

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І
АРХІТЕКТУРИ, МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І
АРХІТЕКТУРИ, МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПЕЧУК Василь Дмитрович

(прізвище, ім'я, по батькові)

УДК 532.5

(індекс)

ДИСЕРТАЦІЯ

Регулярна і хаотична динаміка в механіці хрестоподібних хвиль

(назва дисертації)

131 Прикладна механіка

(шифр і назва спеціальності)

13 Механічна інженерія

(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник (консультант) Козак Андрій Анатолійович, кандидат
технічних наук, доцент

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Печук В. Д. Регулярна і хаотична динаміка в механіці хрестоподібних хвиль. –Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»(13 Механічна інженерія). -Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ 2024.

В даній роботі вперше показана можливість перекачування енергії від хвилепродуктора до хрестоподібних поверхневих хвиль в ідеальній рідині в прямокутному басейні скінченних розмірів з хвилепродуктором. Це показано аналітично на основі застосування методу суперпозиції і перевірено експериментально.

Встановлено закономірності регулярних усталених поверхневих хвиль у рідині в прямокутному басейні скінченних розмірів з хвилепродуктором. Показано існування регулярних режимів коливань вільної поверхні рідини при одномодових параметричних резонансах. Наведено параметри, при яких можливі хаотичні стійкі коливання в усередненій динамічній системі, що описує динаміку амплітуд хрестоподібних хвиль.

Побудовано новий чисельний алгоритм для систем із запізнюванням. Це явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням на основі поліномів Ньютона і формули Тейлора для наближення на наступний крок чисельного інтегрування і класичних методів Рунге-Кутти. Отриманий таким чином явний гібридний метод п'ятого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, наприклад, з коефіцієнтами Кутти-Нюстрема або коефіцієнтами методу Дормана-Принса, з оцінкою похибки чисельного інтегрування, підходить для дослідження актуальних на даний момент систем з запізнюванням на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу.

Числовий розрахунок старшого показника Ляпунова із використанням класичного алгоритму Бенеттіна не завжди є задовільним у випадку динамічної системи з дисипацією енергії. Зроблено модифікацію цього алгоритму що дає

змогу підвищити точність розрахунків і розширити область застосування методу. Застосування цієї модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дало змогу точніше ідентифікувати динамічні режими.

Чисельний розрахунок старшого показника Ляпунова на основі класичного алгоритма Бенеттіна не враховує збігання та розбігання траєкторій на хаотичному аттракторі. В роботі розроблено універсальний алгоритм, точність якого не залежить від цієї та інших особливостей хаотичних аттракторів, таких як форма, розмір та структура, їх кількість та розташування у фазовому просторі. Новий алгоритм дозволяє збільшити точність розрахунків та розширити область застосування зазначеного методу. Застосування запропонованої модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дозволяє більш точно ідентифікувати динамічні режими.

Вперше досліджено вплив запізнювання на динаміку хрестоподібних хвиль. Встановлено суттєвість врахування факторів запізнювання при дослідженні на регулярну і хаотичну динаміку системи що описує хрестоподібні хвилі в басейні скінчених розмірів з хвилепродуктором.

Ключові слова: Чисельне моделювання, апроксимація, нестислива течія, крапельна рідина, деформація поверхні, вимушені частоти коливань, чисельне диференціювання, коливання, періодичні коливання, власні коливання, власні частоти та форми коливань, стійкість, динамічна стійкість, гідродинамічна система, хрестоподібні хвилі, хвилі, чисельні методи, хаос, динамічні системи, диференціальні рівняння з запізнюванням, методи Рунге-Кутти, показники Ляпунова, алгоритм Бенеттіна.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ПЕЧУКА В. Д.

Апробація результатів:

1. Pechuk V.D. Accuracy Improvement of the Highest Lyapunov Exponent Estimation / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk. // The 14-th CHAOS 2021 International Conference, [Crete], 8-11 June, 2021. - P.92.
2. Pechuk V.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk. // CHAOS 2021 International Conference, [Crete], 8-11 June, 2021 / Proceedings. - P. 351-359.
3. Pechuk V.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk //materials CHAOS 2021: 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. - Springer Proceedings in Complexity. Springer. – 2022. - P. 327–335.
4. Pechuk V.D. Modeling of time-delay dynamical systems by explicit hybrid methods of the fifth order of convergence / V.D. Pechuk, N.V. Bondarenko // The 2st International Conference on Emerging Technology Trends on the Smart Industry and the Internet of Things, "TTSIIT-2023" 24-25 January, Ukraine-Iraq-Poland. - P. 78-82.
5. Pechuk V.D. Chaos in hydrodynamic system with delay / V.D. Pechuk, N.V. Bondarenko, E.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya // 16th Chaotic Modeling and Simulation International Conference Heraklion, [Crete], 13 – 16 June, 2023 Hybrid.
6. Pechuk V.D. A Universal Algorithm for Estimating the Lyapunov Exponent in a Dissipative Dynamical System / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk // 16th Chaotic Modeling and Simulation International Conference Heraklion, [Crete], Greece, 13 – 16 June, 2023 Hybrid.
7. Краснопольська Т.С. Хрестоподібні хвилі у прямокутних басейнах / Т.С. Краснопольська, В.Д. Печук // Комп'ютерна гідромеханіка: Матеріали дев'ятої міжнародної науково-практичної конференції, [Київ], 1-2 жовтня 2024р. - Київ: ІГМ НАН України. – 2024. - С. 47-48.

Статті:

1. Бондаренко Н.В. Моделювання динамічних систем з запізнюванням за допомогою узагальнених методів Рунге-Кутта / Н.В. Бондаренко, В.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2019. – Вип. 96. - С. 3- 11.
2. Бондаренко Н.В. Побудова явних методів Рунге-Кутти для моделювання динамічних систем з запізнюванням / Н.В. Бондаренко, В.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2020. - Вип. 99. - С. 16-27.
3. Печук В.Д. Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем з запізнюванням / В.Д. Печук, Н.В. Бондаренко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2021. - Вип. 101. - С. 168-180.
4. Печук В.Д. Про оцінку старшого показника Ляпунова моделі хрестоподібних хвиль у прямокутному каналі скінченних розмірів / В.Д. Печук, Т.С. Краснопольська // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2022. - Т. 65, Вип. 1-2. - С. 209-215.
5. Печук В.Д. Універсальний алгоритм оцінки старшого показника Ляпунова в дисипативній динамічній системі/ В.Д. Печук, Т.С. Краснопольська, Є.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2023. - Вип. 105. - С. 190-199.
6. Pechuk V.D. Estimation of the largest lyapunov exponent for a model of cross-shaped waves in a rectangular channel of finite size/ V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya //Journal of Mathematical Sciences, Springer. - 2024. - Vol. 282, No. 5. - P. 862 – 869.

SUMMARY

Pechuk V. D. Regular and chaotