спиранні на вертикальні огорожуючі конструкції або на стовпи породжують в останніх згинаючі моменти. Для уникнення таких моментів елементи спирання повинні бути нахиленими за напрямом реакцій, що виникають під дією власної ваги арки або ланцюга та розпору. Звідси виникають геометричні задачі встановлення відповідності між параметрами ДВК, яка є геометричною моделлю арки або ланцюга, і параметрами прямолінійних елементів спирання ДВК (кутами її нахилу до осі Ox , абсцисами точок спирання на осі Ox тощо).

2.1. Схеми складених плоских конструкцій з стиснутими елементами спирання.

Розглянемо безмоментні плоскі системи, що складаються з параболічних елементів, які наближено моделюють безмоментні арки або провисаючі ланцюги, та прямолінійних елементів, які моделюють розкоси спирання. Визначимо залежності між геометричними та статичними параметрами (параметрами власної ваги елементів) таких систем.

На рис. 2.1 показано геометричну схему системи, що складається з ланцюга ACB , наближено представленого дискретно визначеною параболою, яка спирається на розкоси AE і BF .

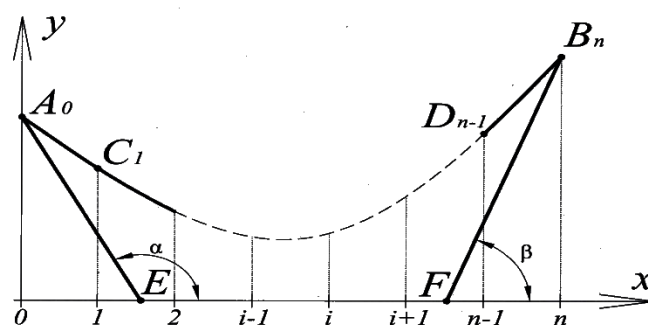


Рис. 2.1. Геометрична схема ланцюга, який спирається на розкоси AE та BF

Вузли дискретно визначеної кривої ACB , що сформована за статико-геометричним методом при рівномірно розподіленому зовнішньому навантаженні kP між вузлами ДВК з рівномірним кроком h уздовж осі Ox , точно належить параболі[26].

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (2.1.1)$$

При заданих трьох довільних вузлах ДВК $A(x = 0; y = y_A)$, $B(x = hn; y = y_B)$, $C(x = hm; y = y_C)$ можна визначити коефіцієнти a_i параболи (2.1.1), підставивши задані координати до рівняння (2.1.1) і розв'язавши отриману систему трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} y_A &= a_0 \\ y_B &= a_0 + hna_1 + h^2n^2a_2 \\ y_C &= a_0 + hma_1 + h^2m^2a_2 \end{aligned}$$

відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_A; \\ a_1 &= \frac{-y_A(m^2 - n^2) + m^2y_B - n^2y_C}{hmn(m - n)}; \\ a_2 &= \frac{y_A(m - n) - my_B + ny_C}{h^2mn(m - n)}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Тоді рівняння параболи (2.1.1) має вигляд:

$$\begin{aligned} y &= y_A - \frac{x[y_A(m^2 - n^2) - m^2y_B + n^2y_C]}{hmn(m - n)} + \\ &+ \frac{x^2[y_A(m - n) - my_B + ny_C]}{h^2mn(m - n)}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Якщо заданий вузол C є наступним після вузла A (при $m = 1$), рівняння (2.1.3) спрощується:

$$y = y_A + \frac{x[-y_A(n^2 - 1) + n^2y_1 - y_B]}{nh(n - 1)} \quad (2.1.4)$$

$$+ \frac{x^2 [y_A(n-1) - ny_1 + y_B]}{nh^2(n-1)}.$$

Визначивши з (2.1.4) ординати y_{i-1}, y_i, y_{i+1} трьох довільних суміжних вузлів ДВК і підставивши їх до рівняння рівноваги $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP = 0$ довільного вузла, отримаємо величину навантаження $k\bar{P}$ на вузол:

$$k\bar{P} = \frac{2[y_A(n-1) - ny_1 + y_B]}{n(n-1)}. \quad (2.1.5)$$

де: y_A і y_B - ординати крайових вузлів ДВК;

y_1 - ордината вузла суміжного з A ;

n - число ланок ДВК.

Розглянемо рівновагу вузла A під дією зусиль зовнішнього навантаження і зусиль в лінійних елементах системи (рис. 2.2).

На вузол A діють такі зусилля:

1. половина власної ваги ланки AC ДВК:

$$\frac{nk\bar{P}}{2};$$

2. зусилля \bar{R}_{AC} розтягіння ланки AC ДВК:

$$\begin{aligned} k\bar{R}_{AC,x} &= x_1 = h \\ k\bar{R}_{AC,y} &= y_1 - y_A \end{aligned}, \quad (2.1.6)$$

де: $k\bar{R}_{AC,x}$ та $k\bar{R}_{AC,y}$ - координатні складові вектора \bar{R}_{CA} ;

3. зусилля \bar{R}_{AE} стиску опори AE ;

4. половина власної ваги опори AE ($\frac{\bar{P}_{AE}}{2}$).

Припустимо, що відношення довжини вектора зусилля \bar{R}_{AE} стиску опори AE до його довжини у k_1 разів більше, ніж відношення довжини вектора зусилля \bar{R}_{CA} розтягіння ланки AC до її довжини:

$$\begin{aligned} k\bar{R}_{AE,x} &= -k_1x_E \\ k\bar{R}_{AE,y} &= k_1y_A, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

де: $\bar{R}_{AE,x}$ та $\bar{R}_{AE,y}$ - координатні складові вектора \bar{R}_{AE} .

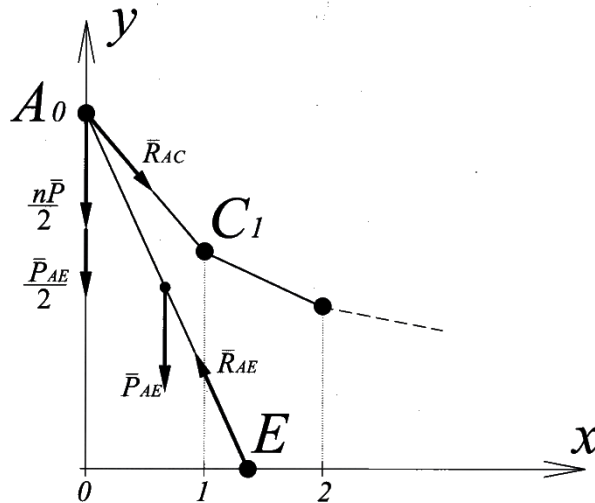


Рис. 2.2. Зосередження зусиль у вузлі А

Припустимо також, що довжина вектора $\frac{\bar{P}_{AE}}{2}$ половини власної ваги опори

AE пропорційна довжині AE з коефіцієнтом k_2 :

$$k\bar{P}_{AE} = 2k_2\sqrt{x_E^2 + y_A^2} \quad (2.1.8)$$

Оскільки зусилля \bar{P}_{AE} в координатній формі має від'ємне значення, то коефіцієнт $k_2 < 0$.

Складаючи координатні складові зазначених зусиль, маємо систему рівнянь рівноваги вузла А:

$$x_E = \frac{h}{k_1}; \quad (2.1.9)$$

$$\frac{nk\bar{P}}{2} + y_1 - y_A + k_1y_A + k_2\sqrt{x_E^2 + y_A^2} = 0. \quad (2.1.10)$$

При виключенні k_1 з (2.1.9) та (2.1.10) маємо:

$$x_E = \frac{hy_A}{y_A - y_1 - \frac{nkP}{2} - k_2\sqrt{x_E^2 + y_A^2}}, \quad (2.1.11)$$

або із врахуванням (2.1.5):

$$x_E = \frac{h(n-1)y_A}{y_1 - y_B - (n-1)k_2\sqrt{x_E^2 + y_A^2}}. \quad (2.1.12)$$

Рівняння (2.1.11) або (2.1.12) при заданому коефіцієнті k_2 має четверту степінь відносно невідомої абсциси x_E точки E спирання. Тому для його розв'язання пропонується метод послідовних наближень [74]. У першому наближенні приймається $x_E = h$ і підставляється до правої частини рівняння (2.1.11) або (2.1.12), звідки визначається нове значення x_E , яке знову підставляється до правої частини рівняння. Тобто, величина x_E у лівій частині рівняння в ітераційному процесі не дорівнює величині x_E у правій частині рівняння. Тому, ці рівняння перепишемо з урахуванням зазначеного зауваження:

$$x_E^{j+1} = \frac{hy_A}{y_A - y_1 - \frac{nkP}{2} - k_2\sqrt{(x_E^j)^2 + y_A^2}}; \quad (2.1.13)$$

$$x_E^{j+1} = \frac{h(n-1)y_A}{y_1 - y_B - (n-1)k_2\sqrt{(x_E^j)^2 + y_A^2}}, \quad (2.1.14)$$

де верхній індекс j є номером наближення в ітераційному процесі.

Ітераційний процес закінчується при $|x_E^{j+1} - x_E^j| \leq \sigma$, де σ - допустима похибка.

Аналогічно до (2.1.13) та (2.1.14) визначається абсциса точки F (рис.2.1) спирання опори BF на вісь Ox :

$$x_F^{j+1} = nh + \frac{hy_B}{y_{n-1} - y_B + \frac{nkP}{2} + k_2 \sqrt{(nh - x_F^j)^2 + y_B^2}}; \quad (2.1.15)$$

$$x_F^{j+1} = nh + \frac{h(n-1)y_B}{-y_A - 2(n-1)y_B + (2n-1)y_{n-1} + k_2 \sqrt{(nh - x_F^j)^2 + y_B^2}}. \quad (2.1.16)$$

Коефіцієнти k_1 і k_2 пов'язані залежністю (2.1.10) і для реальної конструкції залежать від геометричних параметрів опор та фізичних властивостей матеріалу, з якого вони виготовлені. Згідно [55]

$$\overline{R_{AE}} = S \times R \times \varphi,$$

де: S - площа перерізу опори;

R - розрахунковий опір матеріалу;

φ - коефіцієнт повздовжнього згину.

Приклад 2.1.1. (рис. 2.3).

Визначити абсциси точок спирання опор врівноваженої системи, яку наведено на рис.2.3, якщо задано:

$A(x = 0; y = 3); B(x = 6; y = 4); C(x = 3; y = 1);$

$n = 6; h = 1; k_2 = -0.9.$

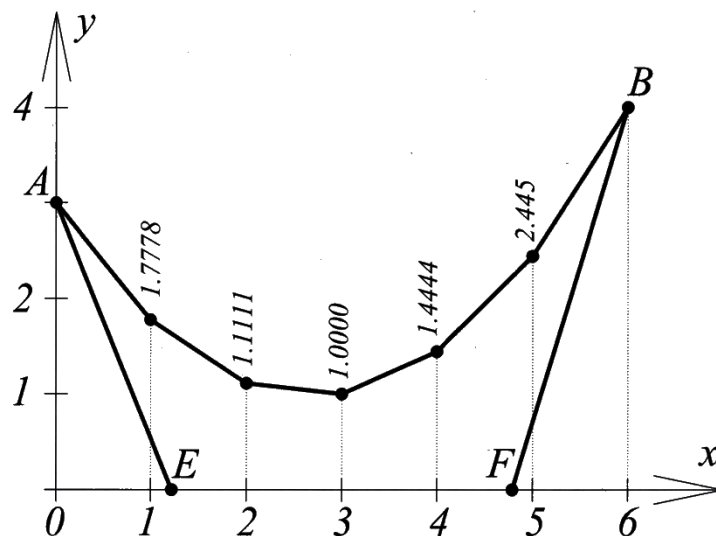


Рис. 2.3. Приклад визначення точок спирання двох опор ланцюга.

Для даного прикладу рівняння (2.1.3) набуває вигляду:

$$y = 3 - 1,5x + 0,2778x^2,$$

звідки: $y_1 = 1,7778$ (при $x_1 = 1$);

$$y_5 = 2,445 \text{ (при } x_5 = 5).$$

При підстановці заданих вихідних умов до (2.1.14) та (2.1.16) маємо:

$$x_E^{j+1} = \frac{15}{-2,2222 + 4,5\sqrt{(x_E^j)^2 + 9}}, \text{ звідки } x_E = 1,2152;$$

$$x_F^{j+1} = 6 + \frac{20}{-16,105 - 0,9\sqrt{[6 - (x_F^j)^2] + 16}}, \text{ звідки } x_F = 4,9908.$$

За перше наближення прийнято $x_E^1 = 1$; $x_F^5 = 5$.

Для визначення абсцис точок E і F знадобилось виконати по 4 ітерації.

Для рівноваги системи, що складається з двох або більшого числа ланцюгів або арок, у вузлах стикування повинні бути проміжні опори.

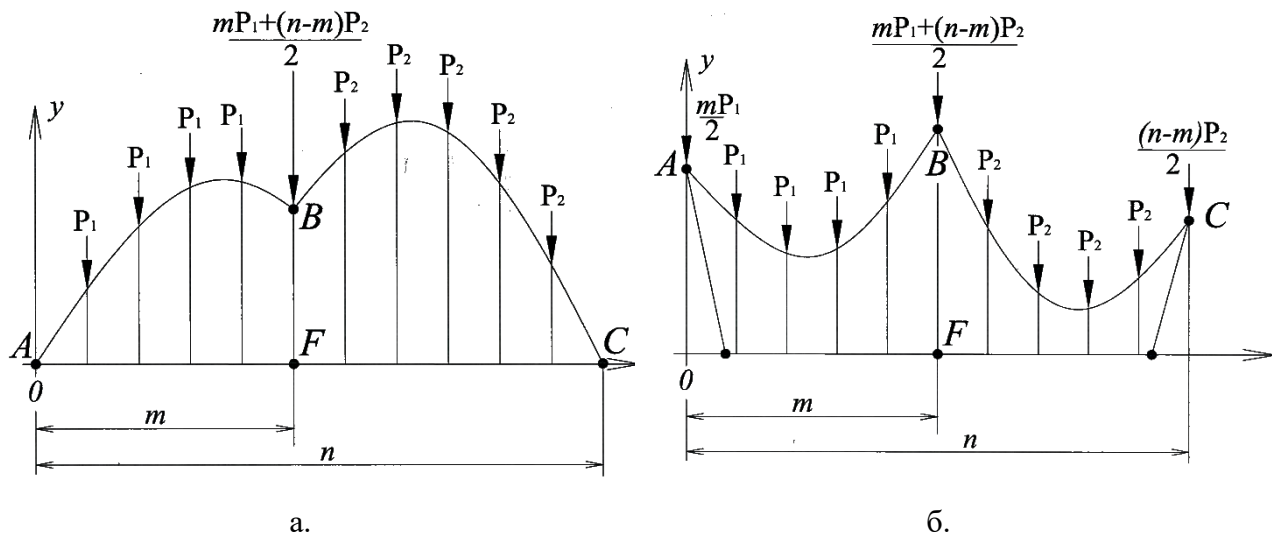


Рис. 2.4. Спирання рівноважних систем з двох арок або з двох ланцюгів

Для пари арок (рис.2.4.а) або пари суміжних ланцюгів (рис.2.4.б) з однаковим рівномірним кроком проміжна опора завжди буде вертикальним стовпчиком, оскільки на вузол B стикування діють зусилля, горизонтальні

складові яких взаємно врівноважуються. Похилі стояки або розкоси потрібні тільки у випадку стикування арки з ланцюгом (рис.2.5).

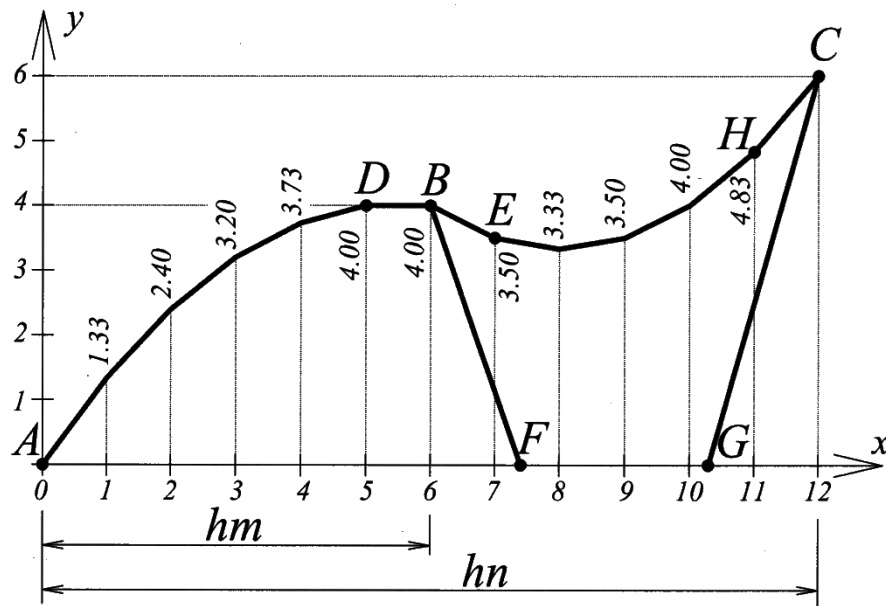


Рис. 2.5. Спирання рівноважної системи арка-ланцюг.

За аналогією з (2.1.6) – (2.1.8) на вузол B стикування двох ДВК діють такі зусилля:

- половина сумарної «ваги» парабол ADB і BEC :

$$k\bar{P}_B = \frac{mk\bar{P}_1 + (n-m)k\bar{P}_2}{2} \quad (2.1.17)$$

- зусилля \bar{R}_{BD} стиску ланки BD :

$$\begin{aligned} k\bar{R}_{BD,x} &= x_m - x_{m-1} = h; \\ k\bar{R}_{BD,y} &= y_m - y_{m-1}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

- зусилля \bar{R}_{BE} розтяжіння ланки BE :

$$\begin{aligned} k\bar{R}_{BE,x} &= x_{m+1} - x_m = h; \\ k\bar{R}_{BE,y} &= y_{m+1} - y_m. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

- зусилля \bar{R}_{BF} стиску опори BF :

$$k\bar{R}_{BF,x} = -k_1(x_F - x_m); \quad (2.1.20)$$

$$k\bar{R}_{BF,y} = k_1 y_m.$$

5. половина власної ваги опори BF :

$$\frac{k\bar{P}_{BF}}{2} = k_2 \sqrt{(x_F - x_m)^2 + y_m^2}. \quad (2.1.21)$$

Рівняння рівноваги вузла B в координатній формі мають вигляд:

$$x_{m-1} + x_{m+1} - k_1(x_F - x_m) = 0, \quad \text{або } k_1 = \frac{2h}{x_F - mh}. \quad (2.1.22)$$

$$\frac{mk\bar{P}_1 + (n-m)k\bar{P}_2}{2} - y_{m-1} + y_{m+1} + k_1 y_m + k_2 \sqrt{(x_F - x_m)^2 + y_m^2} = 0. \quad (2.1.23)$$

При виключенні коефіцієнта k_1 з (2.1.22) та (2.1.23) отримаємо залежність між абсцисою x_F точки спирання опори BF на вісь Ox та коефіцієнтом k_2 :

$$x_F^{j+1} = \frac{4hy_m}{-k(|\bar{P}_1| + |\bar{P}_2|) - 2(y_{m+1} - y_{m-1}) - 2k_2 \sqrt{(x_F^j - x_m)^2 + y_m^2}} + x_m. \quad (2.1.24)$$

Рівняння (2.1.24) так само, як і (2.1.13) – (2.1.16) при заданому значенні k_2 розв'язується відносно x_F способом послідовних наближень, де за перше наближення приймається $x_F^1 = h(m+1)$.

Приклад 2.1.2. (рис. 2.1.5). Задано точки $A(x=0; y=0)$, $B(x=6; y=4)$, $C(x=12; y=6)$, $D(x=5; y=4)$, $E(x=7; y=3,5)$ парабол ADB і BEC відповідно. Визначити абсциси точок F і G спирання опор BF і CG на вісь Ox , якщо $m=6$; $n=12$; $k_2 = -0,9$.

Рівняння парабол ADB і BEC відповідно мають вигляд:

$$y = 1,4667x - 0,1333x^2 \quad (2.1.25)$$

$$y = 14 - 2,6667x + 0,1667x^2 \quad (2.1.26)$$

З рівняння (2.1.5) рівноваги вузла ДВК визначаємо зовнішнє навантаження на вузли кожної з парабол:

$$kP_1 = 0,266;$$

$$kP_2 = -0,333.$$

Рівняння (2.1.24) при заданих умовах приймає вигляд:

$$x_F^{j+1} = \frac{16}{0,401 + 1,8\sqrt{(x_F^j - 6)^2 + 16}} + 6. \quad (2.1.27)$$

Способом послідовних наближень з (2.1.27) визначаємо абсцису x_F точки F спирання опори BF на вісь Ox (за перше наближення прийнято $x_F = 7$):

$$x_F = 7,909$$

Для досягнення заданої точності знадобилось виконати чотири ітерації.

Для визначення абсциси x_G точки G спирання опори на вісь Ox рівняння (2.1.16) приведено у відповідність до рис. 2.5.:

$$x_G^{j+1} = nh + \frac{h(n-m-1)y_C}{-y_B - 2(n-m-1)y_C + (2n-2m-1)y_H + k_2\sqrt{[(n-m)h - x_G^j]^2 + y_C^2}} \quad (2.1.28)$$

З рівняння (2.1.26) визначаємо ординату вузла H ($y_H = 4,8333$) та підставляємо разом з вихідними даними до (2.1.28):

$$x_G^{j+1} = 12 + \frac{30}{-10,8337 - 0,9\sqrt{(6 - x_G^j)^2 + 36}}. \quad (2.1.29)$$

Розв'язання рівняння (2.1.29) способом послідовних наближень дало результат: $x_G = 10,283$, для чого знадобилось три ітерації.

При необхідності забезпечення гладкого стикування парабол ADB і BEC у точці B одна з парабол задається трьома точками (наприклад A , D і B), а друга – двома (наприклад B і C). Третя точка (E) другої параболи визначається з умови гладкого стикування. При визначенні кривих у дискретному вигляді вузли D , B , і E повинні належати одній прямій:

$$y_E = 2y_B - y_D. \quad (2.1.30)$$

Тоді залежність (2.1.24) приймає вигляд:

$$x_F^{j+1} = \frac{4hy_m}{-k(P_{m-1} + P_{m+1}) - 4(y_m - y_{m-1}) - 2k_2\sqrt{(x_F^j - x_m)^2 + y_m^2}} + x_m. \quad (2.1.31)$$

Приклад 2.1.3. (рис. 2.6). Визначити абсциси точок F і G спирання опор BF і CG на вісь Ox для врівноваженої системи з двох гладко стикованих парабол ADB і BEC . Задано: $A(x=0; y=0)$, $D(x=5; y=4,2)$, $B(x=6; y=4)$, $C(x=12; y=5)$, $m=6$, $n=12$, $h=1$, $k_2 = -0,9$.

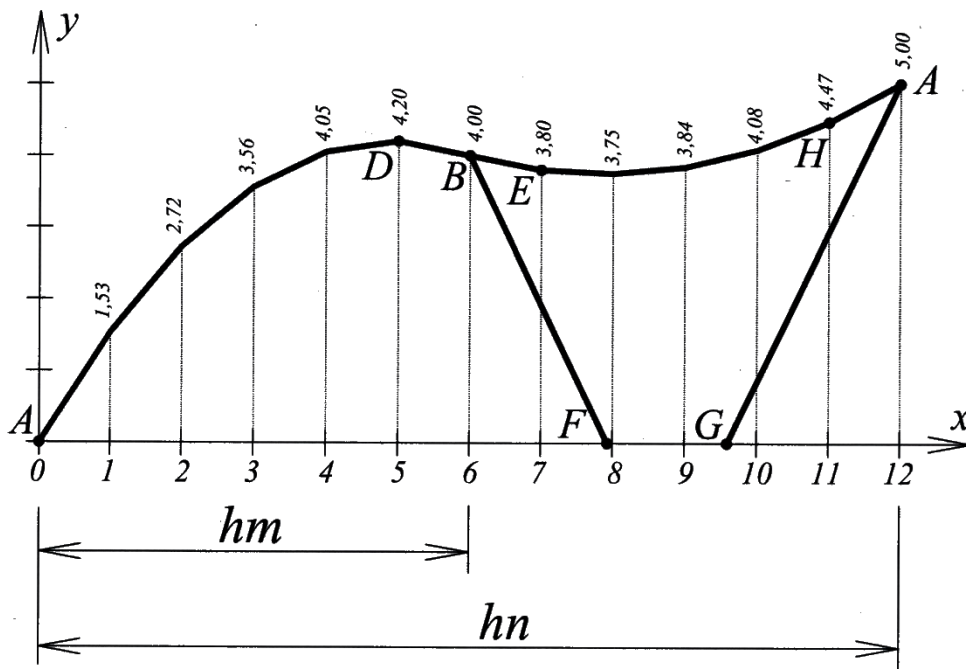


Рис. 2.6. Спирання врівноваженої системи при гладкому стикуванні складових кривих

Ордината точки E визначається з умови (2.1.30): $y_E = 3,8$.

Рівняння параболи BEC визначається за умови проходження через задані точки B , E і C : $y = 8,28 - 1,1533x + 0,0733x^2$, звідки $y_H = 4,47$.

При заданих умовах залежності (2.1.28) та (2.1.31) відповідно приймають вигляд:

$$x_G^{j+1} = 12 - \frac{25}{4,83 + 0,9\sqrt{(x_G^j - 6)^2 + 25}};$$

$$x_F^{j+1} = \frac{16}{0,306 + 1,8\sqrt{(x_F^j - 6)^2 + 16}} + 6.$$

При розв'язанні цих рівнянь способом послідовних наближень отримаємо результат:

$$x_F = 7,928 \qquad x_G = 9,589$$

На рис. 2.7 показано геометричну схему можливого покриття з наведених в прикладі 2.1.3 плоских елементів, де половина прямокутного плану перекривається стиснутими склепіннями, а половина – вантовою системою.

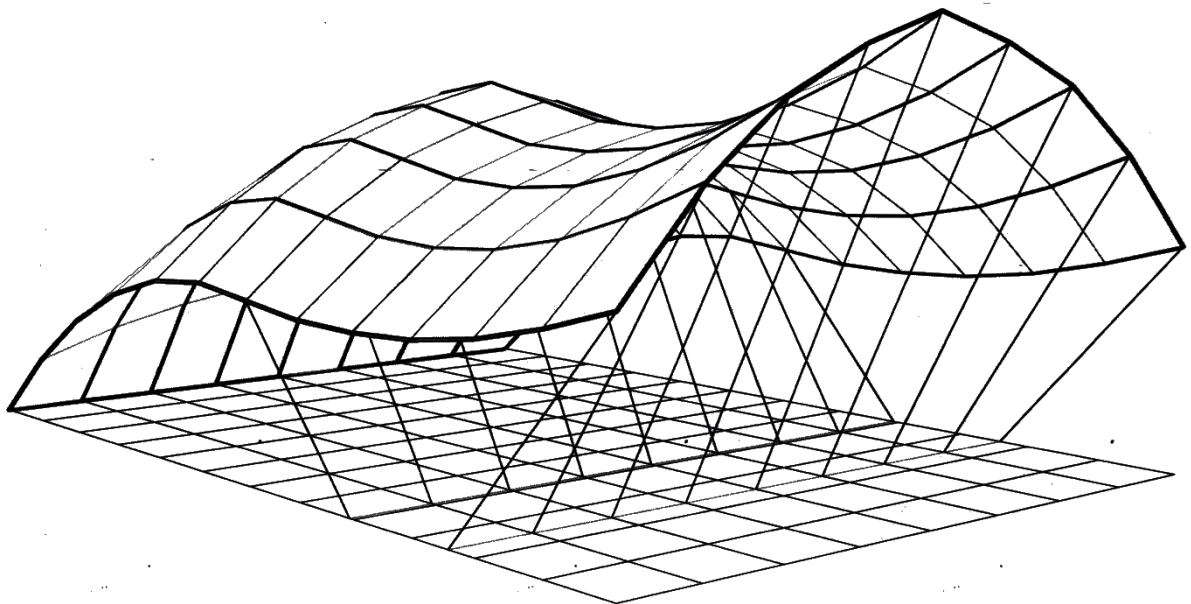


Рис. 2.7. Геометрична схема покриття

2.2. Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії.

Форма ланцюга або арки у вигляді параболи лише наближено моделює безмоментну конструкцію постійного перерізу. Точною моделлю такої конструкції є ланцюгова лінія.

Ланцюговою лінією називають криву, форму якої приймає під дією власної ваги однорідна гнучка нерозтяжна тяжка нитка з закріпленими кінцями [76].

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \text{ де} \quad (2.2.1)$$

a - відношення сили натягнення нитки до її лінійної щільності.

Саме ланцюгова лінія є ідеальною формою стиснутої арки. Ланцюгова лінія (2.2.1) має три вільних параметри (один параметр форми і два параметри положення) і тому, відповідно до теорії параметризації її можна провести через три точки, але при підстановці координат заданих точок до рівняння (2.1.1) маємо систему трьох рівнянь, яку точно розв'язати неможливо. Тому в більшості досліджень з дискретної геометрії прийнято наближену форму провисаючої нитки у вигляді параболи:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2.2.2)$$

Вузли дискретно визначеної параболи з рівномірним кроком h уздовж осі Ox визначаються як вузли рівноважної системи, що формується під дією однакових вертикальних зусиль (власної ваги). Зовнішнє навантаження (власна вага) при цьому рівномірно розподіляється між вузлами уздовж осі Ox .

Для формування дискретного каркаса ланцюгової лінії навантаження потрібно рівномірно розподіляти уздовж самої нитки.

Можливі два підходи до формування дискретного каркаса ланцюгової лінії методом послідовних наближень, якщо за вихідне наближення прийняти точковий каркас параболи (2.2.2).

Перший підхід передбачає поступове вирівнювання довжин ланок ДВК при рівномірному зовнішньому навантаженні на вузли. При цьому крок вузлів уздовж осі Ox стане нерівномірним, а рівномірним буде розподіл навантаження уздовж ДВК.

Другий підхід передбачає поступове уточнення навантаження на кожний вузол відповідно до довжин двох ланок, що примикають до вузла. При цьому крок вузлів уздовж осі Ox залишиться рівномірним, а зовнішнє навантаження буде розподіленим у відповідності до довжин ланок.

За першим підходом для кожної трійки суміжних вузлів визначається нове положення середнього вузла так, щоб суміжні ланки AB і BC були однакової довжини (рис. 2.8.). Для цього через середину хорди AC

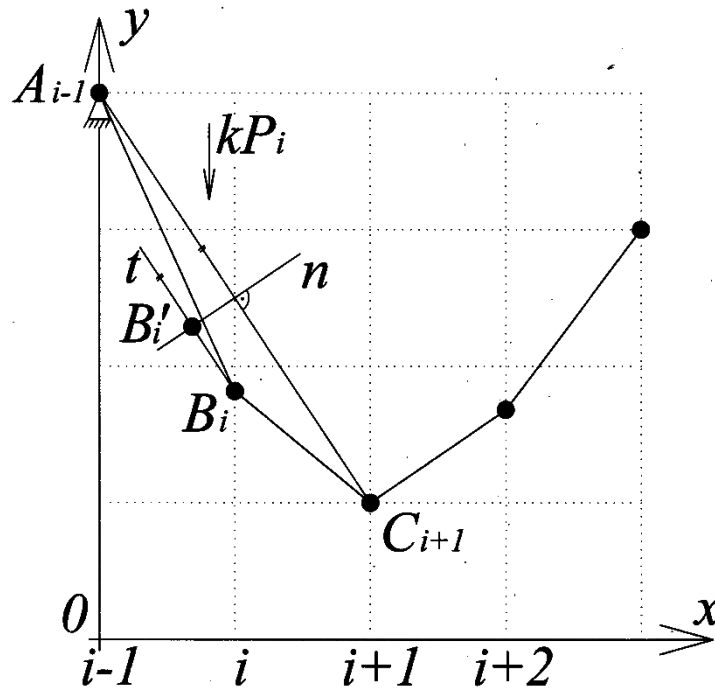


Рис. 2.8. Визначення нового положення вузла B_i' .

$$\frac{x - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y - y_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}} \quad (2.2.3)$$

проведемо перпендикуляр n :

$$y = -\frac{x(x_{i+1} - x_{i-1})}{y_{i+1} - y_{i-1}} + \frac{(y_{i+1}^2 - y_{i-1}^2) + (x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2)}{2} \quad (2.2.4)$$

до перетину з дискретним аналогом дотичної t до ДВК за умови, що $t \parallel AC$:

$$y = \frac{x(y_{i+1} - y_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} + y_i - \frac{x_i(y_{i+1} - y_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (2.2.5)$$

Сумісне розв'язання рівнянь (2.2.4) і (2.2.5) дає нову абсцису вузла B_i' :

$$x_i' = \frac{2(y_{i+1} - y_{i-1})[x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) - y_i(x_{i+1} - x_{i-1})] + (x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2 + y_{i+1}^2 - y_{i-1}^2)}{2[(y_{i+1} - y_{i-1})^2 + (x_{i+1} - x_{i-1})^2]} \quad (2.2.6)$$

Для того, щоб вузол B_i' знаходився у рівновазі під дією вертикального навантаження P , проекції зусиль $\bar{R}_{01,x}; \bar{R}_{12,x}; \bar{R}_{i,i+1,x} \dots$ на вісь Ox повинні бути однаковими за модулем (рис. 2.9.):

$$|\bar{R}_{01,x}| = |\bar{R}_{12,x}| = \dots = |\bar{R}_{i,i+1,x}| = |\bar{R}_{n-1,n,x}|,$$

або

$$\frac{(x_1 - x_0)}{k_{01}} = \frac{(x_2 - x_1)}{k_{12}} = \dots = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{k_{i,i+1}} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{k_{n-1,n}}, \quad (2.2.7)$$

де: k_i - коефіцієнт пропорційності довжини вектора зусилля і довжини відповідної ланки

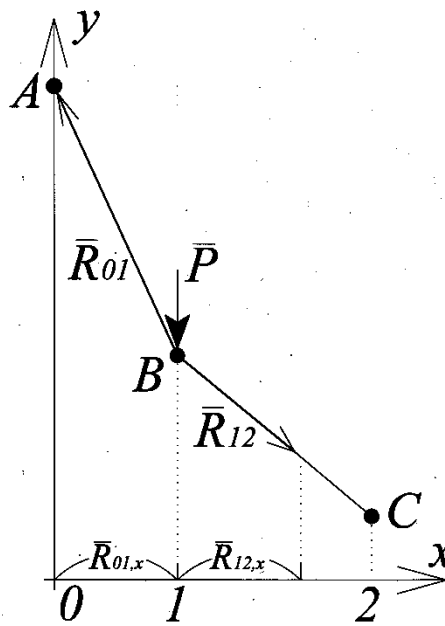


Рис. 2.9. Рівновага вузла B під дією вертикального навантаження.

Приймаючи $k_{01} = 1$, маємо $|\bar{R}_{01,x}| = x_1'$, де x_1' отримуємо з (2.2.6):

$$x_1' = \frac{2(y_2 - y_0)[x_1(y_2 - y_0) - y_1x_2] + x_2(x_2^2 + y_2^2 - y_0^2)}{2[(y_2 - y_0)^2 + x_2^2]} \quad (2.2.8)$$

З (2.2.7) маємо значення коефіцієнтів k_i в усіх ланках ДВК:

$$k_{i,i+1} = \frac{x_1'}{x_{i+1}' - x_i'} \quad (2.2.9)$$

Нові ординати вузлів ДВК отримаємо з системи рівнянь рівноваги, які складаються для всіх невідомих вузлів ДВК:

$$(y_{i-1} - y_i)k_{i-1,i} + (y_{i+1} - y_i)k_{i,i+1} + kP = 0 \quad (2.2.10)$$

Отриманий результат не є точним, оскільки нові абсциси x_i' вузлів ДВК визначались лише для кожної пари суміжних ланок, а вся ДВК не ставала рівно-ланковою. Тому цей результат лише наближує вузли ДВК до вузлів дискретно визначеної ланцюгової лінії. Остаточний результат з допустимою похибкою σ можна отримати при багатократному повторенні обчислень абсцис і ординат вузлів ДВК.

Алгоритм ітераційного процесу виглядає наступним чином:

1. За формулою (2.2.6) обчислюється абсциси вузлів нової ДВК;
2. За формулою (2.2.9) визначаються коефіцієнти $k_{i,i+1}$;
3. Складається і розв'язується система (2.2.10) рівнянь рівноваги, з якої визначаються нові ординати вузлів;
4. Ординати вузлів поточної ітерації порівнюються з відповідними ординатами попередньої ітерації. Якщо $y_i^j - y_i^{j-1} \leq \sigma$, ітераційний процес зупиняється. В іншому разі процес повторюється, починаючи з пункту 1.

Приклад 2.2.1 (рис 2.10.). Задано вузли $A(x_A = 0; y_A = 4)$, $B(x_B = 4; y_B = 3)$, $C(y_C = 1)$ на рівномірній сітці з кроком $h = 1$. За заданими умовами визначити координати вузлів дискретного каркаса ланцюгової лінії.

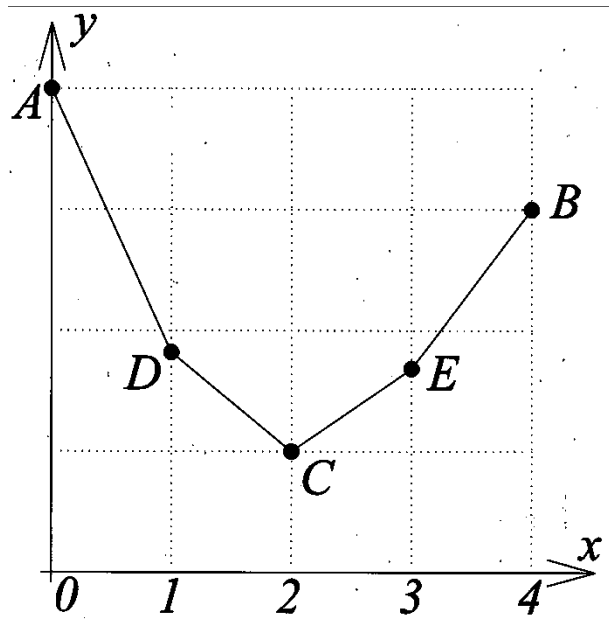


Рис. 2.10. Схема каркаса ланцюгової лінії.

За перше наближення приймемо вузли параболи з рівномірним кроком $h = 1$. Для цього за статико-геометричним методом складаємо і розв'язуємо систему рівнянь рівноваги вузлів:

$$\begin{aligned} y_A - 2y_1 + y_C + kP &= 0 \\ y_1 - 2y_C + y_3 + kP &= 0 \\ y_C - 2y_3 + y_B + kP &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Результат розв'язання цієї системи наведено у нульовому рядку табл. 2.1.

Рівняння (2.2.6) з заданими вихідними даними для вузлів D_1, C_2, E_3 приймають вигляд:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{6(3x_1 + x_2 y_1) + x_2(x_2^2 - 15)}{2(x_2^2 + 9)}; \\ x_2' &= \frac{2(y_3 - y_1)[x_2(y_3 - y_1) - y_2(x_3 - x_1)] + (x_3 - x_1)(x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2)}{2[(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2]}; \\ x_3' &= \frac{4[2x_3 - y_3(4 - x_2)] + (4 - x_2)(24 - x_2^2)}{2[4 + (4 - x_2)^2]}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Абсциси вузлів, які підраховано за формулами (2.2.12) наведено у першому рядку таблиці 2.1.

Формула (2.2.9) в даному прикладі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} k_{01} &= 1; & k_{12} &= \frac{x_1'}{x_2' - x_1'}; \\ k_{23} &= \frac{x_1'}{x_3' - x_2'}; & k_{34} &= \frac{x_1'}{4 - x_3'}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Коефіцієнти, які визначено за формулами (2.2.13) наведено у першому рядку таблиці 2.1.

Система рівнянь рівноваги (2.2.10) при заданих умовах приймає вигляд:

$$\begin{aligned} -y_1(1 + k_{12}) + kP + k_{12} + 4 &= 0 \\ y_1k_{12} + y_3k_{23} + kP - k_{12} - k_{23} &= 0 \\ -y_3(k_{23} - k_{34}) + kP + k_{23} + 3k_{34} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Результатом розв'язання цієї системи є:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{4(2k_{23} + k_{34}) + k_{12}(3k_{23} + 2k_{34}) - 2k_{23}k_{34}}{2k_{23} + k_{34} + k_{12}(3k_{23} - 2k_{34})} \\ y_3' &= \frac{-3k_{12} + 2k_{23} + 3k_{34} + 3k_{12}(k_{23} + 2k_{34})}{2k_{23} + k_{34} + k_{12}(3k_{23} + 2k_{34})} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Ординати (2.2.15), які отримано за значеннями коефіцієнтів (2.2.13) занесено у перший рядок таблиці 2.1.

Нехай допустима похибка у значеннях ординат не перевищує 0,0001. Порівняння значень ординат після виконання першої ітерації перевищує допустиму похибку, тому ітераційний процес повторюється з визначення абсцис (2.2.12). У наступних рядках таблиці 2.1 наведено відповідні значення координат вузлів та коефіцієнтів $k_{i,i+1}$, які отримано в наступних ітераціях. З наведених значень таблиці 2.1. видно, що значення координат вузлів не

перевищують допустимої похибки після 15-ої ітерації. Дискретний каркас рівноланкової ланцюгової лінії показано на рис. 2.11.

Таблиця 2.1.

№ ітер.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	k_{01}	k_{12}	k_{23}	k_{34}	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	1	2	3	4	1	1	1	1	4	1,875	1	1,375	3
1	0	0,7115	1,732	3,2347	4	1	0,6972	0,4735	0,9297	4	2,1408	1	1,567	3
2	0	0,5946	1,7292	3,241	4	1	0,5241	0,3933	0,7834	4	2,3603	1	1,5439	3
3	0	0,6015	1,6357	3,2192	4	1	0,5816	0,3799	0,7704	4	2,2965	1	1,5141	3
4	0	0,5655	1,6263	3,2212	4	1	0,5331	0,3546	0,7261	4	2,3653	1	1,5047	3
5	0	0,5653	1,5937	3,2137	4	1	0,5497	0,349	0,7189	4	2,3472	1	1,4921	3
6	0	0,553	1,5883	3,2147	4	1	0,5341	0,34	0,7042	4	2,3702	1	1,4888	3
7	0	0,5521	1,577	3,2122	4	1	0,5387	0,3376	0,7008	4	2,3655	1	1,484	3
8	0	0,5479	1,5744	3,2125	4	1	0,5338	0,3345	0,6957	4	2,3729	1	1,4826	3
9	0	0,5473	1,5704	3,2117	4	1	0,5349	0,3335	0,6943	4	2,3719	1	1,481	3
10	0	0,5458	1,5693	3,2117	4	1	0,5333	0,3323	0,6924	4	2,3744	1	1,4803	3
11	0	0,5455	1,5678	3,2114	4	1	0,5336	0,3319	0,6917	4	2,3742	1	1,4796	3
12	0	0,545	1,5673	3,2115	4	1	0,5331	0,3315	0,6912	4	2,375	1	1,4795	3
13	0	0,5449	1,5669	3,2114	4	1	0,5332	0,3313	0,691	4	2,3749	1	1,4794	3
14	0	0,5447	1,5667	3,2113	4	1	0,5333	0,3312	0,6906	4	2,3753	1	1,4791	3
15	0	0,5447	1,5667	3,2114	4	1	0,5333	0,3312	0,6906	4	2,3753	1	1,4791	3

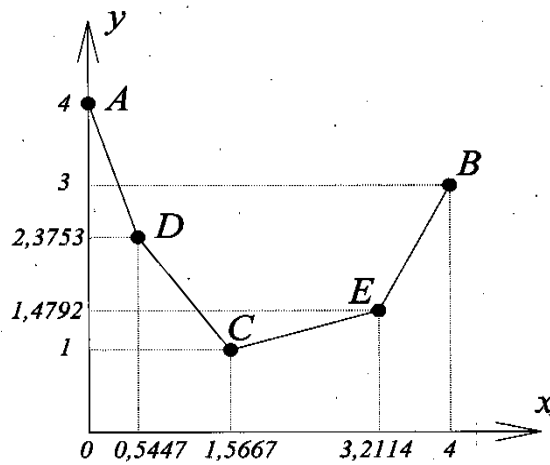


Рис. 2.11. Дискретний каркас рівноланкової ланцюгової лінії до прикладу 2.2.1.

За другим підходом навантаження P_i на довільний вузол C пропорційне довжинам двох ланок, що примикають до вузла C (рис. 2.12):

$$k_i P = \sqrt{\frac{(x_B - x_A)^2}{n^2} + (y_{i-1} - y_i)^2} + \sqrt{\frac{(x_B - x_A)^2}{n^2} + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (2.2.16)$$

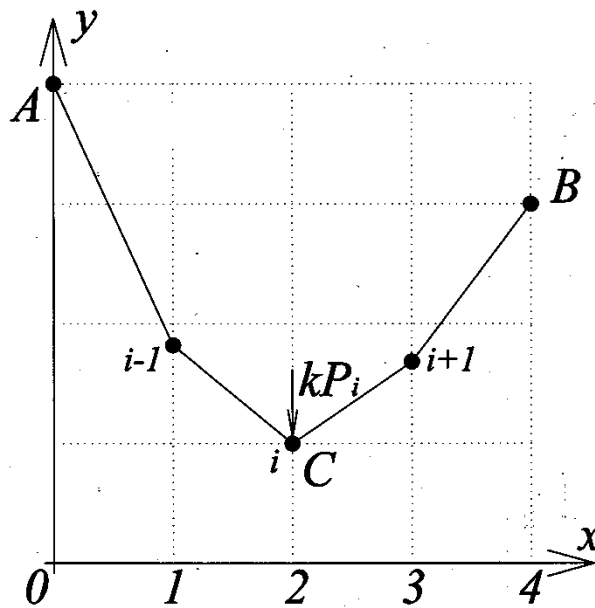


Рис. 2.12. Навантаження на довільний вузол C .

За перше наближення можна взяти точковий каркас параболи, що проходить через три задані вузла, наприклад A, B і C . Ординати проміжних вузлів визначаються при розв'язанні системи рівнянь рівноваги з невідомою величиною kP :

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP = 0. \quad (2.2.17)$$

За отриманими ординатами вузлів за формулою (2.2.16) визначається навантаження на кожен вузол і підставляється в систему рівнянь (2.2.17), де новий коефіцієнт k вважається невідомим. При розв'язанні нової системи (2.2.17) отримуємо нові ординати вузлів, які будуть ближче до вузлів дискретно визначеної ланцюгової лінії. Ітераційний процес продовжується доки різниця між ординатами попереднього і поточного наближень не стане менше наперед заданої допустимої похибки.

Приклад 2.2.2. Сформуувати дискретний точковий каркас дискретно визначеної ланцюгової лінії, що має задані вузли: $A(x_A = 0, y_A = 4)$; $B(x_B = 4, y_B = 3)$; $C(x_C = 2, y_C = 1)$.

Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів при сталому невідомому параметрі kP :

$$\begin{aligned} -2y_1 + kP + 5 &= 0 \\ y_1 + y_3 + kP - 2 &= 0 \\ -2y_3 + kP + 4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Результати розв'язання цієї системи рівнянь наведено у нульовому рядку таблиці 2.2.

За формулою (2.2.4), яка для даного приклада спрощується,

$$P_i = \sqrt{(y_{i-1} - y_i)^2 + 1} + \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + 1} \quad (2.2.19)$$

обчислено зусилля P_1, P_2, P_3 та коефіцієнт k , значення яких наведено в першому рядку таблиці 2.2.

Значення k та P_1, P_2, P_3 підставляємо у систему рівнянь рівноваги вузлів ДВК:

$$\begin{aligned} -2y_1 + k' P_1 + 5 &= 0 \\ y_1 + y_3 + k' P_2 - 2 &= 0 \\ -2y_3 + k' P_3 + 4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Розв'язання цієї системи також наведено у другому рядку таблиці 2.2.

Ітераційний процес уточнення параметрів P_i за формулою (2.2.19) та розв'язання нової системи рівнянь (2.2.20) продовжується поки не зрівняються значення ординат до четвертого знаку десяткового дробу. Дискретний каркас отриманої ланцюгової лінії наведено на рис. 2.13.

Таблиця 2.2

№ ітерації	kP_1	kP_2	kP_3	k'	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
0	-1,25	-1,25	-1,25	1	4	1,875	1	1,375	3
1	3,6773	2,3968	2,976	-0,4369	4	1,6969	1	1,35	3
2	3,7297	2,2784	2,9889	-0,4434	4	1,673	1	1,3373	3
3	3,7381	2,2607	2,9956	-0,4442	4	1,6697	1	1,3346	3
4	3,7393	2,258	2,9971	-0,4443	4	1,6692	1	1,3341	3
5	3,7395	2,2576	2,9973	-0,4444	4	1,6691	1	1,3341	3
6	3,7396	2,2575	2,9973	-0,4444	4	1,6691	1	1,3341	3

Ітераційний процес зупинено після шостої ітерації.

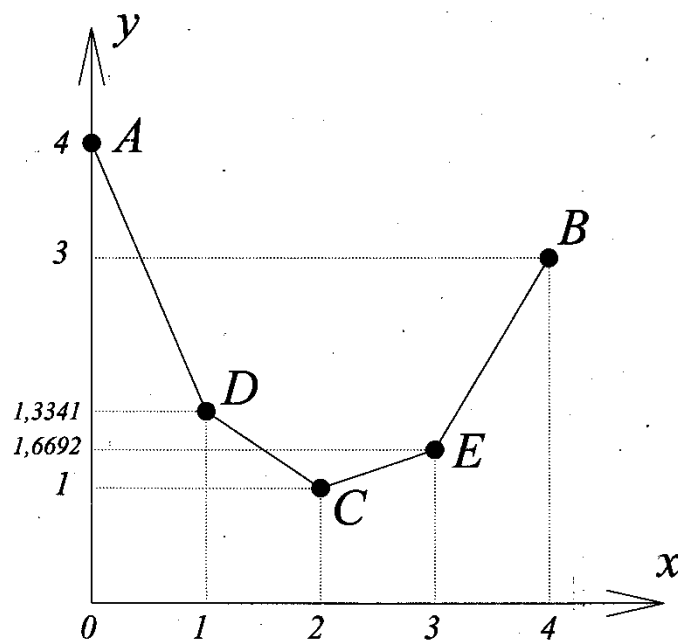


Рис. 2.13. Дискретний каркас ланцюгової лінії до прикладу 2.2.2.

Порівнюючи результати, які отримано у двох наведених прикладах, можна зазначити, що у другому прикладі ітераційний процес збігається швидше.

2.3 Формування дискретного каркаса ланцюгової лінії за заданою ординатою екстремального вузла.

В багатьох дослідженнях з дискретної геометрії [17, 26] зустрічається задача формування ДВК за трьома заданими вузлами (рис. 2.14), які розміщено на рівномірній сітці уздовж осі Ox при рівномірно розподіленому між вузлами невідомому зовнішньому навантаженні kP .

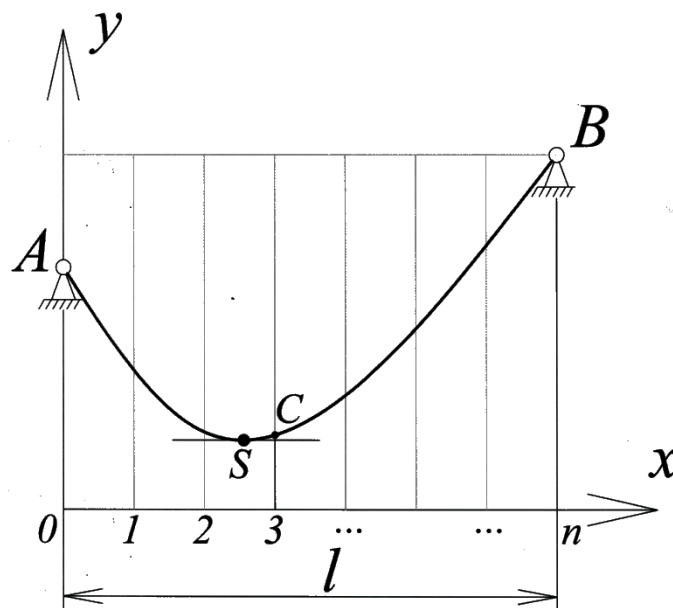


Рис. 2.14. Геометрична схема ДВК з трьома заданими вузлами

Вузли A і B задаються як опорні, а ордината довільного вузла C приймається, як параметр управління формою ДВК. Така ДВК вважається наближеною моделлю провисаючого під власною вагою ланцюга або безмоментної арки. Ординати проміжних вузлів визначаються за статико-геометричним методом при розв'язанні системи рівнянь рівноваги вузлів ДВК:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + kP = 0 \quad (2.3.1)$$

Система (2.3.1) налічує $n - 1$ рівнянь, $n - 2$ невідомих ординат вузлів та невизначений параметр kP . З точки зору проектування криволінійних архітектурних форм за параметр управління формою кривої замість ординати

довільного вузла C краще прийняти екстремальну (найнижчу або найвищу) точку кривої, а саму криву формувати як ланцюгову лінію.

Отже запропонуємо спосіб формування дискретно визначеної ланцюгової лінії за заданими координатами точок спирання A і B та ординатою екстремального вузла.

Відомо, що система рівнянь (2.3.1) при заданих вузлах $A(x = 0, y = y_A)$; $B(x = x_B, y = y_B)$ і $C(x = \frac{x_B - x_A}{2}, y = y_C)$ визначає дискретний каркас точок параболи [26]:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2, \text{ де} \quad (2.3.2)$$

$$a_0 = y_A;$$

$$a_1 = \frac{-3y_A - y_B + 4y_C}{x_B - x_A}; \quad (2.3.3)$$

$$a_2 = \frac{2(y_A + y_B - 2y_C)}{(x_B - x_A)^2}.$$

Прирівнюючи першу похідну функції (2.3.2) нулю, отримаємо координати екстремальної точки S параболи:

$$x_S = \frac{-a_1}{2a_2}; \quad (2.3.4)$$

$$y_S = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}.$$

При підстановці (2.3.3) до (2.3.4) маємо:

$$y_S = y_A - \frac{(3y_A + y_B - 4y_C)^2}{8(y_A + y_B - 2y_C)}, \quad (2.3.5)$$

звідки:

$$y_C = \frac{y_A + y_B + 2y_S \pm 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{4}, \quad (2.3.6)$$

при чому знак перед радикалом залежить від орієнтації параболи:

$$y_C = \frac{y_A + y_B + 2y_S + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{4}, \quad \text{при } y_C < \frac{y_A + y_B}{2} \quad (2.3.7)$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B + 2y_S - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{4}, \quad \text{при } y_C > \frac{y_A + y_B}{2} \quad (2.3.8)$$

При підстановці (2.3.8) до (2.3.3) отримаємо коефіцієнти a_i параболи (2.3.2), які виражено через параметр y_S :

$$a_1 = \frac{2(y_S - y_A) - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{x_B - x_A}; \quad a_2 = \frac{-2y_S + y_A + y_B + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{(x_B - x_A)^2} \quad (2.3.9)$$

при мінімальному значенні y_S , та

$$a_1 = \frac{2(y_S - y_A) + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{x_B - x_A}; \quad a_2 = \frac{-2y_S + y_A + y_B - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}}{(x_B - x_A)^2} \quad (2.3.10)$$

при максимальному значенні y_S .

Тоді рівняння (2.3.2) параболи при мінімальному значенні y_S приймає вигляд:

$$y = y_A + \frac{x[2(y_S - y_A) - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{x_B - x_A} - \frac{x^2[2y_S - y_A - y_B - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{(x_B - x_A)^2}, \quad (2.3.11)$$

а при максимальному:

$$y = y_A + \frac{x[2(y_S - y_A) + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{x_B - x_A} - \frac{x^2[2y_S - y_A - y_B + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{(x_B - x_A)^2}. \quad (2.3.12)$$

Зовнішнє навантаження на вузли можна отримати з (2.3.1). Для цього з (2.3.2) визначаємо ординати трьох довільних суміжних вузлів при умові:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= \frac{(i-1)(x_B - x_A)}{n}; \\ x_i &= \frac{i(x_B - x_A)}{n}; \\ x_{i+1} &= \frac{(i+1)(x_B - x_A)}{n}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Тоді зовнішнє навантаження kP на вузли ДВК буде:

$$kP = 2y_i - y_{i-1} - y_{i+1} = \frac{-2a_2(x_B - x_A)^2}{n} \quad (2.3.14)$$

При підстановці (2.3.9) і (2.3.10) до (2.3.14) остаточно маємо:

$$kP = \frac{2[2y_S - y_A - y_B - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n^2}, \quad \text{при } y_S < \frac{y_A + y_B}{2} \quad (2.3.15)$$

$$kP = \frac{2[2y_S - y_A - y_B + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n^2}, \quad \text{при } y_S > \frac{y_A + y_B}{2} \quad (2.3.16)$$

Ординати проміжних вузлів визначаються при підстановці (2.3.13) до (2.3.11) або до (2.3.12):

$$y_i = y_A + \frac{i[2(y_S - y_A) - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n} - \frac{i^2[2y_S - y_A - y_B - 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n^2} \quad (2.3.17)$$

при $y_S < \frac{y_A + y_B}{2}$

або

$$y_i = y_A + \frac{i[2(y_S - y_A) + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n} - \frac{i^2[2y_S - y_A - y_B + 2\sqrt{(y_S - y_A)(y_S - y_B)}]}{n^2} \quad (2.3.18)$$

при $y_S > \frac{y_A + y_B}{2}$,

де:

x_A, y_A, x_B, y_B - координати точок спирання ДВК;

y_S - ордината екстремальної точки кривої;

i - номер вузла ДВК;

n - число ланок ДВК.

Перехід від дискретно визначеної параболи до дискретно визначеної ланцюгової лінії здійснюється ітераційним способом, який було описано у підрозділі 2.2. При цьому потрібно врахувати, що заданою ординатою внутрішнього вузла повинна бути ордината екстремального вузла S , який у процесі ітерацій може змінювати свій номер.

Алгоритм ітераційного процесу виглядає наступним чином:

1. За формулою (2.3.17) або (2.3.18) визначаються ординати вузлів вихідного наближення;
2. За формулами (2.2.16) обчислюються значення параметра kP_i для кожного вузла ДВК;
3. Складається і розв'язується система рівнянь (2.2.17) рівноваги вузлів ДВК;
4. Визначається номер екстремального вузла S ;
5. Порівнюються ординати вузлів поточного і попереднього наближень.

Якщо похибка $\sigma = y_i^{j+1} - y_i^j$, де верхній індекс є номером ітерації, не перевищує заданої допустимої величини, ітераційний процес зупиняється.

Якщо $\sigma > \sigma_{\text{доп}}$ ітераційний процес повторюється з пункту 2.

Приклад. 2.3.1. (рис. 2.15.). визначити ординати вузлів дискретно визначеної моделі ланцюга, з одиничним кроком вздовж осі Ox , якщо задані точки закріплення $A(x=0, y=3)$, $B(x=6, y=6)$ та ордината найнижчої точки $S(y_S=1)$ ланцюга.

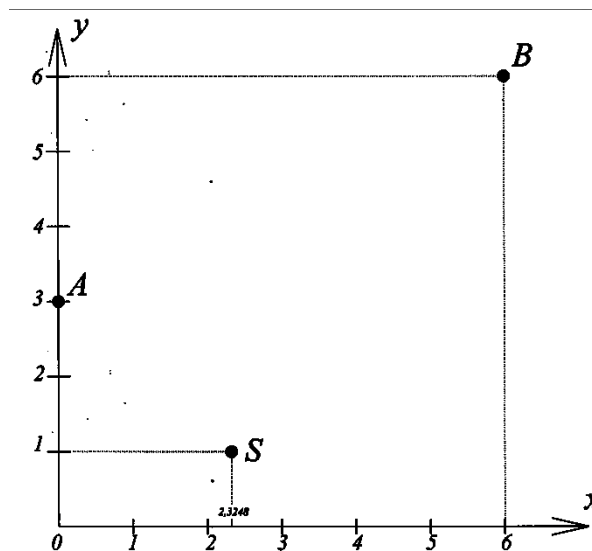


Рис. 2.15. Точки закріплення дискретно визначеної моделі ланцюга до прикладу 2.3.1.

При заданих умовах рівняння (2.3.12) та (2.3.18) відповідно набувають вигляду:

$$y = 3 - 1,7208x + 0,3701x^2 \quad (2.3.19)$$

$$y_i = 3 - 1,7208i + 0,3701i^2 \quad (2.3.20)$$

Для контролю положення найнижчої точки S параболі за формулою (2.3.19) визначаємо абсцису точки S :

$$x_S = 2,3248$$

Ординати вузлів ДВК вихідного наближення, які визначено за формулою (2.3.20) наведено у нульовому рядку табл. 2.3.

За формулою (2.2.16), яка для даного прикладу набуває вигляду

$$kP_i = \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + 1} + \sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + 1} \quad (2.3.21)$$

обчислюємо нову величину зовнішнього навантаження для всіх проміжних вузлів, при підстановці до (2.3.21) вихідного наближення. Результати обчислень наведено у першому рядку табл. 2.3.

Складаємо систему рівнянь рівноваги (2.2.17) вузлів ДВК з врахуванням нового зовнішнього навантаження (рядок 1 табл. 2.3) та заданої ординати екстремального вузла $S(y_S = 1)$. Для того, щоб число невідомих відповідало числу рівнянь, вводимо новий невідомий коефіцієнт k пропорційності довжини вектора зусилля у ланках ДВК і довжини відповідних ланок:

$$\begin{aligned} -2y_1 + 2,852k + 4 &= 0 \\ y_1 + y_3 + 2,131k - 2 &= 0 \\ -2y_3 + y_4 + 2,333k + 1 &= 0 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 + 3,221k &= 0 \\ y_4 - 2y_5 + 4,451k + 6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Результат розв'язання системи рівнянь наведено у першому рядку табл. 2.3.

Задаємо допустиму похибку $\sigma = y_i^{j+1} - y_i^j = \pm 0,001$. Порівнюємо ординати першого наближення з ординатами вихідного. З нульового та

першого рядків табл. 2.3 видно, що $\sigma_{\max} = y_5^1 - y_5^0 = -0,449$, що перевищує допустиму похибку. Тому виконуємо наступну ітерацію процесу, обчислюючи нове навантаження kP_i та нові ординати вузлів. Результати обчислень наступних ітерацій наведені в табл. 2.3.

На ітерації 5 похибка обчислень дорівнює або стає меншою за допустиму і тому процес зупиняється, а результати двох останніх ітерацій вважаються достатньо точними. На рис. 2.16 побудовано ДВК за результатами останньої ітерації.

Таблиця 2.3.

№ ітер.	Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
	kP_1	kP_2	kP_3	kP_4	kP_5	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0						3	1,649	1,039	1,169	2,038	3,649	6
1	2,852	2,131	2,333	3,221	4,451	3	1,601	1	0,997	1,647	3,199	6
2	2,887	2,579	2,605	3,040	4,820	3	1,605	0,965	1	1,716	3,228	6
3	2,904	2,188	2,231	3,043	4,760	3	1,593	1	1,021	1,667	3,166	6
4	2,889	2,163	2,191	2,992	4,807	3	1,591	1	1,021	1,663	3,151	6
5	2,889	2,162	2,189	2,981	4,812	3	1,591	1	1,022	1,664	3,150	6

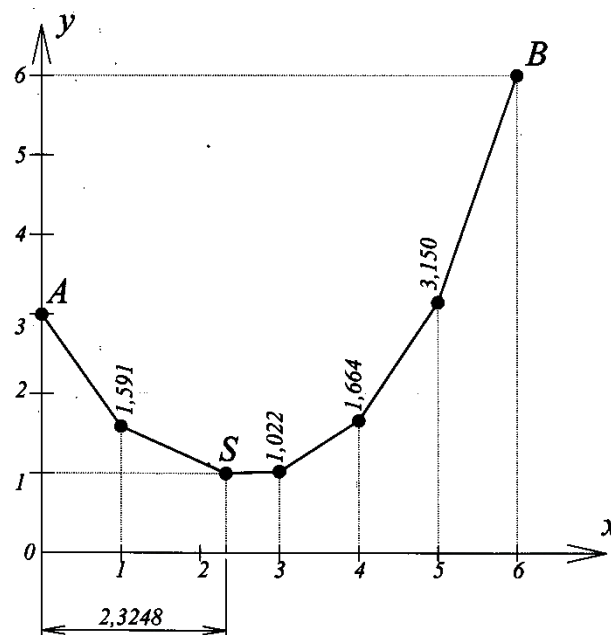


Рис. 2.16. Геометрична схема дискретно визначеної ланцюгової лінії до прикладу 2.3.1.

Приклад 2.3.2. (рис. 2.17.). Визначити ординати вузлів дискретно визначеної моделі арки з одиничним кроком вздовж осі Ox , якщо задано точки спірання $O(x=0, y=0)$, $B(x=6, y=3)$ та ординату найвищої точки арки $S(y=4)$.

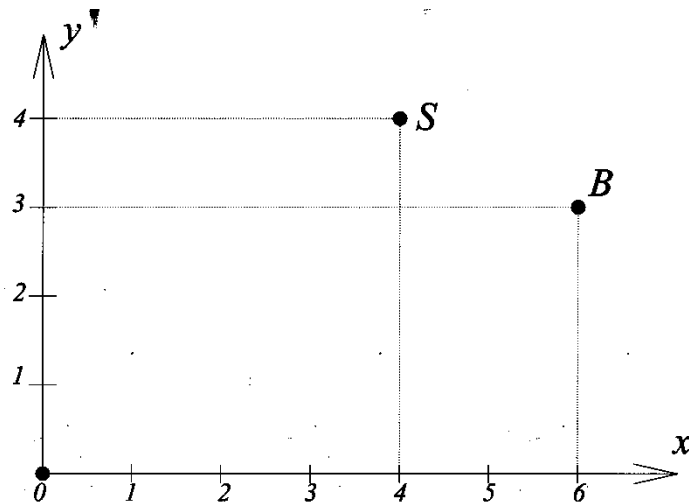


Рис. 2.17. Точки спірання дискретно визначеної моделі арки до прикладу 2.3.2.

Рівняння (2.3.12) та (2.3.18) параболи при заданих умовах приймають вигляд:

$$y = 2x - 0,25x^2 \quad (2.3.23)$$

або

$$y_i = 2i - 0,25i^2. \quad (2.3.24)$$

Для контролю положення найвищої точки S параболи за формулою (2.3.23) визначаємо абсцису точки S :

$$x_S = 4$$

Ординати вузлів ланцюгової лінії, яка обернута опуклістю до гори, за аналогією з прикладом 2.3.1 визначаються за наступним алгоритмом:

1. Ординати вузлів вихідного наближення визначаються за формулою (2.3.18) або (2.3.24);
2. За формулою (2.2.16) обчислюються значення параметра kP_i для кожного вузла ДВК;

3. Складається та розв'язується система рівнянь (2.2.17) рівноваги вузлів ДВК;
4. Визначається номер екстремального вузла S ;
5. Визначається похибка обчислень ординат вузлів. При $y_i^{j+1} - y_i^j > \sigma_{\text{доп}}$ (де i - номер ітерації, $\sigma_{\text{доп}}$ - допустима похибка) ітераційний процес повторюється з п. 2. При $y_i^{j+1} - y_i^j \leq \sigma_{\text{доп}}$ ітераційний процес зупиняється.

В табл. 2.4 наведено результати розрахунків поітераційно так, як це було зроблено в табл. 2.3. Ітераційний процес зупинено при $\sigma_{\text{доп}} = 0,001$.

Таблиця. 2.4.

№ ітер.	Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
	kP_1	kP_2	kP_3	kP_4	kP_5	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0						0	1,75	3	3,75	4	3,75	3
1	3,616	2,851	2,281	2,062	2,281	0	1,975	3,201	3,837	4	3,736	3
2	3,797	2,767	2,198	2,048	2,276	0	2,000	3,206	3,833	4	3,738	3
3	3,803	2,747	2,194	2,048	2,277	0	2,001	3,204	3,832	4	3,739	3
4	3,801	2,745	2,195	2,048	2,277	0	2,000	3,203	3,832	4	3,739	3

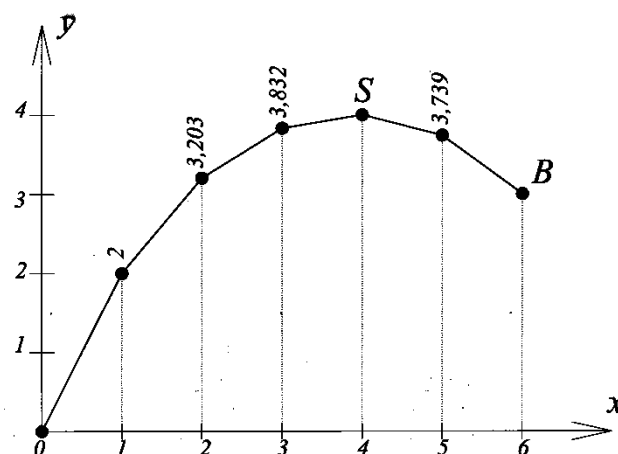


Рис. 2.18. Геометрична схема дискретно визначеної арки до прикладу 2.3.2.

Для отримання результату з допустимою похибкою знадобилося виконати чотири ітерації. За отриманими результатами табл. 2.4 на рис. 2.18 побудовано дискретно визначену ланцюгову лінію.

Використовуючи всі результати досліджень цього розділу можна побудувати геометричну схему безмоментної конструкції, яка складається з стиснутих арок, розтягнутих ланцюгів, елементів спірання з заданими вузлами, та екстремальними вузлами ДБК.

Приклад 2.3.3. (рис. 2.19). Задано координати точок $O(x=0, y=0)$, $B(x=6, y=3)$, $E(x=12, y=5)$ спірання складеної ДБК і ординату найвищої точки арки $S(y_S=4)$. Визначити ординати вузлів дискретно визначених ланцюгових ліній OSB та BDE , які гладко стикуються між собою та точки F і G спірання безмоментних розкосів BF і FG на вісь Ox .

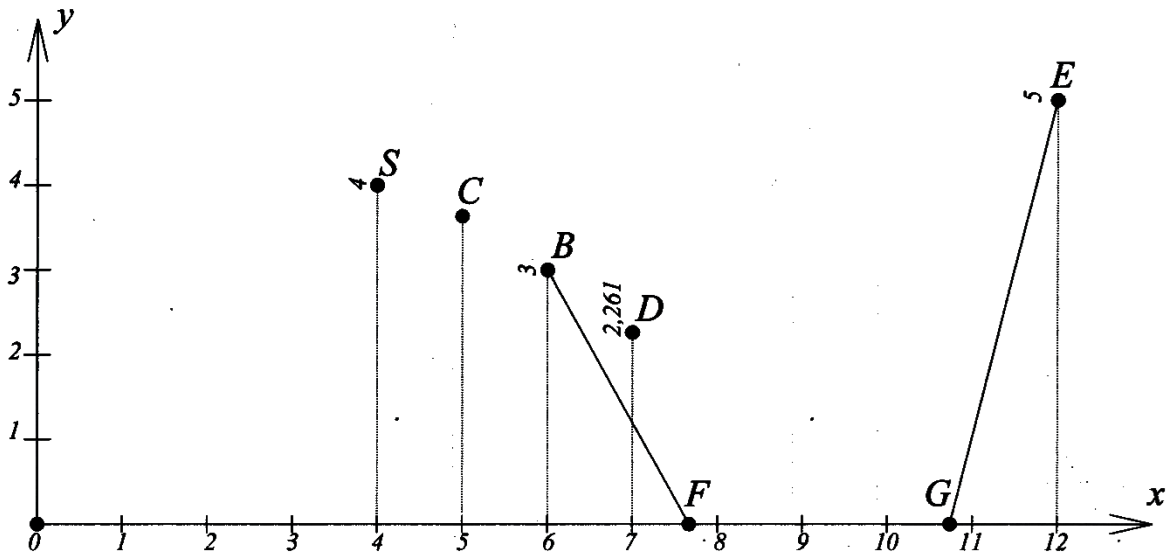


Рис. 2.19. Вихідні умови для прикладу 2.3.3.

Вихідні умови для формування ланцюгової лінії такі самі, як у прикладі 2.3.2. Тому ординати вузлів ДБК OSB візьмемо з табл. 2.4. Для забезпечення гладкого стикування ліній OSB та BDE вузол D задаємо на прямій BC :

$$y_7 = 2y_6 - y_5 = 2,261$$

За алгоритмом, що викладено у підрозділі 2.2 визначаємо ординати вузлів ДБК BDE .

Вихідним наближенням ординат кривої BDE є ординати параболи (2.3.2), що проходить через вузли B, D і E . Ці ординати наведено у нульовому рядку табл. 2.5.

Таблиця 2.5.

№ ітер.	Зовнішнє навантаження					Ординати вузлів						
	kP_7	kP_8	kP_9	kP_{10}	kP_{11}	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
0						3	2,261	1,951	2,07	2,618	3,595	5
1	2,290	2,054	2,147	2,538	3,123	3	2,261	1,948	2,025	2,505	3,460	5
2	2,291	2,051	2,112	2,492	3,219	3	2,261	1,953	2,031	2,506	3,450	5
3	2,290	2,049	2,110	2,482	3,220	3	2,261	1,953	2,032	2,507	3,450	5

Ітераційний процес зупинено на третьому кроці, оскільки похибка $\sigma = y_i - y_{i-1}$ складає не більше 0,001. На малюнку 2.20. показано схему отриманої ДВК.

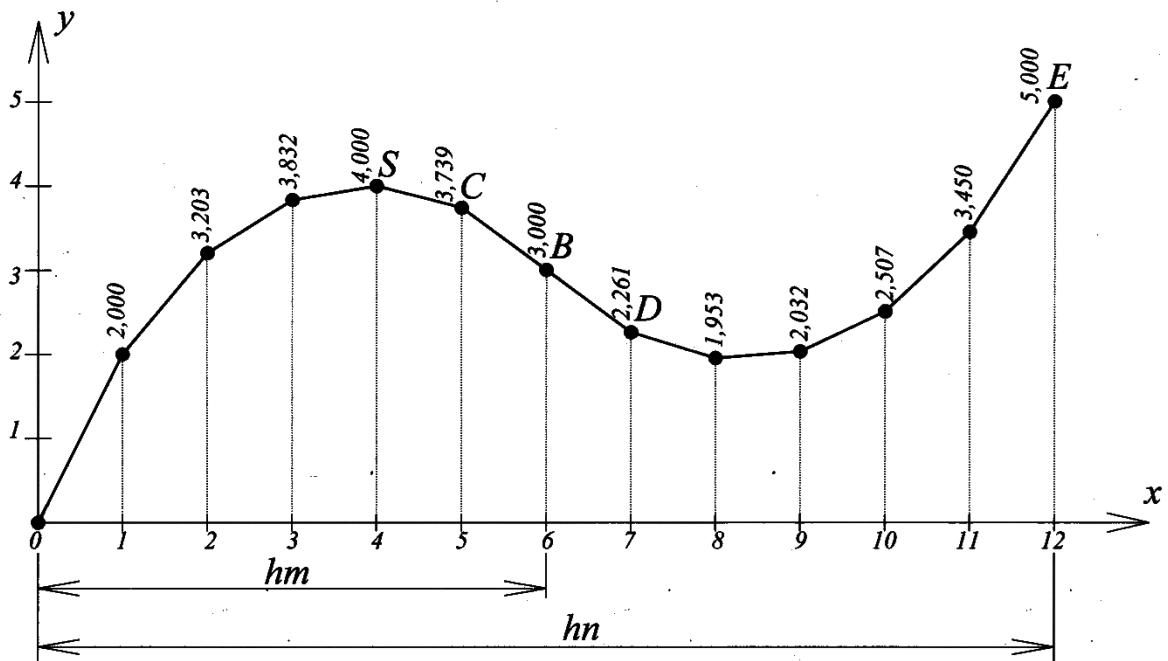


Рис. 2.20. Схема ДВК до прикладу 2.3.3.

Абсциси точок F та G спирання безмоментних розкосів BF і EG на вісь Ox визначаємо з (2.1.31) та (2.1.16).

Зовнішнє навантаження на вузли OSB (2.3.1):

$$kP_1 = 0,574.$$

Зовнішнє навантаження на вузли *BDE* (2.3.1):

$$kP_2 = -0,396.$$

При підстановці значень kP_1 та kP_2 до (2.1.31) отримаємо:

$$x_F^{j+1} = \frac{12}{1,986 + 1,8\sqrt{(x_F^j - 6)^2 + 9}} + 6, \quad (2.3.25)$$

де $k_2 = -0,9$.

Приймаючи за перше наближення $x_F^j = 7$, виконуємо ітераційний процес і отримуємо значення $x_F^{j+1} = 7,496$, для чого знадобилось чотири ітерації.

Для визначення абсциси точки *G* спирання розкоса *EG* на вісь *Ox* приведемо рівняння (2.1.16) у відповідність до рис. 2.20:

$$x_G^{j+1} = nh + \frac{h(n-m-1)y_E}{-y_B - 2(n-m-1)y_E + (2n-2m-1)y_{11} + k_2\sqrt{((n-m)h - x_G^j)^2 + y_E^2}}, \quad (2.3.26)$$

де $k_2 = -0,9$.

При підстановці вихідних умов до (2.3.26), отримаємо:

$$x_G^{j+1} = 12 + \frac{25}{-15,05 - 0,9\sqrt{(6 - x_G^j)^2 + 25}} \quad (2.3.27)$$

За перше наближення x_G^j приймаємо значення $x_{n-1} = 11$. При виконанні ітераційного процесу отримуємо абсцису точки спирання *G* розкосу *EG* на вісь *Ox*: $x_G^{j+1} = 10,827$, для чого знадобилось дві ітерації.

Схема отриманої складеної ДВК з двома безмоментними розкосами представлена на рис.2.21.

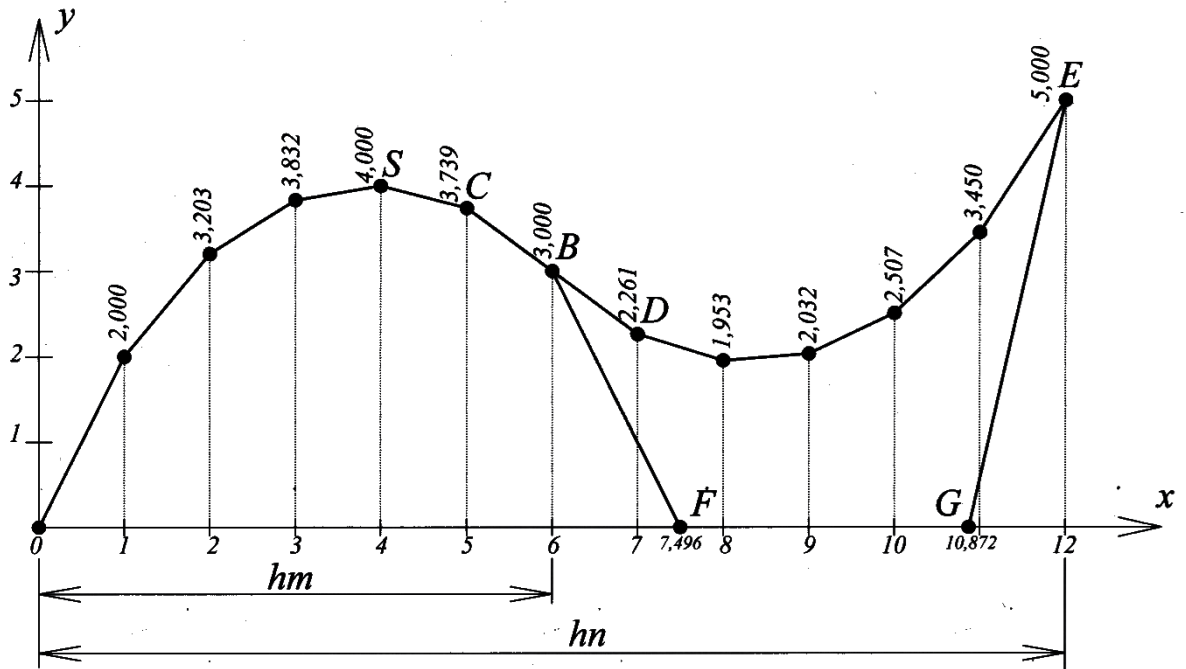


Рис. 2.21. Геометрична схема ДВК з двома безмоментними розкосами до прикладу 2.3.3.

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ:

1. Запропоновані геометричні схеми врівноважених плоских систем, що складаються зі стиснутих арок, розтягнутих ланцюгів та похилих лінійних опор дозволяють конструювати системи, які відповідають вимогам тектонічних конструкцій.
2. Системи, що складаються з двох або більшого числа ланцюгів або арок, у вузлах стикування потребують застосування вертикальних опор. Якщо у складеній системі стикується арка з ланцюгом, проміжна опора набуває вигляду похилого розкосу. Наведені формули дозволяють визначити параметри цього розкосу.
3. Арки або ланцюги у формі параболи другого порядку лише наближено моделюють безмоментні конструкції. Точною моделлю такої конструкції є ланцюгова лінія.
4. Ланцюгова лінія при зовнішньому вертикальному навантаженні має три вільних параметри, що дозволяє її провести через три задані точки, але в аналітичному вигляді це зробити неможливо, оскільки рівняння ланцюгової

лінії є трансцендентним. Тому дискретну множину точок ланцюгової лінії можна визначити лише чисельними методами.

5. Розглянуто два можливі принципи організації ітераційного процесу для визначення дискретної множини точок ланцюгової лінії. За першим принципом послідовно уточнюється довжина ланцюгів дискретно представленої ланцюгової лінії при сталому зовнішньому навантаженні на кожний вузол. За другим принципом при сталому кроці вузлів послідовно уточнюються величини зовнішнього навантаження на кожний вузол. На тестових прикладах показано, що організація ітераційного процесу за другим принципом має кращу сходимість, ніж за першим.

6. Розроблені алгоритми дозволяють моделювати безмоментні конструкції, що складаються з гладкостикованих арок з ланцюгами.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 2: [34, 35, 37, 40, 43]

РОЗДІЛ 3

РІВНОВАГА ВУЗЛІВ, ЩО НАЛЕЖАТЬ ОПОРНОМУ КОНТУРУ СІТКИ ТА АРКАМ СТИКУВАННЯ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ.

При формуванні розтягнутих або стиснутих сіток разом з крайовим контуром та арками стикування сіток при моделюванні комбінованих поверхонь необхідно враховувати неоднаковість зусиль у внутрішніх ребрах сіток та ребрах арок. Як правило, в арках виникають зусилля стиску або розтягнення значно більші, ніж у ребрах сіток. Таку неоднаковість можна врахувати за допомогою відповідних коефіцієнтів у ребрах арки і внутрішніх ребрах сіток. Формування дискретних каркасів поверхонь разом з опорним контуром, як одне ціле, розглядалось тільки для розтягнутих сіток. Рівновага вузлів арок стикування комбінованих поверхонь взагалі не розглядалась. Оперативне управління формою врівноважених сіток може бути досягнуто за допомогою апарата суперпозицій без порушення статичної рівноваги системи.

3.1. Рівняння рівноваги вузлів крайового контура при різноманітних поєднаннях роботи сітки та опорного контура.

Як внутрішні ребра сітки, так і ребра опорного контура можуть бути або розтягнутими, або стиснутими. Звідси виникають різноманітні поєднання зусиль, що прикладені до вузлів опорного контура (табл. 3.1).

Таблиця 3.1.

	1	2	3	4
Внутрішні ребра	розтяг	розтяг	стиск	стиск
Контурні ребра	розтяг	стиск	стиск	розтяг

На рис. 3.1-3.4 показано сітки, які відповідають комбінаціям зусиль у ребрах, наведених у таблиці 3.1 і відповідають топологічній схемі сітки II типу:

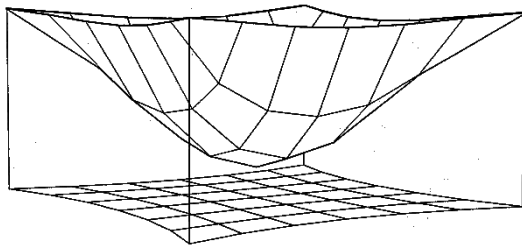
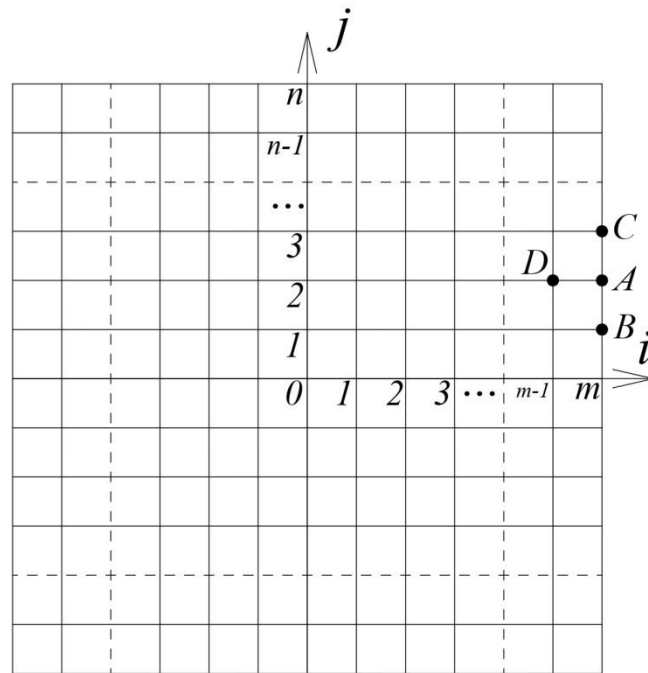


Рис. 3.1. Розтягнута сітка на розтягнутому контурі

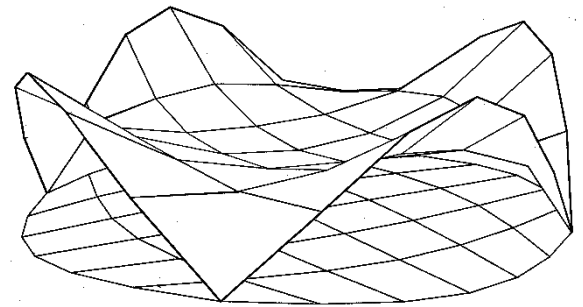


Рис. 3.2. Розтягнута сітка на стиснутому контурі

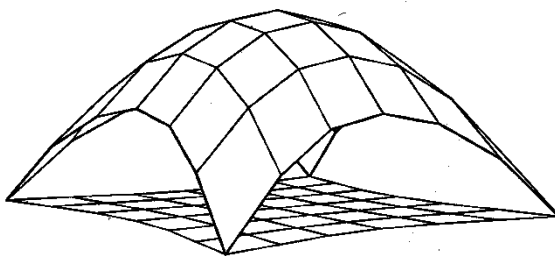


Рис.3.3. Стиснута сітка на стиснутому контурі

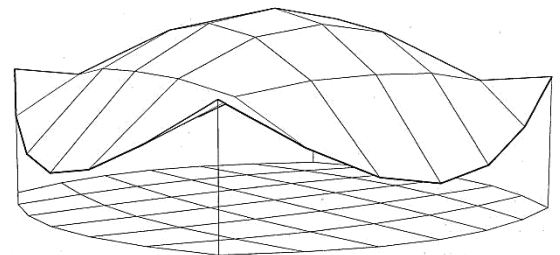


Рис.3.4. Стиснута сітка на розтягнутому контурі

Розглянемо довільний контурний вузол A . На рис. 3.5. вузол A винесено окремо від сітки.

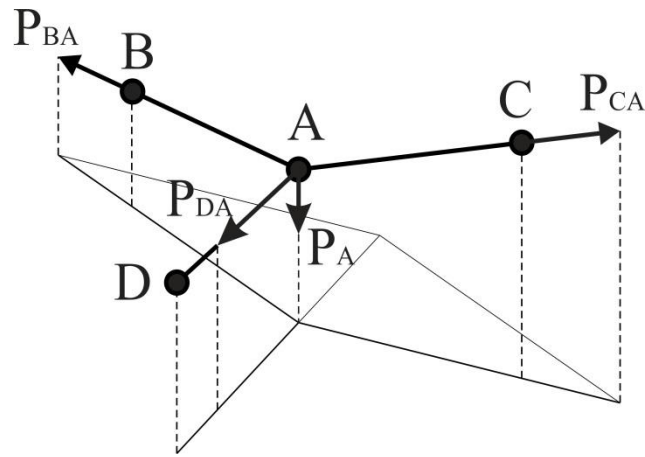


Рис. 3.5. Контурний вузол

Нехай сили у внутрішніх ребрах сітки пропорційні довжинам цих ребер з коефіцієнтом k_1 , а сили в контурних ребрах пропорційні довжинам цих ребер з коефіцієнтом k_2 , де $k_2 > k_1$. Тоді величини сил у ребрах, що сходяться у вузлі A , можна виразити через координати відповідних вузлів:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{BA,u} &= (u_B - u_A)k_2; \\ \bar{P}_{CA,u} &= (u_C - u_A)k_2; \\ \bar{P}_{DA,u} &= (u_D - u_A)k_1,\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

де: u - узагальнене позначення координат x, y, z .

Вузол A перебуває у рівновазі, якщо сума всіх зусиль, прикладених до нього (або сума координатних складових сил), дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{BA,x} + \bar{P}_{CA,x} + \bar{P}_{DA,x} &= 0 \\ \bar{P}_{BA,y} + \bar{P}_{CA,y} + \bar{P}_{DA,y} &= 0 \\ \bar{P}_{BA,z} + \bar{P}_{CA,z} + \bar{P}_{DA,z} + \bar{P}_A &= 0\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

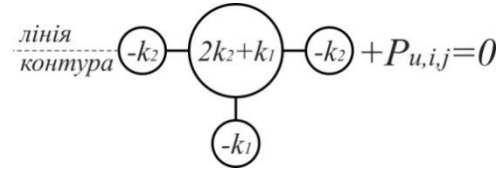
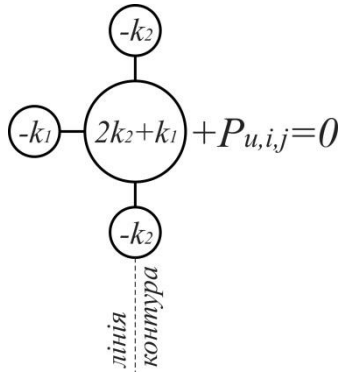
Підставляючи (3.1.1) в (3.1.2), отримаємо рівняння рівноваги вузла A розтягнутої сітки на розтягнутому контурі:

$$\begin{aligned}-2 \cdot k_2 \cdot x_A - k_1 \cdot x_A + k_1 \cdot x_D - k_2 \cdot x_B - k_2 \cdot x_C &= 0 \\ -2 \cdot k_2 \cdot y_A - k_1 \cdot y_A + k_1 \cdot y_D - k_2 \cdot y_B - k_2 \cdot y_C &= 0 \\ -2 \cdot k_2 \cdot z_A - k_1 \cdot z_A + k_1 \cdot z_D - k_2 \cdot z_B - k_2 \cdot z_C + P_A &= 0\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

або у вигляді обчислювального шаблону:

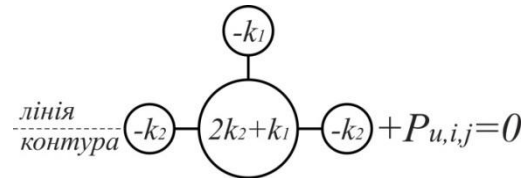
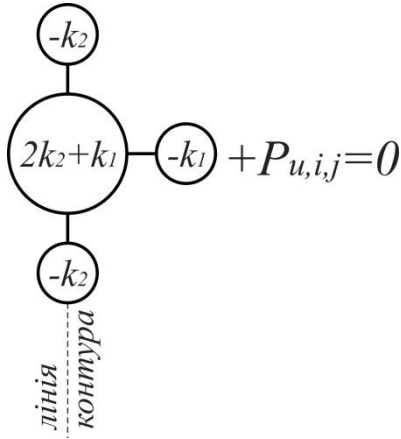
для лінії контура $i=m, j=const.$

для лінії контура $j=n, i=const.$



для лінії контура $i=-m, j=const.$

для лінії контура $j=-n, i=const.$ (3.1.4)



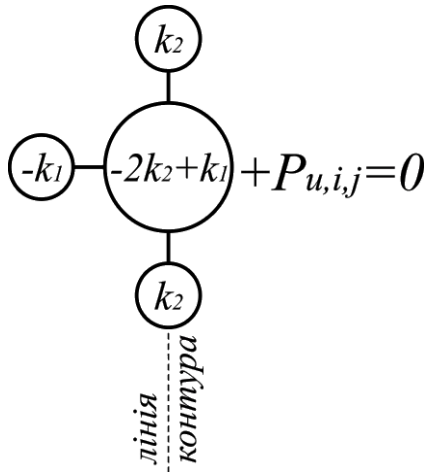
де: $P_{u,i,j}$ - проекція зовнішнього зусилля на осі Ox , Oy та Oz .

Аналогічно можна вивести рівняння рівноваги для інших варіантів комбінацій зусиль у ребрах сіток, представлених в таблиці 3.1:

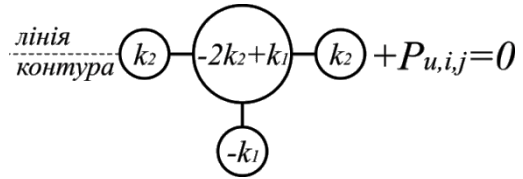
- Для розтягнутої сітки на стиснутому контурі:

для лінії контура $i=m, j=const.$

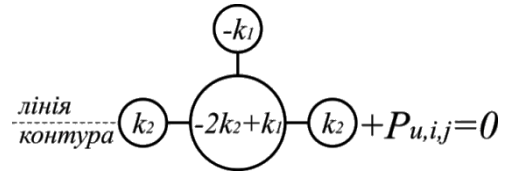
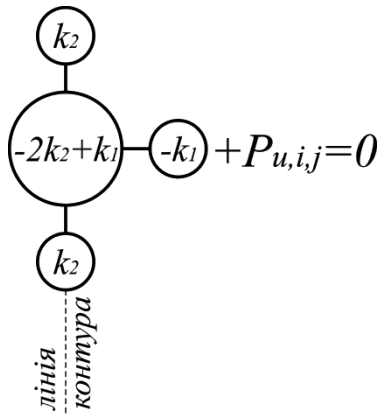
для лінії контура $j=n, i=const.$ (3.1.5)



для лінії контура $i=-m, j=const.$



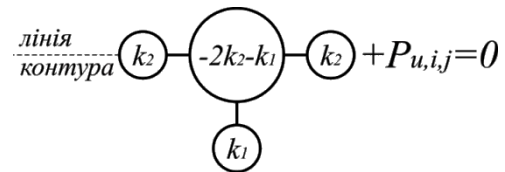
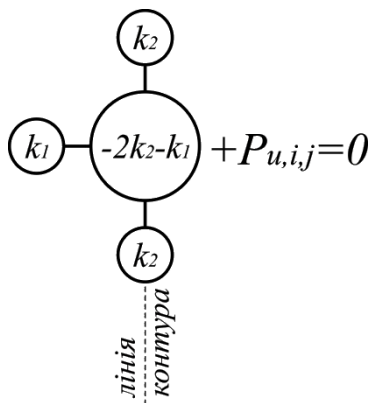
для лінії контура $j=-n, i=const.$



- Для стиснутої сітки на стиснутому контурі:

для лінії контура $i=m, j=const.$

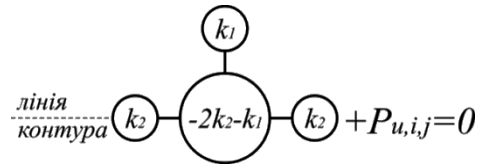
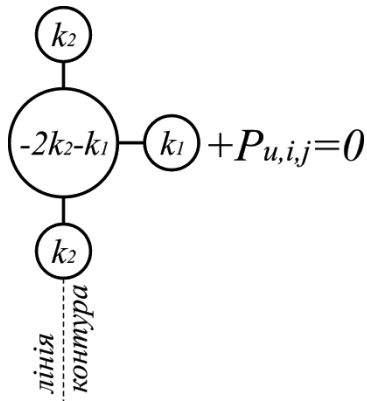
для лінії контура $j=n, i=const.$



(3.1.6)

для лінії контура $i=-m, j=const.$

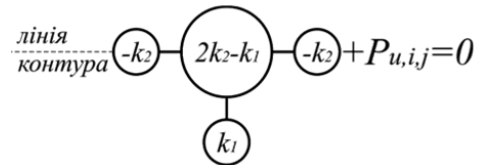
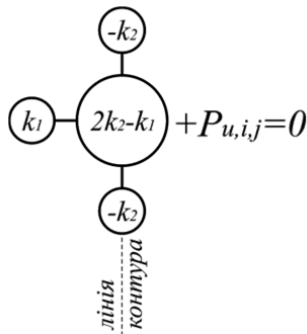
для лінії контура $j=-n, i=const.$



- Для стиснутої сітки на розтягнутому контурі:

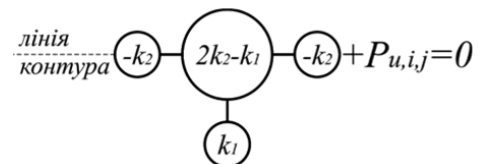
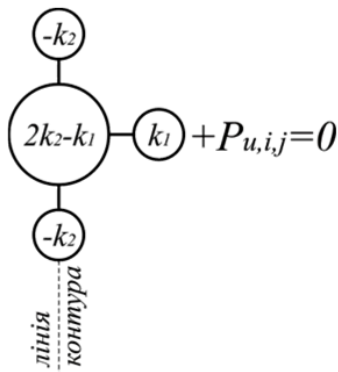
для лінії контура $i=m, j=const.$

для лінії контура $j=n, i=const.$



для лінії контура $i=-m, j=const.$

для лінії контура $j=-n, i=const.$ (3.1.7)



Приклад 3.1.1. Розтягнута сітка на розтягнутому контурі.

Задано координати кутових вузлів розтягнутої сітки на розтягнутому контурі:

$E(2,2,3), F(2,-2,3), G(-2,-2,3), H(-2,2,3)$, апліката центрального вузла

$M(Z_{00}) = 1$, коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах $k_1 = 1$,

коефіцієнт пропорційності зусиль в контурних ребрах $k_2 = 5$. Топологічна схема та нумерація вузлів наведені на рис. 3.6.

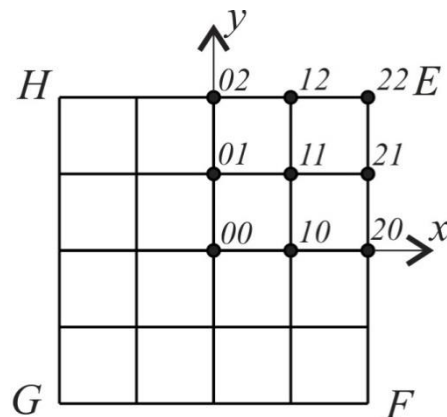


Рис. 3.6. Топологічна схема

За рахунок симетрії сітки [87] систему рівнянь рівноваги можна скоротити, врахувавши симетрію вузлів. Зовнішнє навантаження однакове для внутрішніх і контурних вузлів $P_{i,j} = P$.

Проекції зусиль на вісь Ox :

- рівняння рівноваги внутрішніх вузлів:

$$4x_{10} - x_{20} - 2x_{11} = 0$$

$$4x_{11} - x_{10} - x_{21} - x_{12} = 0$$

- рівняння рівноваги контурних вузлів:

(3.1.8)

$$2k_2x_{20} + k_1x_{20} - k_1x_{10} - 2k_2x_{21} = 0$$

$$2k_2x_{21} + k_1x_{21} - k_1x_{11} - k_2x_{20} - k_2x_{22} = 0$$

$$2k_2x_{12} + k_1x_{12} - k_1x_{11} - k_2x_{22} = 0$$

Оскільки всі вузли симетричні відносно площини $x=y$, то ординати відповідних вузлів дорівнюють абсцисам.

Проекції зусиль на вісь Oz :

- рівняння рівноваги внутрішніх вузлів:

(3.1.9)

$$4z_{00} - 4z_{10} - \frac{P}{k_1} = 0$$

$$4z_{10} - z_{00} - z_{20} - 2z_{11} - \frac{P}{k_1} = 0$$

$$4z_{11} - 2z_{10} - 2z_{21} - \frac{P}{k_1} = 0$$

- рівняння рівноваги контурних вузлів:

$$2k_2 z_{20} + k_1 z_{20} - k_1 z_{10} - 2k_2 z_{21} - \frac{P}{k_1} = 0$$

$$2k_2 z_{21} + k_1 z_{21} - k_1 z_{11} - k_2 z_{20} - \frac{P}{k_1} = 0$$

Результати розв'язання систем (3.1.8) і (3.1.9) наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2.

	<i>i=0</i>	<i>i=1</i>	<i>i=2</i>	
<i>x</i>	0	0,991	2	<i>j=2</i>
<i>y</i>	1,67	1,75	2	
<i>z</i>	2,191	2,396	3	
<i>x</i>	0	0,903	1,75	<i>j=1</i>
<i>y</i>	0,869	0,903	0,991	
<i>z</i>	1,287	1,554	2,396	
<i>x</i>	0	0,869	1,67	<i>j=0</i>
<i>y</i>	0	0	0	
<i>z</i>	1	1,287	2,191	

Згідно з таблицею 3.2 на рис. 3.7 показано аксонометрію розтягнутої сітки на розтягнутому контуру.

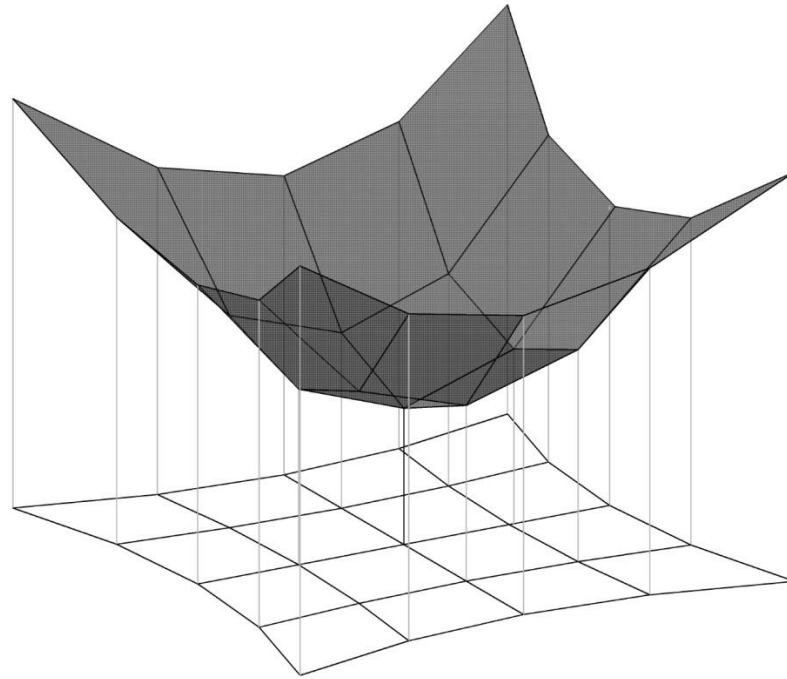


Рис. 3.7. Розтягнута сітка на розтягнутому контурі

Приклад 3.1.2. Розтягнута сітка на стиснутому контурі.

Задано наступні початкові умови: координати кутових вузлів $E(2,2,2)$, $F(2,-2,2)$, $G(-2,-2,2)$, $H(-2,2,2)$, апліката центрального вузла $M(Z_{00}) = 1$, коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах $k_1 = 1$, коефіцієнт пропорційності зусиль у контурних ребрах $k_2 = 5$. Топологічна схема і нумерація вузлів збігаються зі схемою на рис. 3.6.

За допомогою шаблонів (3.1.5) складаємо і розв'язуємо систему рівнянь рівноваги для вузлів розтягнутої сітки на стиснутому контурі (табл. 3.3).

Таблиця 3.3.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	
x	0	$0,984$	2	$j=2$
y	$2,51$	$2,379$	2	
z	$3,441$	$3,047$	2	
x	0	$1,14$	$2,379$	$j=1$
y	$1,198$	$1,14$	$0,984$	
z	$1,499$	$1,774$	$3,047$	

x	0	$1,198$	$2,51$	$j=0$
y	0	0	0	
z	1	$1,499$	$3,441$	

На рис 3.8. показано аксонометрію розтягнутої сітки на стиснутому контурі.

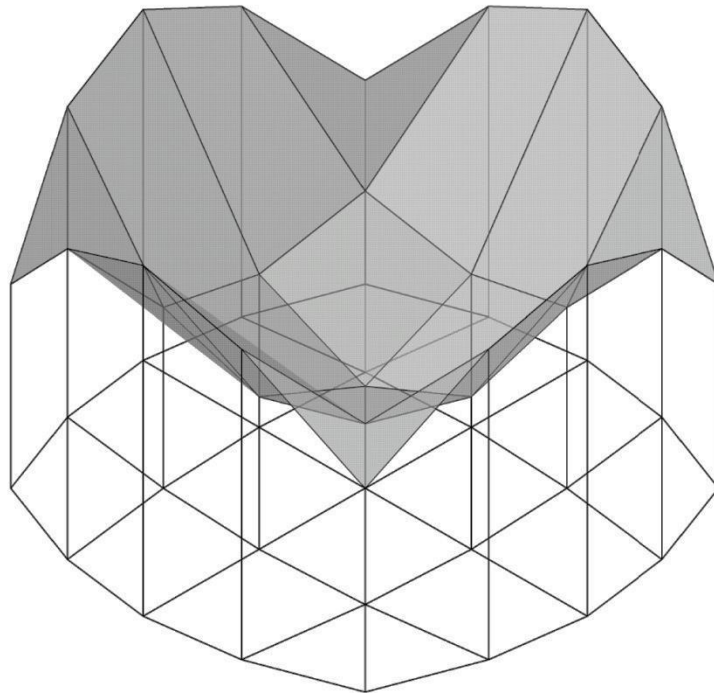


Рис. 3.1.8. Розтягнута сітка на стиснутому контурі

Приклад 3.1.3. Стиснута сітка на стиснутому контурі.

Початкові умови: координати кутових вузлів $E(2,2,0), F(2,-2,0), G(-2,-2,0), H(-2,2,0)$, апліката центрального вузла $M(Z_{00}) = 3$, коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах $k_1 = 1$, коефіцієнт пропорційності зусиль у контурних ребрах $k_2 = 3$. Топологічна схема і нумерація вузлів збігаються зі схемою на рис. 3.6.

За допомогою шаблонів (3.1.6) складаємо і розв'язуємо систему рівнянь рівноваги для вузлів розтягнутої сітки на стиснутому контурі (табл. 3.4).

Таблиця 3.4.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	
x	0	$0,979$	2	$j=2$
y	$1,507$	$1,625$	2	
z	$1,628$	$1,224$	0	
x	0	$0,852$	$1,625$	$j=1$
y	$0,803$	$0,852$	$0,979$	
z	$2,65$	$2,287$	$1,224$	
x	0	$0,803$	$1,507$	$j=0$
y	0	0	0	
z	3	$2,65$	$1,628$	

На рис 3.9. показано аксонометрію стиснутої сітки на стиснутому контурі.

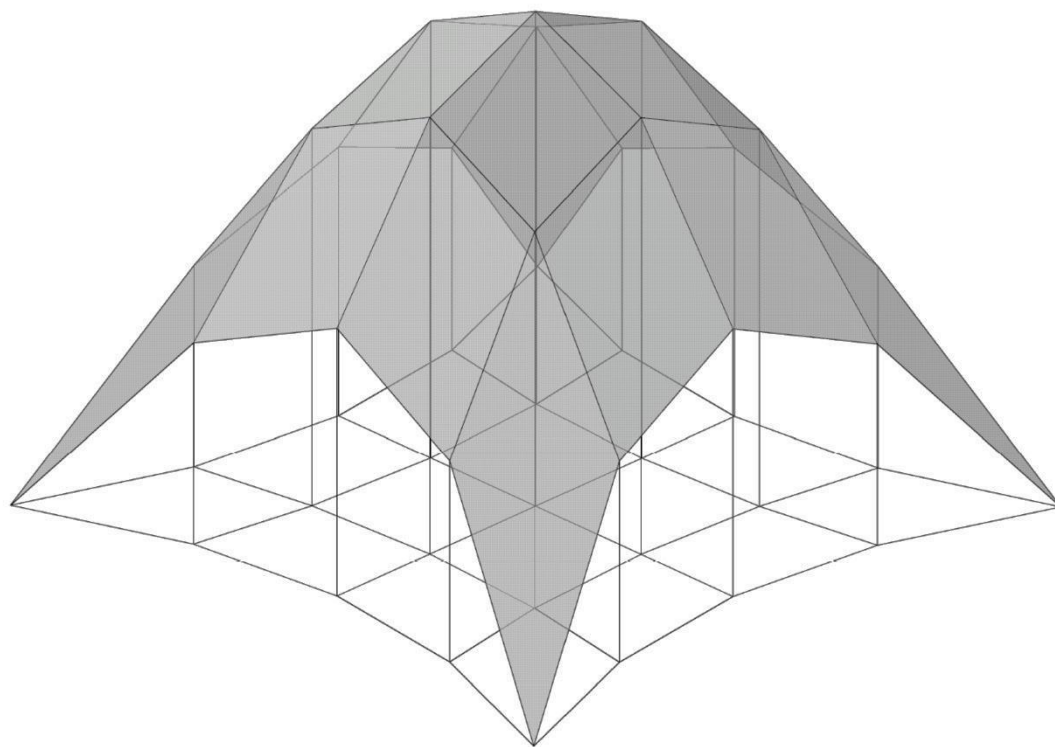


Рис.3.9. Стиснута сітка на стиснутому контурі

Приклад 3.1.4. Стиснута сітка на розтягнутому контурі.

Початкові умови: координати кутових вузлів $E(2,2,2), F(2,-2,2), G(-2,-2,2), H(-2,2,2)$, апліката центрального вузла $M(Z_{00}) = 3$, коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах $k_1 = 1$, коефіцієнт пропорційності зусиль у контурних ребрах $k_2 = 5$.

Топологічна схема і нумерація вузлів збігаються зі схемою на рис. 3.6.

За шаблонами (3.1.7) складено і розв'язано систему рівнянь рівноваги вузлів для стисненої сітки на розтягнутому контурі (табл. 3.5).

Таблиця 3.5.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	
x	0	0,98	2	$j=2$
y	2,51	2,38	2	
z	0,559	0,953	2	
x	0	1,14	2,38	$j=1$
y	1,2	1,14	0,98	
z	2,501	2,226	0,953	
x	0	1,2	2,51	$j=0$
y	0	0	0	
z	3	2,501	0,559	

На рис 3.10. показано аксонометрію стиснутої сітки на розтягнутому контурі.

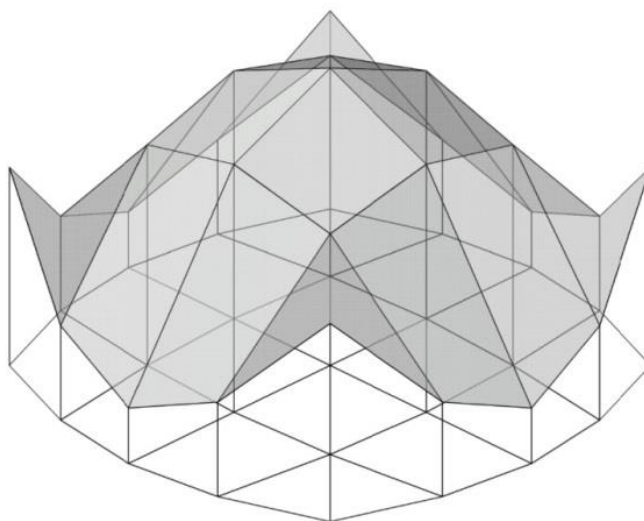


Рис. 3.10. Стиснута сітка на розтягнутому контурі

Описаний спосіб виведення шаблонів для складання рівнянь рівноваги контурних вузлів для різних комбінацій внутрішніх і контурних зусиль (відповідно до табл. 3.1) може бути використаний і для сіток інших топологічних типів.

На рис 3.11. показано топологічну схему сітки I типу (трикутна клітина, шестиребровий вузол (табл. 1.1.)).

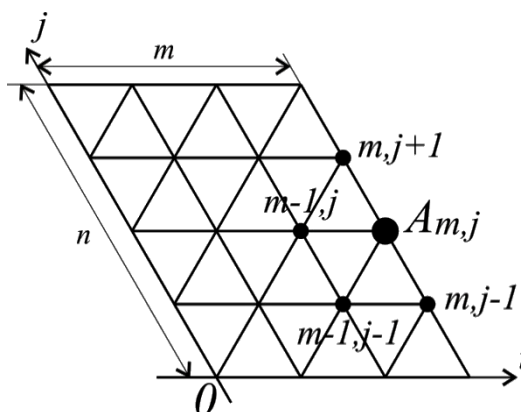


Рис. 3.11. Топологічна схема

Взаємне розташування коефіцієнтів в обчислювальному шаблоні залежить від вибору системи відліку вузлів. Наприклад, обчислювальні шаблони для складання системи рівнянь рівноваги для контурного вузла A

за системою відліку iOj , наведеною на рис. 3.11, з різними комбінаціями зусиль у внутрішніх і контурних ребрах, мають такий вигляд:

- для розтягнутої сітки на розтягнутому контурі:

$$(3.1.10)$$

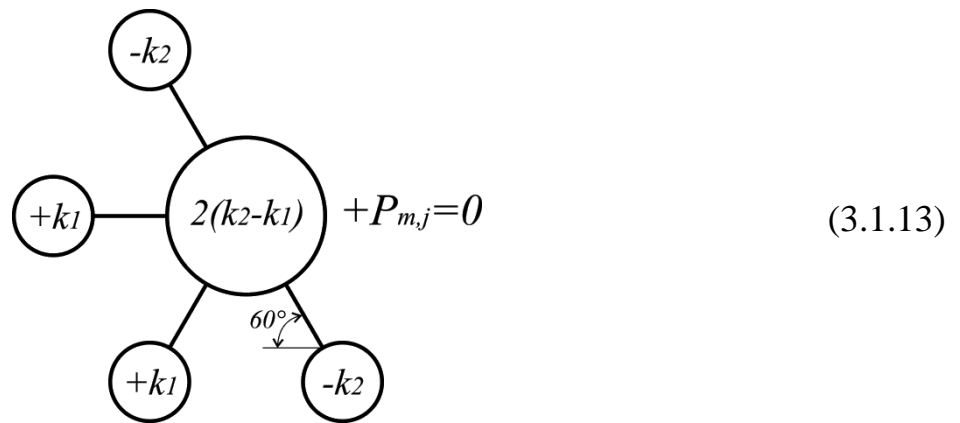
- для розтягнутої сітки на стиснутому контурі:

$$(3.1.11)$$

- - для стиснутої сітки на стиснутому контурі:

$$(3.1.12)$$

- для стиснутої сітки на розтягнутому контурі:



3.2. Формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних комбінованих покриттів.

Результати досліджень підрозділу 3.1 можна узагальнити для моделювання комбінованих врівноважених сіток, які складаються з розтягнутих та стиснутих зон. При цьому, такі зони мають розділятися або стисненою аркою, або розтягнутим вантом, форми яких визначаються також з умови рівноваги. В загальному випадку лінія розділу являє собою дискретну модель просторової кривої, а обчислювальні шаблони для вузлів лінії розділу будуть відрізнятися від обчислювальних шаблонів для визначення вузлів сітки.

Статико-геометричний метод формування дискретних каркасів поверхонь дозволяє отримувати поверхні безмоментних просторових конструкцій у дискретному вигляді при заданому опорному контурі, серед яких можуть бути як розтягнуті, так і стиснуті системи. Формування дискретних каркасів поверхонь разом з опорним контуром, як одне ціле, розглядалось тільки для розтягнутих сіток. У роботі [70] розглядалися геометричні перетворення, які дозволяють варіювати форму розтягнутої сітки без порушення статичної рівноваги системи.

На рис. 3.12. наведено комбіновану систему, частина якої $CDEF$ є стисненою сіткою, а $ABCD$ – розтягнутою. Арки опорного контуру не задані,

а формуються під дією власної ваги та зусиль, що виникають у ребрах сітки. Топологічна схема сітки приведена на рис. 3.13.

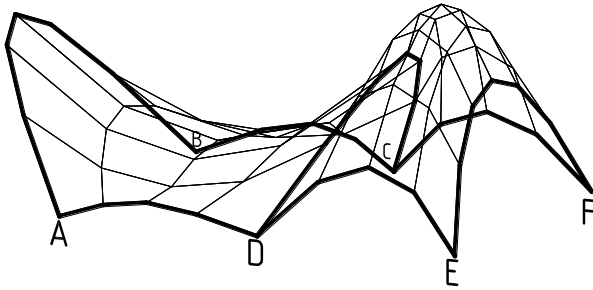


Рис. 3.12. Дискретна модель комбінованої поверхні

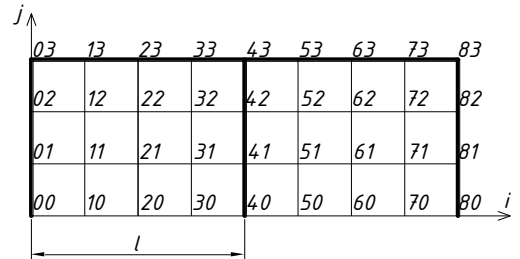


Рис. 3.13. Топологічна схема

Елементами системи є:

1. Сітки $ABCD$ та $CDEF$;
2. Арки опорного контуру AB , BC , AD , DE , CF , EF ;
3. Арка CD стикування поверхонь системи.

Кожен з елементів може знаходитись як у стисненому, так і в розтягнутому стані, що впливає на геометричну форму системи.

Всього в системі може знаходитись не більше 12-ти типів елементів:

1. Стиснена сітка;
2. Розтягнена сітка;
3. Стиснута арка опорного контуру, на яку спирається стиснена сітка;
4. Стиснута арка опорного контуру, на яку спирається розтягнена сітка;
5. Розтягнена арка опорного контуру, на яку спирається стиснута сітка;
6. Розтягнена арка опорного контуру, на яку спирається розтягнена сітка;
7. Стиснута арка стикування стиснутих сіток;
8. Стиснута арка стикування розтягнених сіток;
9. Стиснута арка стикування стиснутої та розтягнутої сіток;
10. Розтягнена арка стикування стиснутих сіток;

11. Розтягнена арка стикування розтягнених сіток;

12. Розтягнена арка стикування стиснутої та розтягнутої сіток.

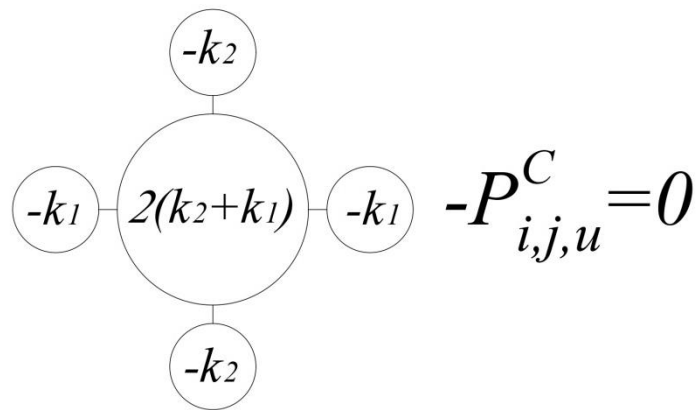
Рівняння рівноваги вузлів та обчислювальні шаблони для перших шести перелічених елементів системи приведені в (3.1.4 – 3.1.7).

Розглянемо побудову обчислювальних шаблонів та складання систем рівнянь рівноваги тільки для вузлів внутрішньої арки, при різних комбінаціях стикування двох сіток, розташування яких відповідає топологічній схемі на рис. 3.13.

- Для стисненої арки стикування стиснених сіток (п. 7):

$$2u_{i,j}(k_1 + k_2) - k_1(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - k_2(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - P_{i,j,u} = 0 \quad (3.2.1)$$

або у вигляді обчислювального шаблону:



де:

u - узагальнене позначення координат x, y, z ;

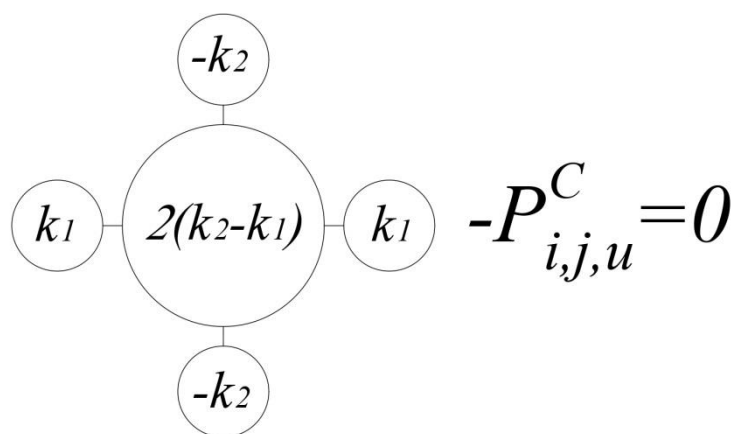
k_1 - коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах сітки та довжин векторів зусиль зовнішнього навантаження;

k_2 - коефіцієнт пропорційності зусиль у внутрішніх ребрах та зусиль у ребрах арки;

$P_{i,j,u}^c$ - проекція вектора зусилля власної ваги у вузлі лінії стикування на вісь Ou ($P_{i,j,x} = P_{i,j,y} = 0$).

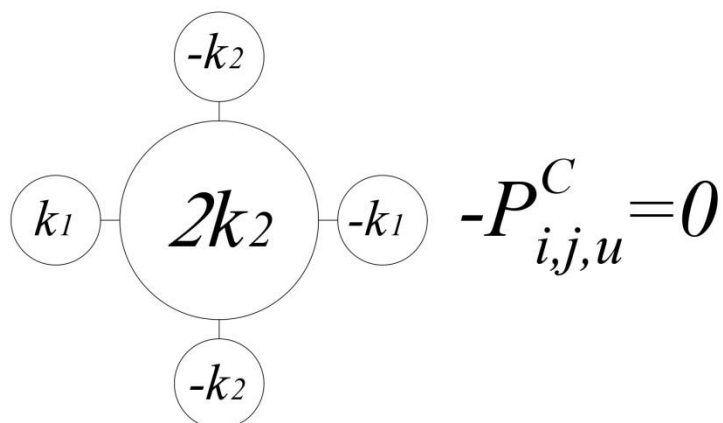
- Для стисненої арки стикування розтягнутих сіток, вздовж лінії $i = const$

$$2u_{l,j}(k_2 - k_1) + k_1(u_{l-1,j} + u_{l+1,j}) - k_2(u_{l,j-1} + u_{l,j+1}) - P_{l,j,u} = 0 \quad (3.2.2)$$



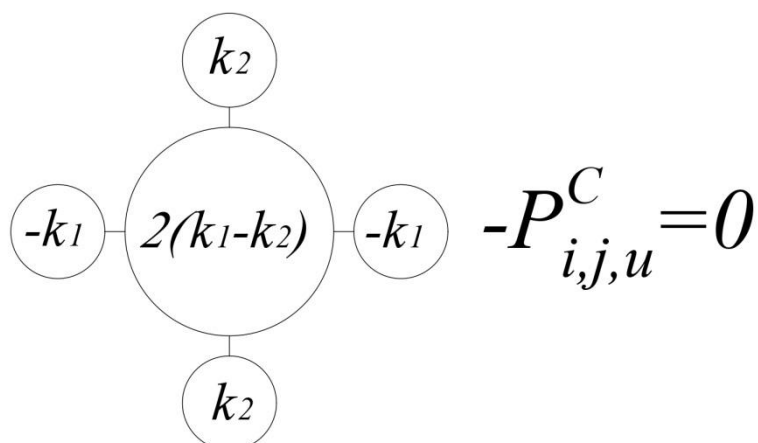
- Для стисненої арки стикування стиснутої та розтягнутої сіток, вздовж лінії $i = const$:

$$k_1(u_{l-1,j} - u_{l+1,j}) + 2k_2u_{l,j} - k_2(u_{l,j-1} + u_{l,j+1}) - P_{l,j,u} = 0 \quad (3.2.3)$$



- Для розтягнутої арки стикування стиснутих сіток, вздовж лінії $i = const$:

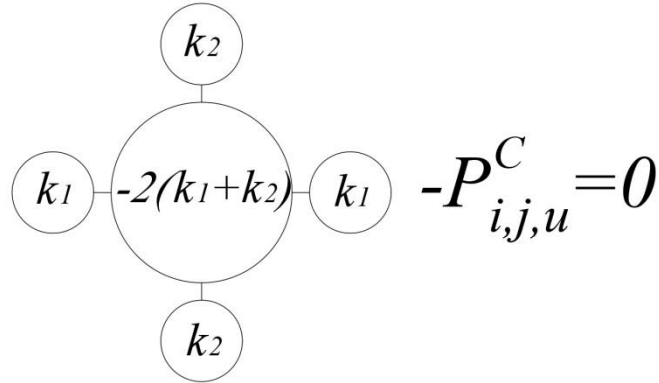
$$2u_{l,j}(k_1 - k_2) - k_1(u_{l-1,j} + u_{l+1,j}) + k_2(u_{l,j-1} + u_{l,j+1}) - P_{l,j,u} = 0 \quad (3.2.4)$$



- Для розтягнутої арки стикування розтягнутих сіток, вздовж лінії

$$i = \text{const} :$$

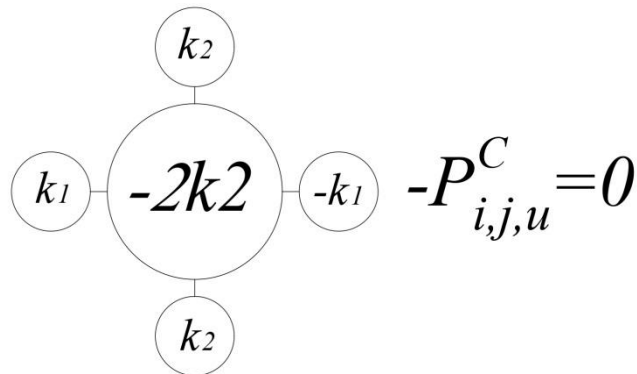
$$-2u_{l,j}(k_1 + k_2) + k_1(u_{l-1,j} + u_{l+1,j}) + k_2(u_{l,j-1} + u_{l,j+1}) - P_{l,j,u} = 0 \quad (3.2.5)$$



- Для розтягнутої арки стикування стиснутої та розтягнутої сіток,

$$\text{вздовж лінії } i = \text{const} :$$

$$k_1(u_{l-1,j} - u_{l+1,j}) - 2k_2u_{l,j} + k_2(u_{l,j-1} + u_{l,j+1}) - P_{l,j,u} = 0 \quad (3.2.6)$$



Виходячи з вищенаведеного, можна сформулювати наступну властивість: для розтягнутого елемента коефіцієнт у обчислювальному шаблоні приймає додатне значення, а для стиснутого – від’ємне, що відповідає загальноприйнятому позначенню розтягнення та стиску в механіці [55]. Коефіцієнт у центральному колі шаблону визначається як сума коефіцієнтів в прилеглих колах, з протилежним знаком, що відповідає правилу складання обчислювальних операторів в методі скінченних різниць [76]. Вибір коефіцієнтів в прилеглих колах шаблону, при різних комбінаціях стиску-розтягу елементів, наочно представлено на рис. 3.14.

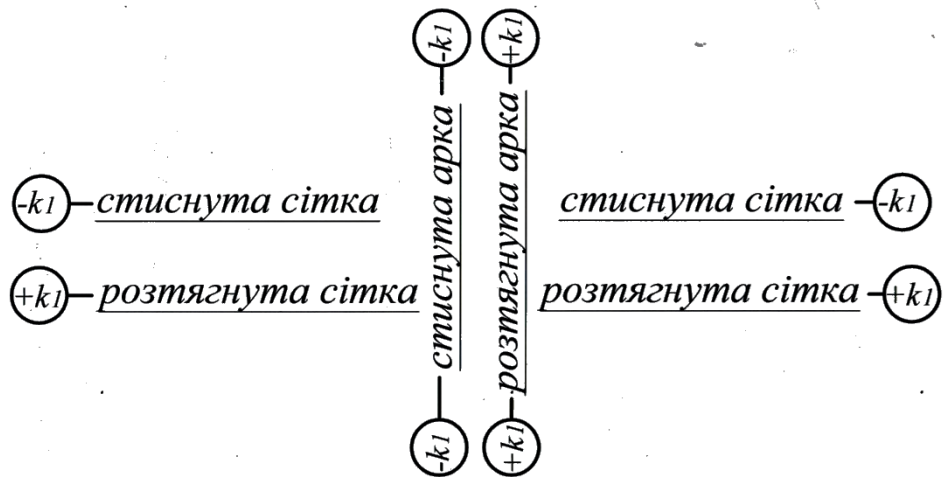


Рис. 3.14. Схема організації обчислювальних шаблонів.

Приклад 3.2.1. На рис. 3.15. представлено схему комбінованої системи, яка складається зі стиснутої та розтягнутої сіток, стиснутих арок опорного контуру та стиснутої арки стикування стиснутої та розтягнутої сіток.

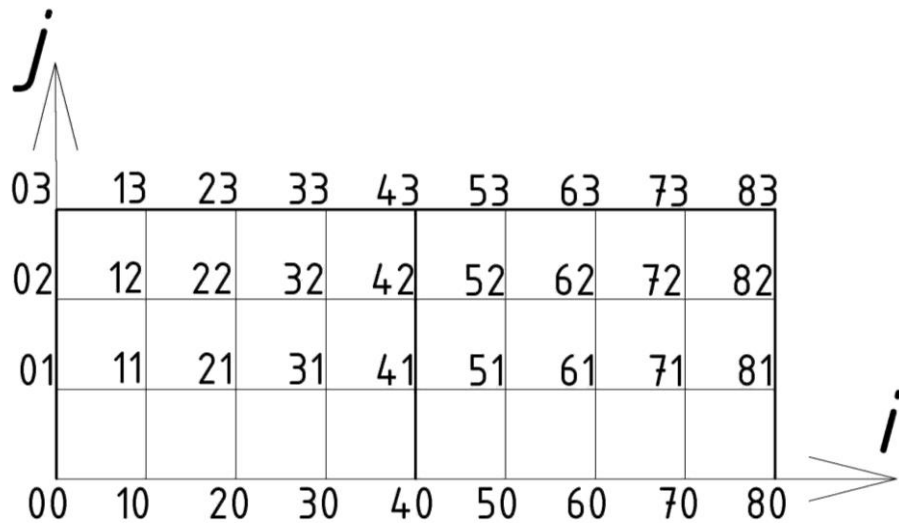


Рис. 3.15. Топологічна схема комбінованої системи до прикладу 3.2.1.

Вихідними умовами є:

1. координати вузлів $x_{00} = 0$, $x_{43} = 4$, $x_{83} = 8$, $y_{00} = y_{10} = \dots = y_{80} = 0$,
 $y_{03} = y_{43} = y_{83} = 3$, $z_{00} = z_{40} = 3$, $z_{03} = z_{43} = z_{83} = 0$, $z_{20} = 1$, $z_{60} = 4$.
2. коефіцієнти натягу:
 - у внутрішніх вузлах сіток $k_1 = 1$;

- у вузлах арки стикування $k_2 = 6$;
- у вузлах контурних арок $k_3 = 4$.

Власна вага у вузлах розтягнутої сітки (P_1), у вузлах стиснутої сітки (P_2), в арках зовнішнього контуру (P^k), в арці стикування (P^c) невідома і визначається при розв'язанні системи рівнянь рівноваги відносно z .

Використовуючи обчислювальні шаблони, які було представлено раніше, складаємо систему рівнянь рівноваги для всіх невідомих вузлів, відносно x , y та z .

Результати обчислень наведено в табл. 3.6.

Таблиця 3.6.

j		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
3	x	0	1.11	2.07	2.99	4	5.09	6.07	7.03	8
	y	3	3.49	3.67	3.49	3	2.69	2.59	2.69	3
	z	0	0.42	0.59	0.42	0	1.06	1.41	1.05	0
2	x	-1.21	0.48	1.94	3.35	4.91	5.50	6.20	6.94	7.63
	y	1.95	2.20	2.29	2.20	1.95	1.84	1.80	1.85	1.98
	z	1.59	0.80	0.60	0.81	1.63	2.54	2.83	2.47	1.47
1	x	-2	0.06	1.85	3.58	5.47	5.79	6.31	6.89	7.43
	y	0.96	1.07	1.11	1.07	0.96	0.93	0.92	0.94	0.98
	z	2.64	1.27	0.87	1.28	2.65	3.47	3.70	3.34	2.36
0	x	-2.27	-0.08	1.82	3.66	5.65	5.90	6.34	6.84	7.37
	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	z	3	1.47	1	1.47	3	3.78	4	3.63	2.65

Аксонетрію комбінованої системи представлено на рис.3.16.

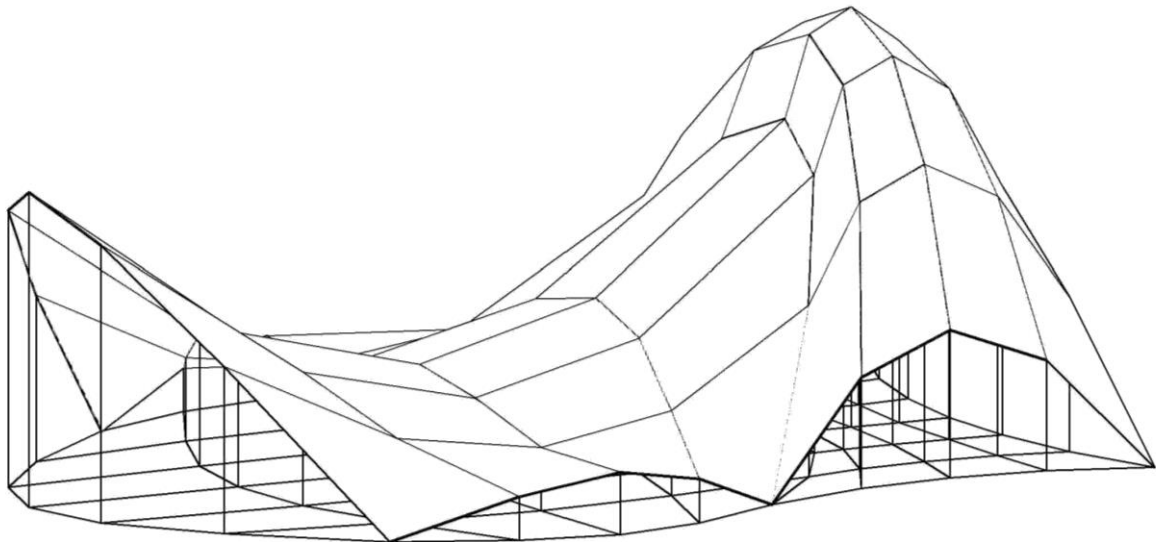


Рис. 3.16. Дискретна модель комбінованої системи.

3.3. Керування формою врівноважених комбінованих систем

Під суперпозицією функцій розуміють утворення складної функції як результат алгебраїчних дій над двома або кількома простими функціями. Якщо прості функції задано дискретно, тобто дискретним набором точок, виникає поняття суперпозиції точок. У подальшому під суперпозицією точок будемо розуміти визначення координат результуючої точки при складанні відповідних координат заданих точок з певними ваговими коефіцієнтами:

$$U_A = k_1 U'_A + k_2 U''_A + \dots + k_n U^n_A, \quad (3.3.1)$$

де U_A - відповідна координата точки ;

k_i - вагові коефіцієнти координат точок, що додаються.

Така суперпозиція врівноважених дискретних структур передбачає виконання певних умов і правил.

Умова 1. При функціональному додаванні ДПП сітки, що додається, повинні бути топологічно однаковими відносно даного простору (ізотопними) [77]. При цьому повинна бути встановлена відповідність між елементами результуючої структури і кожної з структур, що додаються. У

суперпозиції дискретних врівноважених структур присутні не тільки координати вершин структури, а й вектори зусиль, які виникають у ребрах структури та зусиль зовнішнього навантаження на вершини.

Зазначимо, що ізотопними дискретними образами або комплексами є такі комплекси, які містять відповідні ізотопні клітини.

Умова 2. У врівноважених системах відношення довжини ребра до довжини вектора зусилля в цьому ребрі у відповідних ребрах повинні бути однаковими. Тільки у такому випадку зусилля натягіння або стиску кожного ребра в результаті функціонального додавання стане зусиллям у зазначеному ребрі. У цьому випадку початок і кінець вектору зусилля у ребрі AB (рис.3.17.) повинні належати цьому ребру як у складових суперпозиції, так і в результаті суперпозиції.

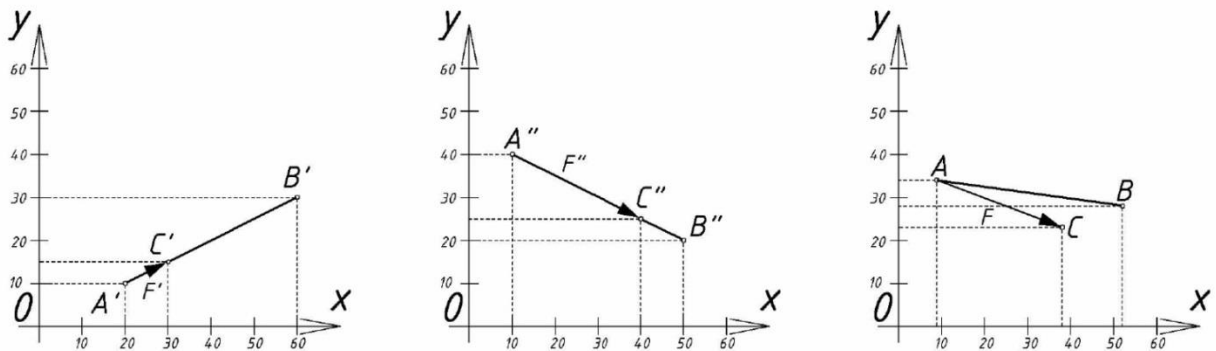


Рис. 3.17. Суперпозиція ребер структури з різними коефіцієнтами.

Розглянемо це на прикладі функціонального додавання двох доданків ребра AB , у площині XOY , вздовж якого діє зусилля F . Тоді в результаті суперпозиції вершина C зусилля повинна належати AB :

$$\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} = \frac{Y_C - X_A}{Y_C - Y_A}. \quad (3.3.2)$$

Нехай коефіцієнт відношення довжини вектора зусилля до довжини ребра у першому доданку має коефіцієнт t_1 , а у другому – t_2 . Тоді:

$$\begin{aligned}
X'_C - X'_A &= t_1(X'_B - X'_A); \\
Y'_C - Y'_A &= t_1(Y'_B - Y'_A); \\
X''_C - X''_A &= t_2(X''_B - X''_A); \\
Y''_C - Y''_A &= t_2(Y''_B - Y''_A).
\end{aligned}
\tag{3.3.3}$$

В результаті суперпозиції отримаємо:

$$\begin{aligned}
X_B - X_A &= k_1(X'_B - X'_A) + k_2(X''_B - X''_A); \\
Y_B - Y_A &= k_1(Y'_B - Y'_A) + k_2(Y''_B - Y''_A).
\end{aligned}
\tag{3.3.4}$$

При підстановці (3.3.3) і (3.3.4) до (3.3.2) отримаємо:

$$\frac{k_1(X'_B - X'_A) + k_2(X''_B - X''_A)}{k_1(Y'_B - Y'_A) + k_2(Y''_B - Y''_A)} = \frac{k_1 t_1 (X'_B - X'_A) + k_2 t_2 (X''_B - X''_A)}{k_1 t_1 (Y'_B - Y'_A) + k_2 t_2 (Y''_B - Y''_A)}.
\tag{3.3.5}$$

Вираз (3.3.5) може бути тотожністю тільки у випадку $t_1 = t_2$.

Умова 3. Для того, щоб координати заданого вузла після функціонального додавання залишилися незмінними, сума вагових коефіцієнтів функціонального додавання при кожній координаті повинна дорівнювати одиниці (рис. 3.18.).

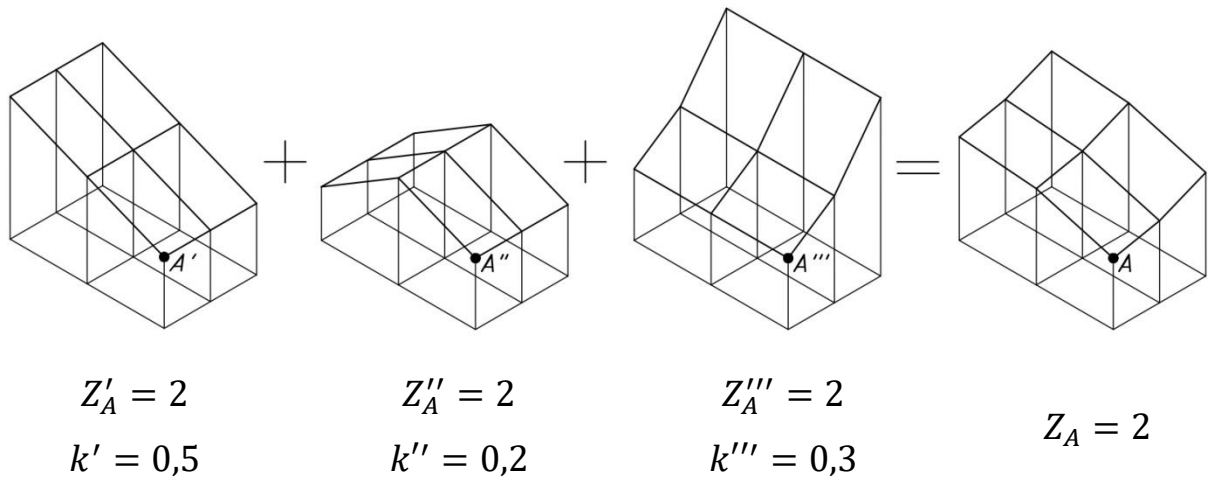


Рис. 3.18. Суперпозиція точок з однаковими координатами.

Нехай вузол A у структурах, що додаються, має однакові координати:

$$U'_A = U''_A = U'''_A = \dots = U^n_A.
\tag{3.3.6}$$

Потрібно, щоб у результаті суперпозиції систем координата цього вузла залишилась незмінною:

$$U_A = k_1 U'_A = k_2 U''_A = k_3 U'''_A = \dots = k_n U^n_A.
\tag{3.3.7}$$

Якщо

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = 1, \quad (3.3.8)$$

маємо:

$$U_A(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n) = U_A. \quad (3.3.9)$$

Ця умова дозволяє змінювати форму структури, залишаючи незмінними координати деяких вершин. Наприклад, можна варіювати форму врівноваженої сітки на заданому опорному контурі.

Умова 4. Число сіток, що додаються, повинно бути на одиницю більше, ніж число параметрів управління формою, оскільки система рівнянь для визначення вагових коефіцієнтів дорівнює числу вузлів, аплікати яких задано, плюс одне рівняння (3.3.8).

Умова 5. Якщо врівноважена структура формується під дією власної ваги, то параметрами управління формою можуть бути лише аплікати окремих вузлів або вершин, оскільки при зміні інших координат цих вузлів (абсцис і ординат) зовнішнє навантаження не буде вертикальним.

Властивість. Суперпозиція врівноважених систем сил є також врівноваженою. Ця властивість стає очевидною, якщо врівноважені системи сил, що додаються, уявити у вигляді замкнених багатокутників. Тоді результатом буде також замкнений багатокутник, що є ознакою рівноваги системи сил. Використання апарату суперпозиції для управління формою тентових покриттів було застосовано в роботі Ч.Х. Хая, але не всі з вищенаведених умов розглядалися. По перше, не було враховано зовнішнє навантаження на вузли сітки, оскільки розглядалися тільки розглянуті сітки, де зовнішнє навантаження на вузли не розглядалось.

По друге, не було прийнято до уваги умову 2, що привело до отримання результатів у вигляді неврівноважених систем.

Приклад 3.3.1. Покажемо приклад управління формою сітки, яку показано на рис. 3.19. за рахунок зміни аплікати центрального вузла. Згідно з сформульованими умовами доданками повинні бути дві сітки з однаковою топологією і однаковими співвідношеннями коефіцієнтів натягіння або

стиску відповідно у внутрішніх і контурних ребрах. Таким вимогам відповідають сітки у прикладах 3.1.2 і 3.1.4.

Таку сітку можна вважати як розтягнуту на стиснутому контурі або як стиснуту сітку на розтягнутому контурі.

За додаткову вимогу приймемо, що аплікати кутових вузлів залишились такі, як у прикладі 3.1.4 ($Z_{22} = 2$). Тоді аплікати вузлів плоскої сітки також повинні дорівнювати $Z_{i,j} = 2$.

Апліката центрального вузла результуючої сітки буде:

$$Z_{00} = k_1 Z'_{00} + k_2 Z''_{00}, \quad (3.3.10)$$

де Z' і Z'' - відповідно аплікати центральних вузлів сіток-доданків;

k_1, k_2 – вагові коефіцієнти функціонального додавання.

Аплікати кутових вузлів сіток-доданків однакові

$$Z'_E = Z''_E = 2; Z'_F = Z''_F = 2; Z'_G = Z''_G = 2; Z'_H = Z''_H = 2.$$

Для того, щоб у результаті функціонального додавання не змінились аплікати цих вузлів, згідно з умовою 3, додамо $k_1 + k_2 = 1$.

Тоді:

$$k_1 = \frac{z_{00} - z''_{00}}{z'_{00} - z''_{00}}; k_2 = \frac{-z_{00} + z'_{00}}{z'_{00} - z''_{00}}. \quad (3.3.11)$$

У відповідності до (3.3.10) апліката довільного вузла результуючої сітки дорівнюватиме:

$$z_{i,j} = \frac{z'_{i,j}(z_{00} - z''_{00}) - z''_{i,j}(z_{00} - z'_{00})}{z'_{00} - z''_{00}}, \quad (3.3.12)$$

де $z'_{i,j}, z''_{i,j}$ - аплікати вузлів відповідно першої і другої сіток, що додаються;

z_{00} - параметр управління формою.

У таблиці 3.7. у перших двох рядках наведено аплікати вузлів сіток-доданків. У трьох наступних рядках таблиці 3.7. наведено аплікати вузлів сіток, отриманих у результаті функціонального додавання, які розраховано за формулою (3.3.12) при $z_{00} = 1,5$; $z_{00} = 2,5$; $z_{00} = 3,5$.

На рисунку 3.19 показано сітки, які отримано в результаті функціонального додавання

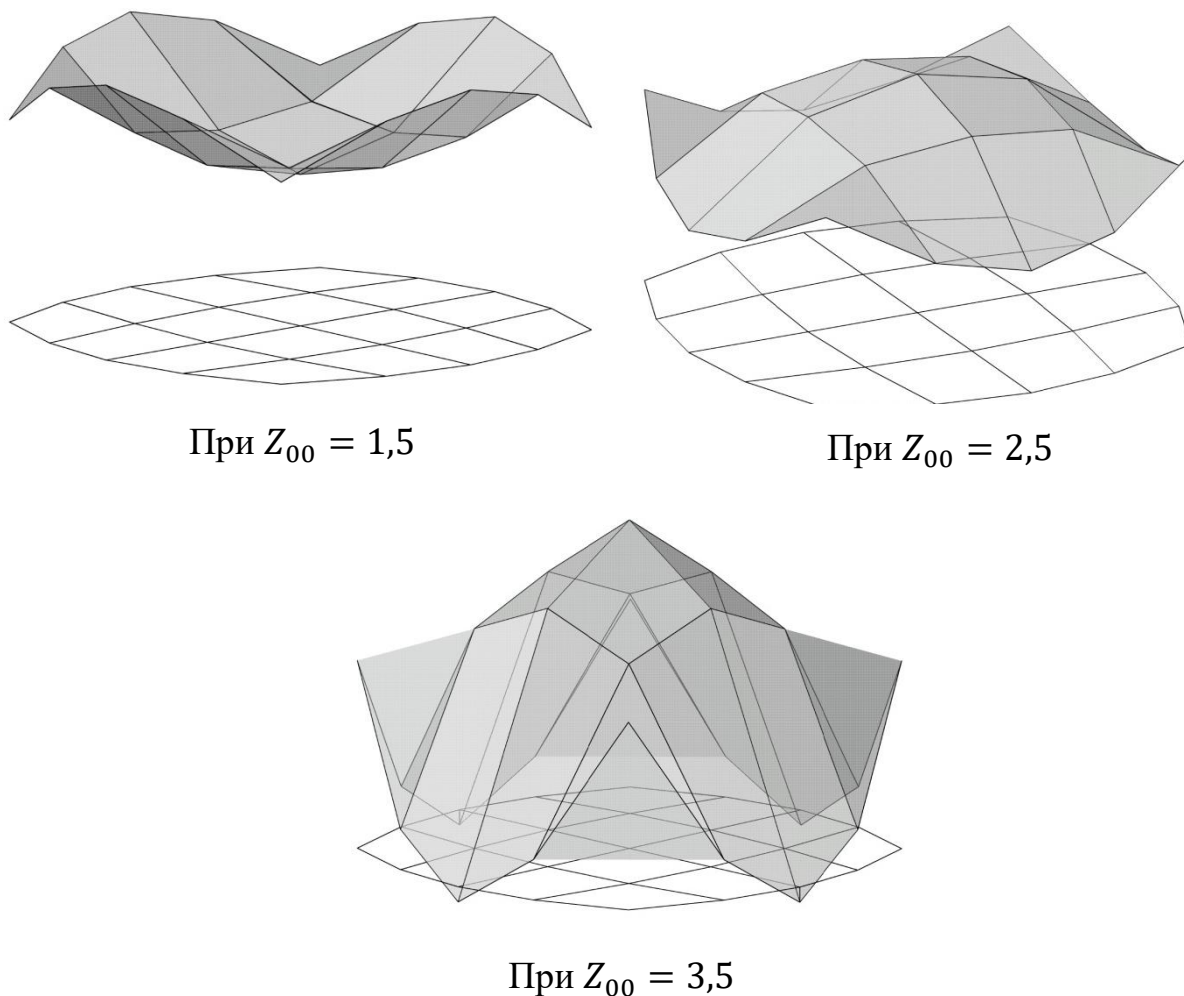


Рис. 3.19. Результат суперпозиції двох сіток.

Таблиця 3.7.

	z_{00}	z_{10}	z_{20}	z_{11}	z_{21}	z_{22}
Сітка (приклад 3.1.4)	3	2,501	0,559	2,226	0,953	2
Плоска сітка	2	2	2	2	2	2
Суперпозиція при $z_{00} = 1,5$	1,5	1,75	2,72	1,887	2,5235	2
Суперпозиція при $z_{00} = 2,5$	2,5	2,25	1,28	2,113	1,476	2
Суперпозиція при $z_{00} = 3,5$	3,5	2,752	-0,161	2,339	0,43	2

Приклад 3.3.2. Показати можливість управління формою сітки, яку показано на рис. 3.1.8 або рис. 3.1.10, якщо параметрами управління формою є аплікати двох вузлів (центральный вузол сітки та центральный вузол арки контура спірання). Згідно зі сформульованими умовами число сіток-доданків повинно бути на одиницю більше параметрів управління формою. За додаткову приймаємо вимогу, щоб аплікати кутових вузлів сітки залишалися незмінними. Топологія сіток-доданків, а також коефіцієнти натягіння або стиску відповідних ребер сітки повинні бути однаковими. Дві сітки-доданка візьмемо з прикладів 3.1.2 і 3.1.4, які відповідають зазначеним вимогам. Аплікати вузлів третьої сітки розрахуємо з умови $Z_{00} = 1,5$ і $Z_{20} = 5$. Тоді аплікати вузлів цієї сітки визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 4z_{10} + kP_1 - 6 &= 0 \\
 -4z_{10} + 2z_{11} + kP_1 + 6,5 &= 0 \\
 2z_{10} + 4z_{11} + 2z_{21} + kP_1 &= 0 \\
 z_{10} - 10z_{21} + kP_2 + 45 &= 0 \\
 z_{11} + 9z_{21} + kP_2 - 35 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.3.13}$$

де: kP_1 - зовнішнє навантаження на внутрішні вузли сітки;

kP_2 - зовнішнє навантаження на вузли контура спірання.

Результати розв'язання системи (3.3.13) наведено в таблиці 3.8. Абсциси і ординати всіх вузлів трьох сіток-доданків однакові, оскільки проекція зусиль зовнішнього навантаження на координатну площину xOy дорівнює нулю.

Табл. 3.8.

$i \backslash j$	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=2$	5	4,194	2
$j=1$	2,188	2,503	4,194
$j=0$	1,5	2,188	5

Вагові коефіцієнти функціонального додавання визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 1 \\ z_1 &= k_1 z_1' + k_2 z_1'' + k_3 z_1''' \\ z_2 &= k_1 z_2' + k_2 z_2'' + k_3 z_2''' \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

де z_1 і z_2 – аплікати результуючої сітки;

$z_1', z_1'', z_1''', z_2', z_2'', z_2'''$ - аплікати відповідних вузлів сіток-доданків.

Розв'язання системи (3.3.14) дає результат:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{z_1(z_2'' - z_2''') + z_1''(z_2''' - z_2) + z_1'''(z_2 - z_2'')}{z_1'(z_2'' - z_2''') + z_1''(z_2''' - z_2') + z_1'''(z_2' - z_2'')} \\ k_2 &= \frac{z_1(z_2''' - z_2') + z_1'(z_2 - z_2''') + z_1''(z_2' - z_2)}{z_1'(z_2'' - z_2''') + z_1''(z_2''' - z_2') + z_1'''(z_2' - z_2'')} \\ k_3 &= \frac{z_1'(z_2'' - z_2) + z_1''(z_2 - z_2') + z_1(z_2' - z_2'')}{z_1'(z_2'' - z_2''') + z_1''(z_2''' - z_2') + z_1'''(z_2' - z_2'')} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

При підстановці відповідних заданих аплікат сіток-доданків до (3.3.15) отримаємо результуючу сітку, де z_{00} і z_{20} – є параметрами управління формою.

При $z_{00}=2,5$, а $z_{20} = 4$ відповідно до (3.3.15) результатом буде :

$$k_1 = -0,6451; \quad k_2 = 0,4516 \quad k_3 = 1,1935.$$

При $z_{00} = 2$, а $z_{20} = 5$:

$$k_1 = -0,4871; \quad k_2 = 0,171; \quad k_3 = 1,3161.$$

Аплікати вузлів результуючих сіток отримаємо при підстановці визначених коефіцієнтів до (3.3.14).

Результати розрахунків наведено в таблиці 3.8. і 3.9.

За даними цих таблиць отримані сітки показано на рис. 3.20.

Таблиця 3.8.

$i \backslash j$	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=2$	4	3,4703	2

$j=1$	2,774	2,848	3,4703
$j=0$	2,5	2,774	4

Таблиця 3.9.

$i \backslash j$	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=2$	5	4,1985	2
$j=1$	2,5771	2,8107	4,1985
$j=0$	2	2,5771	5

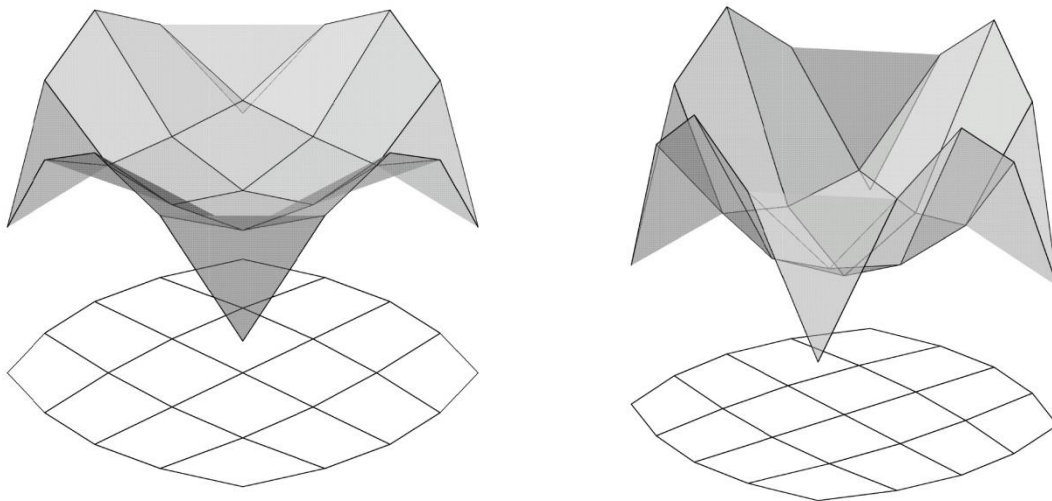


Рис. 3.20. Результат суперпозиції сіток з двома заданими вузлами.

ВИСНОВКИ ПО ТРЕТЬОМУ РОЗДІЛУ

1. Виведені рекурентні формули рівноваги вузлів крайового контура сітки дозволили скласти математичну модель сітки, що моделює врівноважені тектонічні форми.

2. Виведені рекурентні формули рівноваги вузлів ліній стикування комбінованих поверхонь покриттів дозволили скласти математичну модель таких покриттів, що мають стиснуті і розтягнуті зони у різних сполученнях.

3. Рекурентні формули рівноваги вузлів крайового контура та ліній стикування розтягнутої та стиснутої сітки, які виведено у загальному вигляді, дозволяють довільно обирати співвідношення коефіцієнтів натягнення або стиску проміжних внутрішніх ребер сітки, ребер ліній стикування та ребер крайового контура.

4. Застосування апарата суперпозицій для визначення координат вузлів врівноважених сіток дозволяє оперативно керувати формою цих сіток без складання і розв'язання систем рівнянь рівноваги вузлів.

5. Сформовані умови, що обмежують застосування апарата суперпозицій, дозволили керувати формою поверхонь покриттів, що формуються під дією власної ваги покриття.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 3: [36, 38, 39, 41]

РОЗДІЛ 4.

ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ БЕЗМОМЕНТНОГО ТЕКТОНІЧНОГО ПОКРИТТЯ СТАЛОЇ ТОВЩИНИ З СТАЛИМ ПЕРЕРІЗОМ ОПОРНИХ АРОК.

Зовнішнє навантаження на вузли дискретної моделі безмоментного покриття складається з власної ваги елементів поверхні і елементів опорних арок. Власна вага покриття в межах однієї клітини залежить від площі клітини, товщини покриття і об'ємної ваги матеріалу.

Власна вага елемента опорної арки в межах однієї клітини залежить від довжини цього елемента і площі його поперечного перерізу і також від об'ємної ваги матеріалу.

Тоді навантаження на вузли сітки не буде однаковим, оскільки площі клітин і довжини ребер вздовж опорних арок будуть різними. Тому розрахунки координат вузлів сіток у розділах 2 і 3 є наближеними, оскільки зовнішнє навантаження на вузли не пов'язувалось із зазначеними параметрами.

4.1. Розподіл власної ваги елементів покриття між вузлами сітки.

Для того, щоб можна було описати зовнішнє навантаження в загальному вигляді, потрібно ввести нумерацію ребер і клітин дискретної сітки.

Для сітки з чотирикутними клітинами їх будемо нумерувати індексами лівого нижнього вузла на топологічній схемі (рис. 4.1). Наприклад, площа клітини $ABCD$, буде позначатись $S_{2,j-1}$.

Для триангуляційної сітки номер клітини будемо позначати індексами вузла, що є прямокутною вершиною трикутника згідно з топологічною схемою на рис.4.2, причому клітина, що має дві інші вершини з індексами, більшими за індекси вершини при прямому куті клітини, будемо позначати зі

штрихом у вигляді верхнього індексу, а клітину, що має менші індекси при інших вершинах, будемо позначати з верхнім індексом у вигляді двох штрихів. Наприклад, площі клітин EFH і FGH позначимо відповідно: $S'_{i-1,j-1}$ і $S''_{i,j}$.

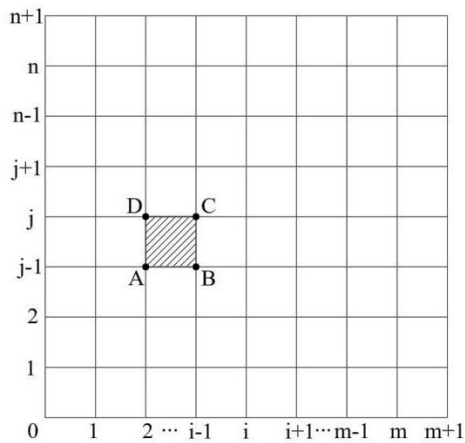


Рис. 4.1. Позначення чотирикутної клітини сітки.

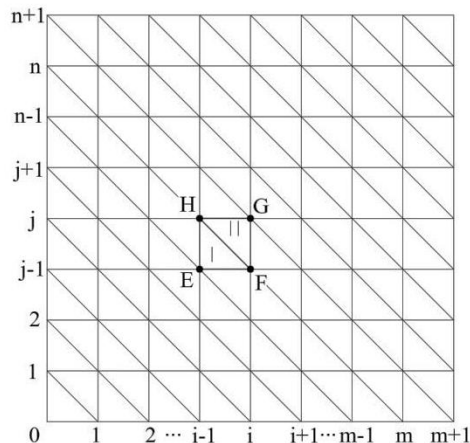


Рис. 4.2. Позначення трикутної клітини сітки.

Ребра сітки будемо нумерувати згідно з номерами двох вершин, що належать цьому ребру, у вигляді нижніх і верхніх індексів. Наприклад, довжину ребра AB на рис. 4.1. позначимо $l_{2,j-1}^{i-1,j-1}$, а довжину ребра EH на рис. 4.2. позначимо $l_{i-1,j-1}^{i-1,j}$.

На похибки, що виникають у результаті визначення координат вузлів дискретного каркаса поверхні безмоментного покриття постійної товщини, істотно впливає правильність розподілу власної ваги покриття між вузлами сітки. Власна вага елемента покриття, яка враховується як зовнішнє зусилля, діюче на вузол сітки для покриття постійної товщини, повинна бути пропорційною площі елемента:

$$P = S \cdot \delta \cdot \nu, \tag{4.1.1}$$

де S – площа елемента покриття, що відноситься до проміжного вузла сітки;

δ - товщина покриття;

ν – об’ємна вага матеріалу покриття.

Якщо величини δ і ν є сталими для даного покриття, їх можна замінити сталим коефіцієнтом.

Тоді формула (4.1.1) спрощується:

$$P = k' \cdot S, \quad (4.1.2)$$

де $k' = \delta \cdot \nu$.

Припустимо, що власна вага кожної клітини рівномірно розподіляється між вузлами цієї клітини, тоді власна вага покриття, що діє на проміжний вузол сітки з чотирикутними клітинами, складається з чверті ваги чотирьох клітин, що належать цьому вузлу:

$$P''_{i,j} = \frac{P_{i,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j+1} + P_{i+1,j+1}}{4} \quad (4.1.3)$$

Власна вага, що діє на проміжний вузол сітки з трикутними клітинами:

$$P = \frac{P'_{i,j} + P''_{i,j} + P'_{i-1,j} + P''_{i-1,j} + P'_{i,j-1} + P''_{i,j-1}}{3} \quad (4.1.4)$$

Власна вага ребер опорних арок з поперечним перерізом сталої площі обох типів сіток (з чотирикутними та трикутними клітинами) з сталим параметром i або j буде:

$$Q_{i,0} = \frac{k''_{i,0}(l_{i-1,0}^{i,0} + l_{i+1,0}^{i,0})}{2} \quad (4.1.5)$$

$$Q_{i,n} = \frac{k''_{i,n}(l_{i-1,n}^{i,n} + l_{i+1,n}^{i,n})}{2} \quad (4.1.6)$$

$$Q_{i,j} = \frac{k''_{i,j}(l_{0,j-1}^{0,j} + l_{0,j+1}^{0,j})}{2} \quad (4.1.7)$$

$$Q_{m,j} = \frac{k''_{m,j}(l_{m,j-1}^{m,j} + l_{m,j+1}^{m,j})}{2} \quad (4.1.8)$$

$$Q_{i,r} = \frac{k''_{i,r}(l_{i-1,r}^{i,r} + l_{i+1,r}^{i,r})}{2} \quad (4.1.9)$$

$$Q_{q,j} = \frac{k''_{q,j}(l_{q,j-1}^{q,j} + l_{q,j+1}^{q,j})}{2} \quad (4.1.10)$$

де k'' - добуток об'ємної ваги матеріалу і площі поперечного перерізу арки;

l – довжина елемента арки в межах однієї клітини.

Для сітки з трикутними клітинами власна вага ребер, що розміщені в діагональному напрямі на топологічній схемі (рис. 4.3.), визначається за формулою:

$$Q_{i,j} = \frac{k''_{i,a-i}(l_{i-1,j+1}^{i,j} + l_{i+1,j-1}^{i,j})}{2}, \quad (4.1.11)$$

де a – параметр діагонального напрямку.

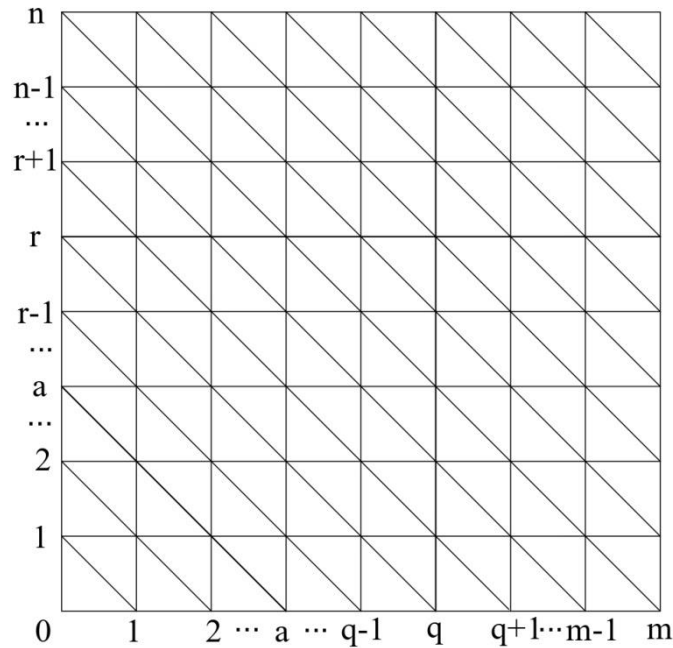


Рис. 4.3. Топологічна схема сітки з трикутними клітинами.

Навантаження на вузол опорного контура для сітки з чотирикутними клітинами складається частково з власної ваги клітин, що належать цьому вузлу, і частково з власної ваги двох ребер, які також належать цьому вузлу:

$$Q''''_{0,j} = \frac{P_{0,j-1} + P_{0,j}}{4} + \frac{Q_{0,j-1}^{0,j} + Q_{0,j}^{0,j}}{2}; \quad (4.1.12)$$

$$Q''''_{m,j} = \frac{P_{m-1,j-1}}{4} + \frac{Q_{m,j-1}^{m,j} + Q_{m,j}^{m,j+1}}{2} \quad (4.1.13)$$

$$Q''''_{i,0} = \frac{P_{i-1,0} + P_{i,0}}{4} + \frac{Q_{i-1,0}^{i,0} + Q_{0,j}^{i+1,0}}{2}; \quad (4.1.14)$$

$$Q''''_{i,n} = \frac{P_{i-1,n-1} + P_{i,n-1}}{4} + \frac{Q_{i-1,n}^{i,n} + Q_{i,n}^{i+1,n}}{2}; \quad (4.1.15)$$

Аналогічно для контурних вузлів сітки з трикутними клітинами:

$$Q_{0,j-1}''' = \frac{P'_{0,j-1} + P'_{0,j} + P''_{1,j}}{3} + \frac{Q_{0,j-1}^{0,j} + Q_{0,j}^{0,j+1}}{2}; \quad (4.1.16)$$

$$Q_{m,j}''' = \frac{P'_{m,j} + P'_{m,j+1} + P''_{m-1,j}}{3} + \frac{Q_{m,j-1}^{m,j} + Q_{m,j}^{m,j+1}}{2}; \quad (4.1.17)$$

$$Q_{i,0}''' = \frac{P''_{i-1,0} + P'_{i,1} + P''_{i,0}}{3} + \frac{Q_{i-1,0}^{i,0} + Q_{i,0}^{i+1,0}}{2} \quad (4.1.18)$$

$$Q_{i,n}''' = \frac{P'_{i,n} + P''_{i,n-1} + P'_{i+1,n}}{3} + \frac{Q_{i-1,n}^{i,n} + Q_{i,n}^{i+1,n}}{2} \quad (4.1.19)$$

Для контурних вузлів у діагональному напрямі для сітки з трикутними клітинами:

$$Q_{i,j}''' = \frac{P'_{i,j} + P'_{i+1,j} + Q_{i-1,j+1}^{i,j} + Q_{i+1,j-1}^{i,j}}{2}, \quad (4.1.20)$$

або

$$Q_{i,j}''' = \frac{P'_{i,j} + P'_{i,j-1} + Q_{i-1,j+1}^{i,j} + Q_{i,j}^{i+1,j-1}}{2} \quad (4.1.21)$$

Навантаження на вузли арки стикування двох поверхонь для сітки з чотирикутними клітинами:

$$j=r \quad Q_{i,r}^{IV} = \frac{P_{i-1,r-1} + P_{i-1,r} + P_{i,r+1} + P_{i,r-1}}{4} + \frac{Q_{i-1,r}^{i,r} + Q_{i,r}^{i+1,r}}{2} \quad (4.1.22)$$

$$i=q \quad Q_{q,j}^{IV} = \frac{P_{q-1,j-1} + P_{q,j-1} + P_{q-1,j} + P_{q,j}}{4} + \frac{Q_{q,j+1}^{q,j} + Q_{i,j}^{q,j-1}}{2} \quad (4.1.23)$$

Аналогічно для сітки з трикутними клітинами:

$$i=q \quad Q_{q,j}^{IV} = \frac{P_{q-1,j-1} + P_{q,j-1} + P_{q-1,j} + P_{q,j}}{4} + \frac{Q_{q,j+1}^{q,j} + Q_{q,j+1}^{q,j}}{2} \quad (4.1.24)$$

$$j=r \quad Q_{i,r}^{IV} = \frac{P'_{i,r} + P''_{i,r} + P'_{i-1,r} + P''_{i,r+1} + P''_{i+1,r} + P'_{i,r-1}}{3} + \frac{Q_{i-1,r}^{i,r} + Q_{i-1,r+1}^{i,r} + Q_{i,r+1}^{i,r} + Q_{i+1,r}^{i,r} + Q_{i+1,r-1}^{i,r} + Q_{i,r-1}^{i,r}}{2} \quad (4.1.25)$$

У діагональному напрямі для сітки з трикутними клітинами:

$$Q_{i,j}^{IV} = \frac{P'_{i,j} + P''_{i,j} + P''_{i-1,j} + P'_{i,j+1} + P'_{i+1,j} + P''_{i,j-1}}{3} + \frac{Q_{i,j}^{i-1,j} + Q_{i,j}^{i-1,j+1} + Q_{i,j}^{i,j+1} + Q_{i,j}^{i+1,j} + Q_{i,j}^{i+1,j-1} + Q_{i,j}^{i,j-1}}{2} \quad (4.1.26)$$

4.2 Формування триангуляційної сітки для моделювання форми покриття з урахуванням параметрів клітин і ребер опорних арок

При формуванні точкових каркасів поверхонь у розділах 3.1-3.3 зовнішнє навантаження в усіх вузлах приймалось однаковим при різних площах клітин сітки. Таке спрощення не впливає істотно на точність розрахунків тільки для пологих покриттів.

Якщо умову (4.1.1) врахувати при формуванні системи рівнянь рівноваги вузлів сітки, то кожне рівняння стає нелінійним, оскільки площа елемента поверхні, що моделюється, є нелінійною функцією від невідомих координат вузлів.

Тому для зменшення такої похибки пропонується використати алгоритм, який був запропонований в роботах Даніловської Н.О., в основі якого лежить ітераційний процес покрокового уточнення аплікату вузлів сітки.

Цей алгоритм було розроблено тільки для формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних оболонок із заданим опорним контуром на сітці з чотирикутними клітинами. Для того, щоб використати цей алгоритм для дискретного моделювання комбінованих покриттів з безмоментними опорними арками, він має бути дороблений та удосконалений.

Для організації ітераційного процесу необхідно задати вихідне наближення сітки.

Покажемо формування вихідного наближення на тестовому прикладі:

Приклад 4.2.1. Задано топологічну схему сітки у вигляді правильного шестикутника зі стороною 4 умовні одиниці (рис. 4.4.).

Задано координати вузлів спирання арок:

$$X_{60} = 4; Y_{60} = 0; Z_{60} = 0$$

$$X_{-2,0} = -4; Y_{-2,0} = 0; Z_{-2,0} = 0$$

$$X_{24} = 2; Y_{24} = 3,464; Z_{24} = 0$$

$$X_{-2,4} = -2; Y_{-2,4} = 3,464; Z_{-2,4} = 0$$

$$X_{2,-4} = -2; Y_{2,-4} = -3,464; Z_{2,-4} = 0$$

$$X_{6,-4} = 2; Y_{6,-4} = -3,464; Z_{6,-4} = 0$$

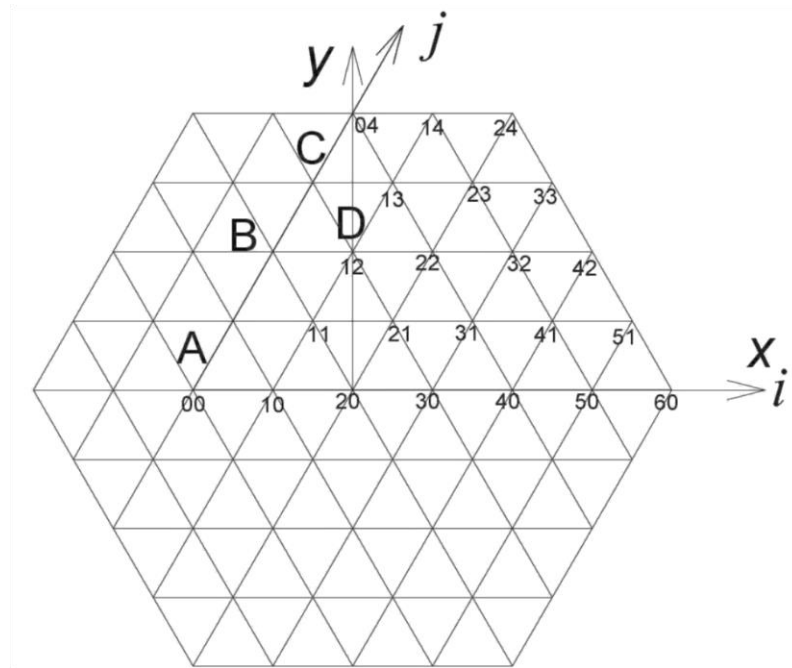


Рис. 4.4. Топологічна схема.

Для того, щоб у системах рівнянь рівноваги вузлів не було від'ємних індексів, за початок відліку візьмемо точку $A(X_A = -2; Y_A = 0)$ (рис. 4.4.). Задамо також умовну вагу оболонки у межах однієї клітини $P = -0,3$ та умовну вагу елемента опорного контура в межах клітини $Q = -10,5$. Тоді згідно з (4.1.4) навантаження на внутрішні вузли сітки дорівнює:

$$P''' = 2P = -0,6, \quad (4.2.1)$$

а навантаження на вузол опорного контура згідно з (4.1.16-4.1. 19);

$$Q''' = Q + P = -10,8 \quad (4.2.2)$$

Нехай дискретною моделлю поверхні покриття буде розтягнута сітка зі стисненим опорним контуром. Причому зусилля стиску у ребрах опорного контуру задаємо у вісім разів більше, ніж зусилля розтягіння у внутрішніх

ребрах сітки. Тоді, з урахуванням розробок розділу 2, рівняння рівноваги вузлів сітки будуть у вигляді трьох систем:

1. проекції зусиль у ребрах сітки на вісь Ox :

$$\begin{aligned}
 2X_{21} - 6X_{30} + 2X_{31} + X_{40} &= 0; \\
 X_{30} + 2X_{31} - 6X_{40} + 2X_{41} + X_{50} &= 0; \\
 X_{40} + 2X_{41} - 6X_{50} + 2X_{51} + 4 &= 0; \\
 -7X_{21} + X_{22} + X_{30} + X_{31} &= 0; \\
 X_{21} + X_{22} + X_{30} - 6X_{31} + X_{32} + X_{40} + X_{41} &= 0; \\
 X_{31} + X_{32} + X_{40} - 6X_{41} + X_{42} + X_{50} + X_{51} &= 0; \\
 X_{13} + X_{21} - 6X_{22} + X_{23} + X_{31} + X_{32} &= 0 \\
 X_{22} + X_{23} + X_{31} - 6X_{32} + X_{33} + X_{41} + X_{42} &= 0 \\
 -7X_{13} + X_{14} + X_{22} + X_{23} &= 0 \\
 X_{13} + X_{14} + X_{22} - 6X_{23} + X_{32} + X_{33} + 2 &= 0 \\
 X_{41} - 8X_{42} + X_{50} + 14X_{51} - 32 &= 0 \\
 X_{32} - 8X_{33} + X_{41} + 14X_{42} - 8X_{51} &= 0 \\
 X_{23} + X_{32} + 14X_{33} - 8X_{42} - 16 &= 0 \\
 X_{13} + X_{23} + 14X_{14} - 16 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

2. проекції зусиль у ребрах сітки на вісь Oy :

$$\begin{aligned}
 Y_{12} - 5Y_{21} + Y_{22} + Y_{31} &= 0; \\
 Y_{21} + Y_{22} - 6Y_{31} + Y_{32} + Y_{41} &= 0; \\
 Y_{31} + Y_{32} - 6Y_{41} + Y_{42} + Y_{51} &= 0; \\
 Y_{21} + Y_{22} - 3Y_{12} + Y_{13} &= 0; \\
 Y_{12} + Y_{13} + Y_{21} - 6Y_{22} + Y_{23} + Y_{31} + Y_{32} &= 0; \\
 Y_{22} + Y_{23} + Y_{31} - 6Y_{32} + Y_{33} + Y_{41} + Y_{42} &= 0; \\
 Y_{04} + Y_{12} - 5Y_{13} + Y_{14} + Y_{22} + Y_{23} &= 0; \\
 Y_{13} + Y_{14} + Y_{22} - 6Y_{23} + Y_{32} + Y_{33} + 3,464 &= 0; \\
 Y_{41} - 8Y_{42} + 14Y_{51} &= 0; \\
 Y_{32} - 8Y_{33} + Y_{41} + 14Y_{42} - 8Y_{51} &= 0; \\
 Y_{23} + Y_{32} + 14Y_{33} - 8Y_{42} - 27,712 &= 0;
 \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$-8Y_{04} + Y_{13} + 14Y_{14} + Y_{23} - 27,712 = 0;$$

$$7Y_{04} + Y_{13} - 8Y_{14} = 0;$$

3. проекції зусиль у ребрах сітки на вісь Oz :

$$6Z_{30} - 6Z_{20} - 0,6 = 0;$$

$$Z_{20} - 4Z_{30} + 2Z_{31} + Z_{40} - 0,6 = 0;$$

$$Z_{30} + 2Z_{31} - 6Z_{40} + 2Z_{41} + Z_{50} - 0,6 = 0;$$

$$Z_{40} + 2Z_{41} - 6Z_{50} + 2Z_{51} - 0,6 = 0;$$

$$2Z_{30} - 6Z_{31} + 2Z_{40} + 2Z_{41} - 0,6 = 0;$$

$$Z_{31} + Z_{40} - 5Z_{41} + Z_{42} + Z_{50} + Z_{51} - 0,6 = 0;$$

$$Z_{41} - 8Z_{42} + Z_{50} + 14Z_{51} - 10,8 = 0;$$

$$2Z_{41} + 14Z_{42} - 16Z_{51} - 10,8 = 0;$$

(4.2.5)

Враховуючи симетрію вихідних умов, системи рівнянь рівноваги проекцій зусиль на осі Ox і Oy складемо для $1/4$ частини топологічної схеми, а систему рівнянь рівноваги проекцій зусиль на вісь Oz – для $1/12$ частини.

Результати розв'язання систем (4.2.3-4.2.5) наведено в таблиці 4.1.

Результати підрахунку абсцис і ординат залишаються сталими в ітераційному процесі, оскільки зміна вертикального навантаження на них не впливає.

Таблиця. 4.1

$j=4$	X	0	0,99	2			
	Y	3,989	3,852	3,464			
	Z	3,194	2,353	0			
$j=3$	X		0,53	1,617	2,842		
	Y		2,893	2,801	2,783		
	Z		1,865	1,546	2,353		
$j=2$	X		0	1,1	2,241	3,455	
	Y		1,919	1,906	1,905	1,995	

	Z		1,394	1,44	1,865	3,194		
$j=1$	X			0,552	1,662	2,771	3,831	
	Y			0,937	0,959	0,988	1,069	
	Z			1,176	1,394	1,865	2,353	
$j=0$	X			0	1,105	2,2	3,234	4
	Y			0	0	0	0	0
	Z			1,076	1,176	1,44	1,546	0
		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$

Результатом розв'язання системи рівнянь (4.2.5) є лише наближені аплікати вузлів сітки. Для отримання більш точного результату потрібно власну вагу елементів покриття узгодити з площами клітин і довжинами ребер. Довжина довільного ребра BC (рис. 4.4.) визначається за координатами вузлів, які належать цьому ребру:

$$l_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} \quad (4.2.6)$$

За відомими довжинами ребер можна підрахувати за формулою Герона [76] площі трикутних клітин сітки:

$$S_{i,j} = \sqrt{P_{i,j}(P_{i,j} - l_{BC})(P_{i,j} - l_{CD})(P_{i,j} - l_{BD})} \quad (4.2.7)$$

Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів з урахуванням площ клітин та довжин контурних ребер сітки. Враховуючи симетрію сітки, ці рівняння складено тільки для $1/12$ її частини.

$$\begin{aligned}
 -6Z_{26} + 6Z_{30} + kS_{20} &= 0 \\
 Z_{20} - 4Z_{30} + 2Z_{31} + Z_{40} + k_1S_{30} &= 0 \\
 Z_{30} + 2Z_{31} - 6Z_{40} + 2Z_{41} + Z_{50} + k_1S_{40} &= 0 \\
 Z_{40} + 2Z_{41} - 6Z_{50} + 2Z_{51} + k_1S_{50} &= 0 \\
 2Z_{30} - 6Z_{31} + 2Z_{40} + 2Z_{41} + k_1S_{31} &= 0 \\
 Z_{31} + Z_{40} - 5Z_{41} + Z_{42} + Z_{50} + Z_{51} + k_1S_{41} &= 0 \\
 Z_{41} - 8Z_{42} + Z_{50} + 14Z_{51} + k_1S_{51} + k_2l_{51} &= 0 \\
 2Z_{41} + 14Z_{42} - 16Z_{51} + k_1S_{42} + k_2l_{42} &= 0,
 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

де $Z_{20} = 1,076$; $Z_{42} = 3,194$;

$k_1 S_{i,j}$ – навантаження на вузол з урахуванням площ клітин;

$$k_1 S_{i,j} = \frac{k_1 (S''_{i,j} + S'_{i,j} + S'_{i-1,j} + S''_{i,j+1} + S'_{i,j-1} + S''_{i+1,j})}{3} \quad (4.2.9)$$

$k_2 l_{i,j}$ – навантаження на вузли опорних арок з урахуванням ваги елементів арок:

$$k_2 l_{i,j} = \frac{k_2 (l_{i,j}^{i-1,j+1} + l_{i,j}^{i+1,j-1})}{2} \quad (4.2.10)$$

Навантаження на вузли сітки, які підраховано за формулами (4.2.9) і (4.2.10) і наведено у таблиці 4.2., підставляються до системи рівнянь (4.2.8), після розв'язання якої отримаємо нове наближення аплікату сітки, яке наведено в таблиці 4.3. Цей результат також є наближеним, оскільки зміна аплікату вузлів сітки впливає на навантаження на вузли. Тому результати розв'язання системи (4.2.8) приймаються як вихідні дані для наступної ітерації. Алгоритм ітераційного процесу виглядає наступним чином:

- 1) за вихідне наближення приймається сітка, яка формується під дією рівномірно розподіленого навантаження на вузли;
- 2) за формулою (4.2.8) визначаються довжини всіх ребер сітки вихідного наближення;
- 3) за формулою (4.2.7) визначаємо площі клітин сітки;
- 4) за формулами (4.2.9) і (4.2.10) визначається навантаження на вузли сітки і опорних арок і підставляється до системи рівнянь (4.2.8), при розв'язанні якої отримаємо наступне наближення аплікату сітки;
- 5) отримані аплікати вузлів порівнюються з аплікатами попереднього наближення і визначається відносна похибка обчислень за формулою:

$$\delta = \frac{(z_{i,j}^n - z_{i,j}^{n-1})}{z_{i,j}^n} 100\%, \quad (4.2.11)$$

де n – номер ітерації.

Якщо похибка δ не перевищує задану допустиму похибку, ітераційний процес зупиняється. Якщо δ перевищує допустиму задану похибку, ітераційний процес повторюється, починаючи з пункту 2.

В наведеному вище прикладі найбільша відносна похибка складає 0,6% для чого знадобилось виконати чотири ітерації.

Навантаження на вузли:

Табл. 4.2.

	№ набл.					
$j=2$	1			$0,813k_1+1,306k_2$		
	2			$0,795k_1+1,224k_2$		
	3			$0,98k_1+1,209k_2$		
	4			$0,795k_1+1,206k_2$		
	5			$0,804k_1+1,206k_2$		
$j=1$	1		$1,13k_1$	$1,347k_1$	$0,872k_1+1,948k_2$	
	2		$1,142k_1$	$1,197k_1$	$0,909k_1+1,969k_2$	
	3		$1,13k_1$	$1,128k_1$	$0,895k_1+1,973k_2$	
	4		$1,136k_1$	$1,356k_1$	$0,895k_1+1,974k_2$	
	5		$1,133k_1$	$1,36k_1$	$0,898k_1+1,974k_2$	
$j=0$	1	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,122k_1$	$1,601k_1$	
	2	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,175k_1$	$1,734k_1$	
	3	$1,064k_1$	$1,079k_1$	$1,123k_1$	$1,66k_1$	
	4	$1,064k_1$	$1,081k_1$	$1,13k_1$	$1,663k_1$	
	5	$1,066k_1$	$1,081k_1$	$1,123k_1$	$1,601k_1$	
		$i=2$	$i=3$	$ij=4$	$i=5$	

Аплікати вузлів:

Таблиця 4.3.

$j=2$	1		1,862	3,194	
	2		1,883		
	3		1,894		
	4		1,868		
	5		1,869		
$j=1$	1		1,386	1,862	2,488
	2		1,392	1,883	2,514
	3		1,399	1,894	2,519
	4		1,388	1,868	2,519
	5		1,389	1,869	2,518
$j=0$	1	1,076	1,173	1,433	1,543
	2		1,174	1,436	1,545
	3		1,177	1,447	1,555
	4		1,173	1,436	1,549
	5		1,174	1,438	1,555
		$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$

За результатами останньої ітерації на рис. 4.5. побудовано аксонометрію сітки з урахуванням параметрів клітин і ребер опорних арок.

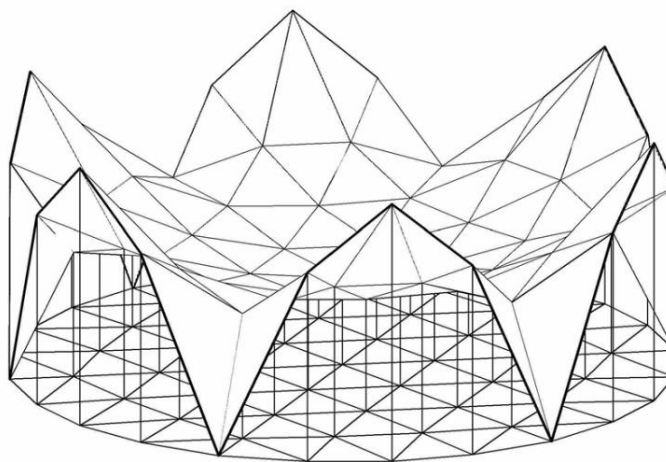


Рис. 4.5. Аксонометрія триангуляційної сітки.

4.3. Формування дискретного каркаса безмоментного покриття у вигляді сітки з чотирикутними клітинами.

Для більш точного визначення зовнішнього навантаження, яке прикладено до довільного вузла сітки, пропонується чотирикутні просторові клітини, прилеглі до даного вузла, двояко розбити діагоналями на трикутники та зусилля в кожному вузлі представити як таке, що врівноважує усереднену реакцію вузла від ваги трикутних елементів.

Таке розбиття чотирьох клітин, що примикають до вузла M показано на рис. 4.6.

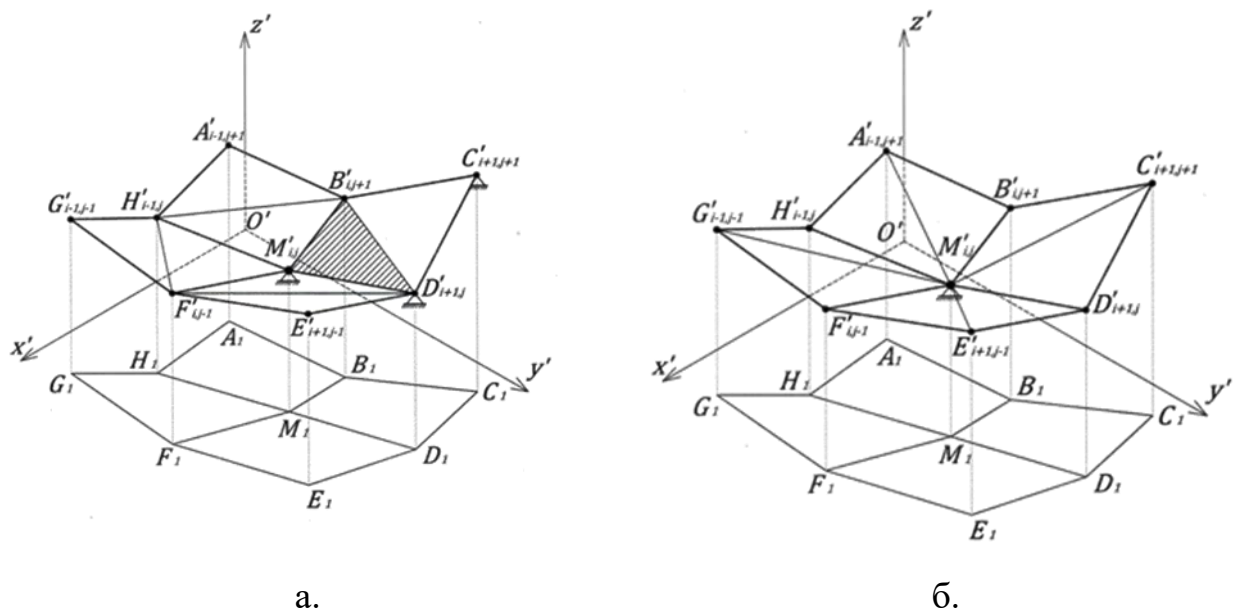


Рис. 4.6. Схема розбиття чотирьох клітин, що примикають до вузла M .

Відповідно з першим розбиттям (рис. 4.6.а) на вузол M спираються чотири трикутних елемента: BMD , DMF , FMH , BMH . Відповідно до [55] реакція у вузлі $M_{i,j}$ буде пропорційною до сумарної площі чотирьох трикутників:

$$kP'_{i,j} = \frac{S_{BMD} + S_{DMF} + S_{FMH} + S_{BMH}}{3}. \quad (4.3.1)$$

Інше розбиття комірок (рис.4.6.б), за аналогією з (4.3.1), визначає реакцію у вузлі $M_{i,j}$ як третя частина сумарної площі восьми трикутників:

$$kP_{i,j}'' = \frac{S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CDM} + S_{DEM} + S_{EFM} + S_{FGM} + S_{GHM} + S_{HAM}}{3}. \quad (4.3.2)$$

Уточнену величину $P_{i,j}$ визначаємо як середньоарифметичне між (4.3.1) та (4.3.2):

$$kP_{i,j} = \frac{kP_{i,j}' + kP_{i,j}''}{2} = \frac{S_{BDM} + S_{DFM} + S_{FHM} + S_{HBM}}{6} + \frac{S_{ABM} + S_{BCM} + S_{CDM} + S_{DEM} + S_{EFM} + S_{FGM} + S_{GHM} + S_{HAM}}{6}. \quad (4.3.3)$$

Площу кожного трикутника найбільш просто визначити за формулою Герона, наприклад:

$$S_{BDM} = \sqrt{(BD + BM + DM) \times (BM + BD) \times (BD + DM) \times (BM + DM)}, \quad (4.3.4)$$

де:

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2};$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 + (z_M - z_B)^2};$$

$$DM = \sqrt{(x_M - x_D)^2 + (y_M - y_D)^2 + (z_M - z_D)^2}.$$

Зовнішнє зусилля, яке діє у вузлі крайового контура, залежить не тільки від власної ваги елемента покриття, але і від власної ваги елемента арки.

Клітини, що примикають до крайового вузла так, як і в попередньому випадку подвійно розбиваються на трикутні елементи (рис. 4.7.а, 4.7.б), та визначається усереднена складова навантаження від трикутних елементів покриття:

$$k_1P_{m,j} = \frac{S_{ECM} + S_{ACM} + S_{EDM} + S_{CDM} + S_{BCM} + S_{ABM}}{6} \quad (4.3.5)$$

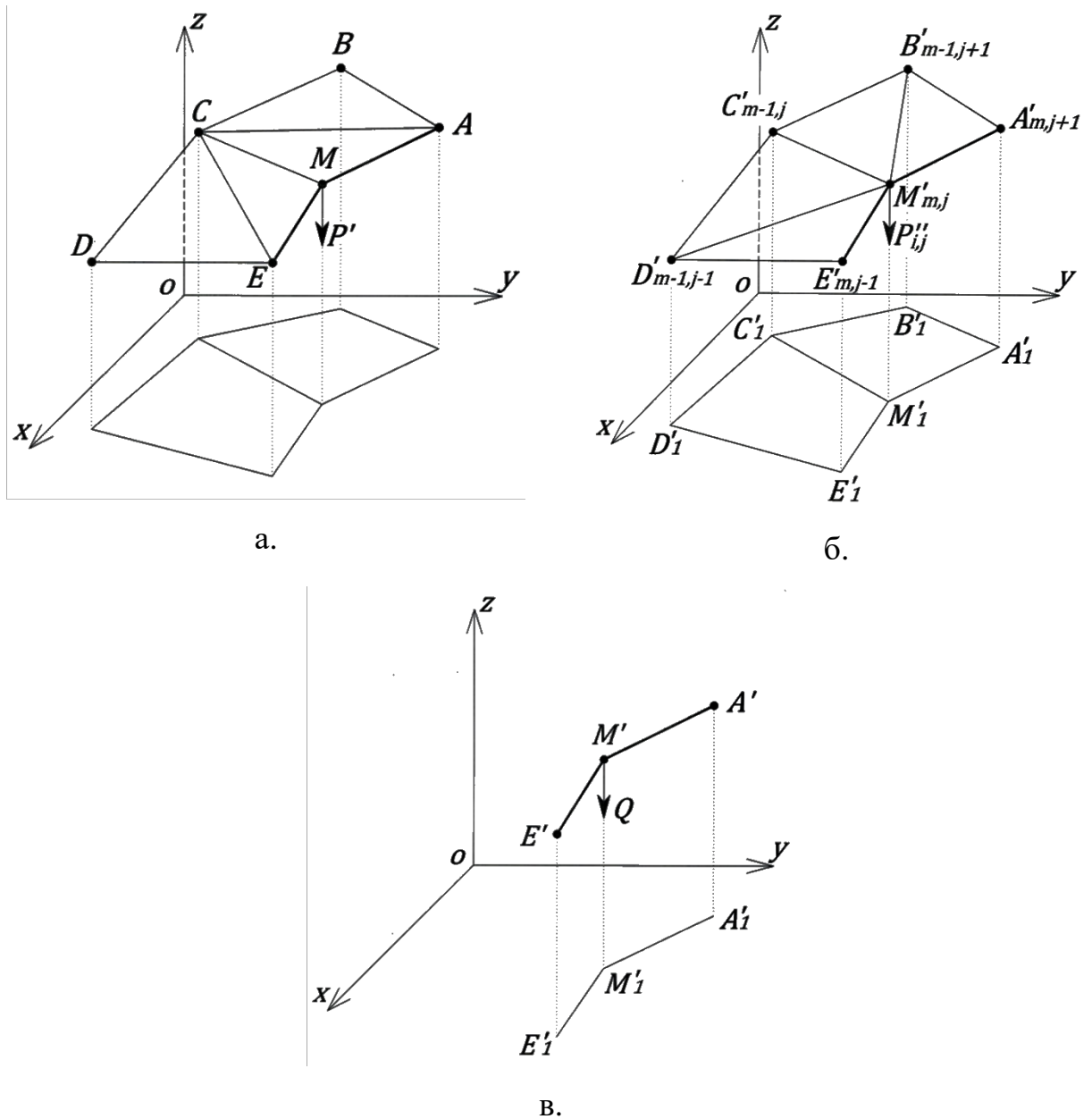


Рис. 4.7. Схема розбивки клітин, що примикають до крайового вузла.

Друга складова навантаження на вузол $M_{i,j}$ визначається як власна вага елемента арки опорного контура (рис. 4.7.в):

$$k_2 Q_{m,j} = \frac{l_{MA} + l_{ME}}{2}; \quad (4.3.6)$$

де:

l_{MA} та l_{ME} - довжини ребер AM та EM :

$$l_{MA} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2};$$

$$l_{ME} = \sqrt{(x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2 + (z_M - z_E)^2}.$$

Тому, повне зусилля $P_{i,j}$ у вузлі опорного контура визначається як сума зусиль $P_{m,j}$ та $Q_{m,j}$:

$$kP_{i,j} = k_1P_{m,j} + k_2Q_{m,j},$$

або

$$kP_{i,j} = \frac{k_1(S_{ECM} + S_{ACM} + S_{EDM} + S_{CDM} + S_{BCM} + S_{ABM})}{6} + \frac{(l_{AM} + l_{EM})k_2}{2}. \quad (4.3.7)$$

Приклад 4.3.1. За вихідне наближення задано сітку з чотирикутними клітинами, топологічну схему якої показано на рис. 4.8.

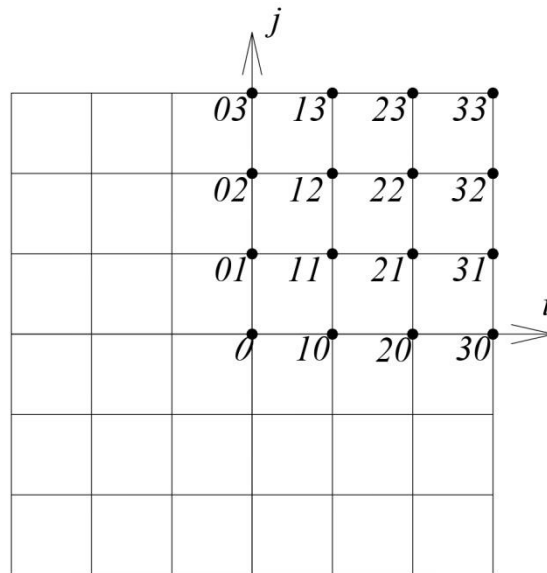


Рис. 4.8. Топологічна схема до прикладу 4.3.1.

Побудуємо стиснуту сітку на стиснутому опорному контурі, якщо задано такі вихідні умови:

- 1) сітка є симетричною відносно площин $x=0$; $y=0$; $x=y$;
- 2) координати кутових вузлів сітки: $x_{33} = y_{33} = 3$; $z_{33} = 0$;
- 3) навантаження на внутрішні вузли сітки $kQ = -3$.

Тоді система рівнянь рівноваги вузлів буде складатись з двох частин: перша частина для розрахунку абсцис вузлів сітки:

$$\begin{aligned}
4X_{10} - 2X_{11} - X_{20} &= 0 \\
-X_{10} + 4X_{20} - 2X_{21} - X_{30} &= 0 \\
-X_{10} + 4X_{11} - X_{12} - X_{21} &= 0 \\
-X_{11} - X_{20} + 4X_{21} - X_{22} - X_{31} &= 0 \\
-X_{11} + 4X_{12} - X_{13} - X_{22} &= 0 \\
-X_{12} - X_{21} + 4X_{22} - X_{23} - X_{32} &= 0 \\
-X_{21} - 8X_{30} + 17X_{31} - 8X_{32} &= 0 \\
-X_{22} - 8X_{31} + 17X_{32} - 24 &= 0 \\
-X_{12} + 17X_{13} - 8X_{23} &= 0 \\
-8X_{13} - X_{22} + 17X_{23} - 24 &= 0 \\
-X_{20} + 17X_{30} - 16X_{31} &= 0 \\
Z_{33} = 0 \quad Z_{00} = 3 \quad Z_{30} = 2
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Друга частина – для розрахунку аплікат вузлів сітки:

$$\begin{aligned}
+4Z_{00} - 4Z_{10} + kP &= 0 \\
-Z_{00} + 4Z_{10} - 2Z_{11} - Z_{20} + kP &= 0 \\
-Z_{10} + 4Z_{20} - 2Z_{21} - Z_{30} + kP &= 0 \\
-2Z_{10} + 4Z_{11} - 2Z_{21} + kP &= 0 \\
-Z_{11} - Z_{20} + 4Z_{21} - Z_{22} - Z_{31} + kP &= 0 \\
-2Z_{21} + 4Z_{22} - 2Z_{32} + kP &= 0 \\
-Z_{21} - 8Z_{30} + 17Z_{31} - 8Z_{32} + kP &= 0 \\
-Z_{22} - 8Z_{31} + 17Z_{32} + kP &= 0 \\
-Z_{20} + 17Z_{30} - 16Z_{31} + kP &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

В силу симетрії сітки ординати вузлів сітки дорівнюють відповідним абсцисам вузлів.

Результати розв'язання цих систем наведені в таблиці 4.4.

Координати в таблиці 4.4. є наближеними, оскільки навантаження на вузли сітки не було узгоджено з площами клітин і довжинами ребер опорного контура. Тому цей результат підлягає уточненню, для чого за формулами (4.3.3–4.3.7) визначаються довжини відповідних ребер і площі клітин сітки.

За результатами цих обчислень визначено зовнішні навантаження на вузли сітки (табл. 4.5.), які підставлено до системи рівнянь 4.3.9.

Таблиця 4.4.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$j=3$	$x=0$ $y=2,537$ $z=2,018$	$x=0,99$ $y=2,587$ $z=1,798$	$x=1,987$ $y=2,738$ $z=1,133$	$x=3$ $y=3$ $z=0$
$j=2$	$x=0$ $y=1,741$ $z=2,532$	$x=0,937$ $y=1,771$ $z=2,363$	$x=1,858$ $y=1,858$ $z=1,873$	$x=2,738$ $y=1,987$ $z=1,133$
$j=1$	$x=0$ $y=0,884$ $z=2,885$	$x=0,898$ $y=0,898$ $z=2,749$	$x=1,771$ $y=0,937$ $z=2,363$	$x=2,587$ $y=0,99$ $z=1,798$
$j=0$	$x=0$ $y=0$ $z=3,01$	$x=0,884$ $y=0$ $z=2,885$	$x=1,774$ $y=0$ $z=2,532$	$x=2,537$ $y=0$ $z=2,018$

Таблиця 4.5.

	$P_{i,j}$				№ ітер
$j=3$.
$j=2$			$1,091k_1$	$0,606k_1+1,375k_2$	1
			$1,103k_1$	$0,616k_1+1,38k_2$	2
			$1,096k_1$	$0,614k_1+1,579k_2$	3
$j=1$		$0,871k_1$	$0,952k_1$	$0,506k_1+1,111k_2$	1
		$0,862k_1$	$0,95k_1$	$0,511k_1+1,4k_2$	2
		$0,86k_1$	$0,95k_1$	$0,511k_1+1,099k_2$	3
$j=0$	$0,806k_1$	$0,834k_1$	$0,88k_1$	$0,472k_1+1,015k_2$	1
	$0,802k_1$	$0,83k_1$	$0,903k_1$	$0,479k_1+1,011k_2$	2

	$0,802k_1$	$0,83k_1$	$0,903k_1$	$0,48k_1+1,018k_2$	3
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	

Результатом розв'язання оновленої системи рівнянь (4.3.9) є уточнені аплікати вузлів, але, оскільки, змінились координати вузлів, то змінились довжини ребер і площі клітин, що веде до зміни зовнішнього навантаження на вузли. Тому операцію визначення аплікат необхідно повторювати до тих пір, поки відносна похибка у визначенні координат не стане менше допустимої, яка задається заздалегідь. Результати обчислень аплікат після кожної ітерації наведено в таблиці 4.6.

Таблиця 4.6.

	№ ітерації	Аплікати			
$j=3$	0		1,798	1,133	
	1	2	1,801	1,17	0
	2		1,801	1,172	
$j=2$	0	2,532	2,363	1,873	1,133
	1	2,544	2,396	1,938	1,17
	2	2,548	2,398	1,941	1,172
$j=1$	0	2,885	2,749	2,363	1,798
	1	2,886	2,764	2,396	1,802
	2	2,887	2,764	2,398	1,801
$j=0$	0		2,885	2,532	
	1	3	2,886	2,544	2
	2		2,887	2,548	
		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$

За даними останньої ітерації таблиці 4.6. на рис. 4.9. побудовано аксонометрію сітки з чотирикутними клітинами.

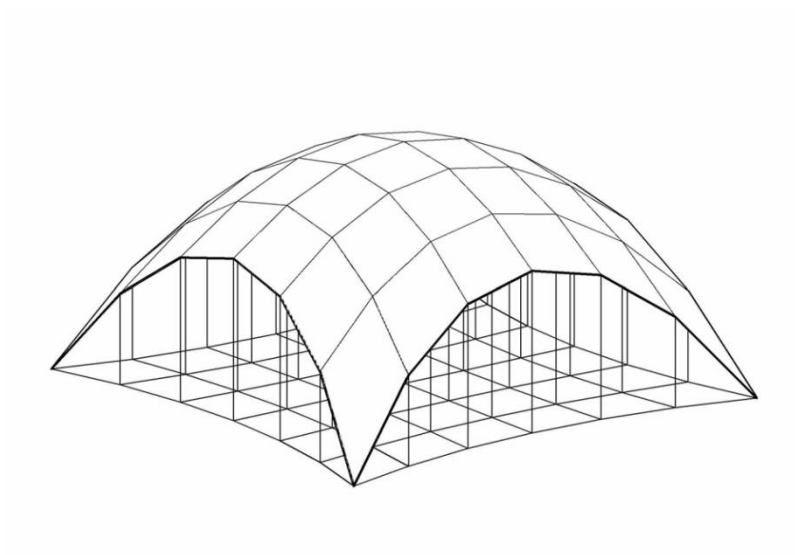


Рис 4.9. Аксонометрія сітки з чотирикутними клітинами.

ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ

1. Рівномірний розподіл власної ваги покриття між внутрішніми вузлами правильної у плані сітки дає незначну похибку лише для пологих покриттів, оскільки площі клітин на поверхні не значно відрізняються від площ клітин у плані. Із збільшенням вспарушеності поверхні покриття різниця між зазначеними площами збільшується, що веде до збільшення похибки розрахунків.

2. Для зменшення похибки при розрахунках координат вузлів сітки за основу прийнято відомий алгоритм покрокового уточнення результатів, але відомий алгоритм не врахував особливості тектонічних покриттів. Тому цей алгоритм було удосконалено із врахуванням формування опорних арок під дією власної ваги.

3. При дискретному моделюванні поверхні тектонічного покриття триангуляційною сіткою навантаження на кожний внутрішній вузол сітки підраховується як третина сумарної ваги трикутних елементів покриття, які належать цьому вузлу. Навантаження на вузол опорного контура, крім ваги трикутних елементів покриття, враховує вагу елементів опорних арок.

4. При дискретному моделюванні поверхні сіткою з чотирикутними клітинами умовно прийнято, що власна вага чотирикутного елемента покриття рівномірно розподіляється між чотирма вузлами клітини. Це дозволило визначити зовнішнє навантаження на кожний вузол сітки.

5. Наведені алгоритми визначення власної ваги елементів покриття дають більш точний результат обчислень, але не враховують похибку дискретизації, яку можна зменшити лише при зменшенні кроку дискретизації.

Список публікацій здобувача за матеріалами розділу 4: [33, 42]

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційне дослідження присвячено вирішенню актуальної проблеми формоутворення безмоментних систем, що відповідають вимогам архітектурної тектоніки.

Значення для науки полягає у розробці геометричного апарату формоутворення повністю безмоментних систем, які складаються з поверхні безмоментного покриття та безмоментних елементів спірання.

Значення для практики. З економічної точки зору, тектонічні конструкції дозволяють заощаджувати витрати на їх зведення, оскільки вони не потребують значних витрат, пов'язаних з армуванням. З естетичної точки зору, такі конструкції є привабливими, оскільки їх форма відповідає напруженому стану під дією власної ваги.

Отримано результати, які мають науково-практичну цінність:

1. На основі аналізу літератури з архітектурної тектоніки виявлено відсутність геометричного апарата для формування безмоментних поверхонь покриттів архітектурних споруд разом з безмоментними елементами спірання.

2. Доведена властивість методу суперпозицій щодо відношення коефіцієнтів зусиль натягіння або стиску у ребрах дискретної моделі поверхні дозволяє варіювати параметри форми без порушення рівноваженості вузлів дискретних каркасів поверхонь.

3. Запропоновані геометричні схеми врівноважених систем, що складаються зі стиснутих арок, розтягнутих ланцюгів та похилих лінійних опор, дозволяють конструювати системи, що відповідають вимогам тектонічних конструкцій.

4. Запропоновано два алгоритми дискретного формування стиснутих арок та розтягнутих ланцюгів у вигляді ланцюгової лінії. Це дозволило виконати порівняння збіжності ітераційних процесів формування точкових каркасів в залежності від кроку дискретизації.

5. Виведені рекурентні формули рівноваги вузлів крайового контура та ліній стикування комбінованих поверхонь покриттів дозволили скласти математичну модель таких покриттів, що мають як стиснуті і розтягнуті зони, так і стиснуті і розтягнуті арки і контурні арки у різних сполученнях.

6. Сформульовані умови, що обмежують застосування апарата суперпозицій, дозволили керувати формою поверхонь покриттів, що формуються під дією власної ваги.

7. Доповнення і удосконалення відомого алгоритму для врахування власної ваги елементів тектонічних покриттів дозволили підвищити точність визначення координат поверхні безмоментного покриття.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик // Автореф. ... дисертації доктора технічних наук: 05.01.01. – Київ, 2014. – 38с.
2. Аушева Н.М. Узагальнені методи моделювання кривих та поверхонь на базі застосування функцій змішання // Автореф. ... дисертації кандидата технічних наук: 05.01.01. – Київ, 1999. – 17с.
3. Бадієв М.М. Дискретні моделі різнотовщинних складних безмоментних оболонок // Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. - К.: КІСІ, 1994.- 148 с.
4. Боев С.О. Конструювання дискретних обводів і поверхонь з екстремальними диференціально-геометричними властивостями / С.О. Боев // Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. - К.: КІСІ, 1991. – 148 с.
5. Ботвіновська С.І. Керування формою дискретно представлених поверхонь за рахунок варіювання навантаження / С.І. Ботвіновська / Журнал «Проблеми інформаційних технологій». – Херсон.: ХНТУ, грудень 2017, - №01(022). - с.63-69.
6. Ботвіновська С.І. Нелінійні задачі формування дискретних образів статико-геометричним методом /С.І. Ботвіновська/ Сучасні проблеми моделювання: Збірник наукових праць МДПУ ім. Богдана Хмельницького. - Мелітополь.: МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2014. - Випуск 3. - с. 21-27.
7. Ботвіновська С.І. Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну // Автореф. ... дисертації доктора технічних наук: 05.01.01 К.: КНУБА, 2018. - 43с.
8. Ботвіновська С.І. Формоутворення дискретних поверхонь в архітектурі та дизайн-проектванні /С.І. Ботвіновська/ Журнал «Проблеми інформаційних технологій». – Херсон.: ХНТУ, 2016. - №01(019). -с.192-199.
9. Бурчак І.Н. Дискретне моделювання поверхонь з трикутними комірками із врахуванням функції зміни кривизни [Наук. монографія] /І.Н.

Бурчак, О.Ю. Ройко/ Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛНТУ, 2012. – 170с.

10. Бурчак І.Н., Величко В.Л., Ройко О.Ю. Дослідження можливості дискретизації N -вимірного простору однорідними комірками / І.Н. Бурчак, В.Л. Величко, О.Ю. Ройко // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків, 2009. - Вип.24. – с. 110-115.

11. Бурчак І.Н., Ройко О.Ю., Яцишина Т.А. Знаходження рівняння третього сімейства ліній каркасу поверхонь, що моделюються сіткою першого типу / І.Н. Бурчак, О.Ю. Ройко, Т.А. Яцишина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 84. – с. 124-128.

12. Верещага В.М. Дискретне інтегрування графічно представленого диференціального рівняння / В.М. Верещага // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, 2002. - Вип.1. – с. 41-45.

13. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь // Дис. ... докт техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь.: ТГАТА, 1996. -320 с.

14. Вечерський В. Курс історії архітектури. Київ.: Інститут проблем сучасного мистецтва, 2006. - с.53-54.

15. Вязанкін В.О. Поверхні, що відповідають лінійному розподілу навантажень /В.О. Вязанкін, А.В. Золотова/ Наукові нотатки, Луцьк, 2008.– с.66-71.

16. Золотова А.В. Дискретна кускова інтерполяція точок при формуванні поверхонь в архітектурі // автореф. ... канд. техн. наук 05.01.01. – КНУБА. – К., 2015. – 22 С.

17. Золотова А.В. Одновимірні кускова дискретна інтерполяція точок на площині / А.В. Золотова // Наукові нотатки. – Луцьк, 2008. - с. 125-130.

18. Кащенко О.В. Формоутворення в дизайні та архітектурі на основі моделювання біопрототипів // Автореферат дисертації доктора технічних наук: 05.01.01 – К.: КНУБА, 2013. – 40 с.

19. Ковальов С.М. Аналіз вихідних даних для формування дискретних решіток на основі обчислювальних шаблонів /С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська/ Вісник Київського національного університету технологій та дизайну (спецвипуск), №4 (30), 2006. – с.31-35.

20. Ковальов С.М. Двовимірна суцільна дискретна інтерполяція на правильній сітці із заданим контуром /С.М. Ковальов, В.О. Вязанкін/ Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003.–Вип.73.–с.40-45.

21. Ковальов С.М. Дискретна кускова двовимірна інтерполяція. Наукові нотатки. – Луцьк, 2008.– Вип. 29.4.1. - с. 148-151.

22. Ковальов С.М. Дослідження взаємозв'язку характеру функціонально заданого навантаження з формою модельованої ДПК /С.М. Ковальов, С.І. Пустюльга, В.П. Самчук/ Наукові нотатки.– Луцьк, 2003.– Вип.13. - с.151-159.

23. Ковальов С.М. Систематизація поверхонь, яким належать вузли дискретних сіток при лінійному розподілі зовнішнього навантаження / С.М. Ковальов, А.В. Золотова / Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, 2009. – Вип. 25.–с 159-164.

24. Ковальов С.М., Ботвіновська С.І. Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. - Вип. 76. - с. 30-37.

25. Ковальов С.М., Вязанкін В.О., Пустюльга С.І. Статична і геометрична інтерпретація трьохточкових різницевих операторів для одновимірного інтерполювання вперед і назад / С.М. Ковальов, В.О. Вязанкін, С.І. Пустюльга // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь, 2004. - Вип. 4, т. 28. - с. 24-25.

26. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи.

Випуск 1 / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга, В.Є. Михайленко// - Луцьк: ЛДТУ, 2006. – 256 с.

27. Ковальов С.М., Золотова А.В. Обчислювальна геометрія: навчальний посібник / С.М. Ковальов, А.В. Золотова // К.: КНУБА, 2008. – 124 с.

28. Логачов М.Я. Керування формою поверхонь, оболонок, що формуються під впливом нормального навантаження // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КДТУБА, 1995.-148 с.

29. Манойленко О.С. Геометричне моделювання у методах дискретних елементів / О.С. Манойленко // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. - Мелітополь, 2002. – 159 с.

30. Марченко І.Ф. Дискретна апроксимація за критерієм найменшого граничного відхилення / І.Ф. Марченко // Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. - К.: КДТУБА, 1999. – 149 с.

31. Михайленко В.Є., Ковальов С.М. Дискретне геометричне моделювання: виникнення, результати, підсумки / В.Є. Михайленко, С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2004. - Вип. 74. - с. 3-7.

32. Мостовенко Ол-р.В., Ковальов С.М. Дискретне моделювання поверхонь, що перекривають заданий об'єм на квадратному плані / О.В. Мостовенко, С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 85. - с.29-35.

33. Мостовенко Олексій В. Дискретне моделювання тектонічних покриттів архітектурних споруд у вигляді триангуляційної сітки / Мостовенко Олексій В., Ковальов С.М., Мостовенко Олександр В.// International periodic scientific journal. Modern engineering and innovative technologies. Indexed in INDEX COPERNICUS high impact factor (ICV: 84.86) Issue No32 Part 1 April 2024. P. 135-144

34. Мостовенко Ол-й В. Аналіз точності визначення кривизни дискретно представленої кривої / Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М.,

Мостовенко Ол-р В. // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Відповідальний редактор Ванін В.В. Випуск 103. -К.:КНУБА, 2022р.- 490с. С 134-141.

35. Мостовенко Ол-й В. Дискретна модель ланцюгової лінії /Мостовенко Ол-й В, Анпілогова В.О.// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 92. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2016р.- 132с. С 10-14.

36. Мостовенко Ол-й В. Заміна суперпозиції скінченного числа точок ланцюгом послідовних суперпозицій пар точок / Мостовенко Ол-й В., Вязанкін В.О.// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 84.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2010р.- 319с. С 296-300.

37. Мостовенко Ол-й В. Координати вузлів натягнутої нитки при довільно заданому навантаженні. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 80.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2008р.- 570с. С 170-174.

38. Мостовенко Ол-й В. Можливості розв'язання системи рівнянь рівноваги розтягнутої сітки в загальному вигляді / Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.Н., Вязанкін В.О.// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 80.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2008р.- 570с. С 16-18.

39. Мостовенко Ол-й В. Основи формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних просторових конструкцій в архітектурі /О.В. Мостовенко/ Прикладна геометрія та інженерна графіка. К.: КНУБА, 2009.– Вип. 81.– с.148-154.

40. Мостовенко Ол-й В. Синтез двох способів дискретного задання кубічної параболи./ Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. 43 наук.праці: Редкол.: Ю.М. Тормосов

(відпов.ред.) та ін.: Харк. держ. університет харчування та торгівлі.-Харків, 2007.-Вип.17.- 293с.: іл., табл. С 47-53.

41. Мостовенко Ол-й В. Формування дискретних каркасів врівноважених комбінованих систем /Мостовенко Ол-й // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 82.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2009р.- 400с. С 335-340.

42. Мостовенко Ол-й В. Формування дискретних каркасів поверхонь безмоментних покриттів при рівномірному розподілі навантаження у плані / Мостовенко Ол-й В., Ковальов С.М.// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 87.Відповідальний редактор В.Є. Михайленко.-К.:КНУБА, 2011р.- 490с. С 149-154.

43. Мостовенко Ол-й В. Формування дискретно визначених кривих при заміні закріплених вузлів зусиллями /Мостовенко Ол-й В.// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 77.-К.:КНУБА, 2007р.- 212с. С 198-205.

44. Мостовенко Ол-р В. Визначення залежності між формотворчими параметрами/О.В. Мостовенко/ Енергоефективність в будівництві і архітектурі. К.: КНУБА, 2013.– Вип.4.– с.185-200.

45. Мостовенко Ол-р В. Дискретизація суцільних та складених ліній опорних контурів для формування поверхонь безмоментних покриттів /О.В. Мостовенко/ Вісник Національного транспортного університету, - К.: КНТУ, 2013. – Вип. 28. – с. 351-357.

46. Мостовенко Ол-р В. Управління формою дискретних каркасів поверхонь врівноважених покриттів з урахуванням об'єму, що перекривається // Дисертація кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2013.-167 с.

47. Найдиш В.М. Відновлення інформації на основі скінчених різниць / В.М. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь, 2000. - Вип. 4, том 11. - С. 3-9.

48. Найдиш В.М. Дискретне диференціювання. Навчальний Посібник / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш / під ред. В.М.Найдиша. – 114 С.

49. Найдиш В.М. Досвід та перспективи дискретного моделювання /В.М. Найдиш, А.В. Найдиш/ Современные проблемы геометрического моделирования. – Харьков, 2005. – С. 40-45.

50. Найдиш В.М. Нові можливості дискретної інтерполяції /В.М. Найдиш/ Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь: ТДАТА, 1999. - Випуск 4, Т.10. – с. 3-7.

51. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії: Навчальний посібник / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна/ під ред. В.М. Найдиша – ISBN 978-966-8428-20-3. – Мелітополь, 2007. – 193 С.

52. Найдиш В.М. Основні поняття дискретного геометричного моделювання /В.М. Найдиш/ Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь, 2001. - Вип. 4, том 13. - с. 8-11.

53. Найдиш В.М., Найдиш А.В., Речин М.В. Про похибки дискретної інтерполяції / Найдиш В.М., Найдиш А.В., Речин М.В // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. - Мелітополь, 2001. - Вип. 4, том 12. - с. 3-6.

54. Нечипоренко І.В. Конструювання просторових різницевих сіток стосовно до розрахунків течій чисельними методами / Нечипоренко І.В. / Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. - К.: КДТУБА, 1996. - 145с.

55. Писаренко Г.С. Опір матеріалів. Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський: За ред. Г.С. Писаренка. -2-ге вид., допов. І переробл. – К.: Вища шк., 2004.-655с.:іл.

56. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки // Автореферат дисертації доктора технічних наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2001.-36 с.

57. Пустюльга С.І. Аналіз сучасних підходів до дискретного геометричного моделювання об'єктів /Пустюльга С.І., Самостян В.Р./ Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2008. – Вип. 80. – с. 60-66.

58. Пустюльга С.І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями / С.І. Пустюльга// Дисертація ... доктора технічних наук: 05.01.01. - К., 2006. - 316 с.

59. Пустюльга С.І. Дискретне моделювання врівноважених сіток числовими послідовностями з нелінійними функціями зміщення /Пустюльга С.І., Самостян В.Р., Хомич В.В.// Прикладна геометрія та інж. графіка. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 86. - с. 316-320.

60. Пустюльга С.І. Дискретне моделювання криволінійних поверхонь із заданими параметрами елементів паркету / Пустюльга С.І., Клак Ю.В. // Збірник наукових праць (спецвипуск). Доповіді Другої Кримської науково-практичної конференції. – К., 2005. – с.103-108.

61. Пустюльга С.І. Дискретне формоутворення тривимірних образів у тривимірному просторі при визначених вихідних умовах / Пустюльга С.І., Клак Ю.В.// Вісник Київського національного університету технологій і дизайну №4 (30) (спецвипуск). – с. 54-58.

62. Пустюльга С.І. Параметричний аналіз врахування вихідних умов при формуванні дискретних моделей одно- та двовимірних образів / С.І. Пустюльга, В.Р. Самостян // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 85. - с. 108-114.

63. Пустюльга С.І. Принцип узагальнення статико-геометричного підходу до моделювання дискретних структур /С.І. Пустюльга/ Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.:КНУБА, 2004.– Вип.74.– с. 114-121.

64. Пустюльга С.І. Стикування елементарних учасників дискретних моделей криволінійних поверхонь / Пустюльга С.І., Клак Ю.В. // Наукові нотатки. – Луцьк, 2008. – с. 288-293.

65. Пустюльга С.І. Формоутворення врівноважених дискретно представлених двовимірних образів на рівномірній сітці за допомогою матричного числення /С.І. Пустюльга, Ю.В. Клак/ Геометричне та комп'ютерне моделювання.– Харків, 2007, - Вип. 17. - с.134-138.

66. Ройко О.Ю. Моделювання поверхонь сітками із трикутними комірками з врахуванням дискретного аналогу кривини. /О.Ю. Ройко// автореф. ... канд. техн. наук: 05.01.01.– К., 2015. – 20 с.

67. Садретдинова Р.М. Моделювання сітчастих просторових конструкцій будівель і споруд триангуляційними сітками // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КДТУБА, 1994.–146 с.

68. Самостян В.Р. Вплив геометричних вимог на процеси геометричного моделювання технічних об'єктів // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2012.–154 с.

69. Самчук В.П. Дискретне моделювання хвилястих поверхонь покриття / В.П. Самчук // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2013. - 152с.

70. Самчук П.В. Керування формою дискретно заданих поверхонь в задачах проектування оболонок // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КДТУБА, 1991.–154 с.

71. Скочко В.І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі /Скочко В.І.// Дис... канд. техн. наук: 05.05.01. -К.: КНУБА, 2013. - 258с.

72. Трегубова І.А. Геометричні основи формоутворення дерев'яних оболонок // Дис. ... кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КДТУБА, 1989.–155 с.

73. Черняк В.І. Дискретна апроксимація неупорядкованих множин точок / Черняк В.І.// Дисертація ... кандидата технічних наук: 05.01.01. - К.: 2011. – 158 с.
74. Daniel D. McCracken, William S. Dorn. Numerical Methods And Fortrain Programming // John Wiley & Sons, New York-London-Sydney: Halsted Press: Willey International Edition, Second Printing, 1965. – 584 p.
75. Faux I.D., Pratt M.A. Computational Geometry For Design And Manufacture // Halsted Press: a division of John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto. – 296 p.
76. Granino Arthur Korn, Theresa M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. - Michigan University: McGraw-Hill, 1968. –P.-1130.
77. Hilbert D., Conh-Vossen. Anschauliche Geometrie. Berlin, 1932. – 244p.
78. Kovalyov S.N. Discrete geometry of curves and surfaces. The 10TH International Conference on Geometry and Graphics. Volume 1. - 2002. – Kyiv, Ukraine. – p. 132-133.
79. McEwen I.K. Vitruvius: Writing the Body of Architecture. Cambridge: MIT Press, 2004. – 493p.
80. Naydysh V.M. Discrete geometric modelling of curve lines and surfaces. The 10TH International Conference on Geometry and Graphics. Volume 1. - 2002. – Kyiv, Ukraine. – p. 18-20.
81. Nichols M. Author and Audience in Vitruvius' De Architectura. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. – 238p.
82. Pottmann, Helmut & Eigensatz, Michael & Vaxman, Amir & Wallner, Johannes. Architectural geometry. Computers & Graphics.2015. Vol. 47. P. 145-164.
83. Shoup T.E. A Practical Guide To Computer Methods For Engineers/ Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1979. – 235 p.

84. Smith T.G. Vitruvius on Architecture. New York: The Monacelli Press, 2003. – 232p.

85. Springer Flory, Simon & Pottmann, Helmut. (2010). Ruled Surfaces for Rationalization and Design in Architecture/ in A. Sprecher et al.(eds), LIFE in: formation. pp. 103-109.

86. Velimirović, Ljubica & Radivojević, Grozdana & Stanković, Mića & Kostic, Dragan. (2008). Minimal surfaces for architectural constructions. Facta Universitatis: Architecture and Civil Engineering. 2008. Vol. 6(1). P.89-96.

87. Weyl H. Symmetry. Princeton University Press, 1952. Princeton, New Jersey. - 256p.

ДОДАТОК

ДОВІДКА

про впровадження результатів наукових досліджень,
представлених у дисертаційній роботі на здобуття
наукового ступеня кандидата технічних наук
МОСТОВЕНКА Олексія Володимировича

Видана здобувачу ступеня доктора філософії кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Київського національного університету будівництва і архітектури Мостовенку Олексію Володимировичу в зв'язку з тим, що алгоритми і способи, наведені ним у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук «Формування дискретних каркасів безмоментних великопрогонних архітектурних покриттів» прийнято до впровадження в товаристві з обмеженою відповідальністю «КСМ-ТРАНС».

Автором розроблено методику та алгоритми для формування повністю безмоментних (зрівноважених під дією власної ваги) конструкцій. Наведено тестові приклади, які наочно демонструють можливість формування таких покриттів в архітектурі.

Геометричний апарат формування повністю безмоментних каркасів поверхонь покриттів дозволяє задачі проектування суміщеними з естетичними та екологічними задачами в архітектурі і будівництві.

ТОВ «КСМ-ТРАНС»

03115, м. Київ, пр-т Перемоги, 91

тел./факс:(044) 332-47-67



Сергій ГОРОВЕНКО



АЛЬТІС
КОНСТРАКШН

ТОВ «Альтіс-Констракшн»

ЄДРПОУ 37394854 • Тел. +380 (44) 492-77-66
Юридична адреса: вул. Качалова, 5В • м. Київ • 03146 • Україна
МФО 322948, На рахунок: 26001300180698 у ПАТ «Банк Форум»
Http://www.altis.ua • E-mail: office@altis.ua

№ _____
« ____ » _____ 201 __ р.

ДОВІДКА

про практичне впровадження наукових результатів дисертаційної роботи
Мостовенка Олексія Володимировича
**«Формування дискретних каркасів безмоментних
великопрогонних архітектурних покриттів»**
за спеціальністю 05.01.01 – прикладна геометрія
в діяльність ТОВ «Альтіс-Констракшн»

Результати наукових досліджень асистента кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки Київського національного університету будівництва і архітектури Мостовенка Олексія Володимировича за темою кандидатської дисертації «Формування дискретних каркасів безмоментних великопрогонних архітектурних покриттів» прийнято до впровадження ТОВ «Альтіс-Констракшн».

Запропонований автором спосіб формування дискретних каркасів безмоментних архітектурних поверхонь разом з її опорним контуром. Такі поверхні можна віднести до тектонічних.

Результати дослідження прийнято до впровадження для конструювання таких поверхонь, що дозволять значно заощаджувати витрати на будівельні матеріали.



Максим Забігайло

Максим ЗАБІГАЙЛО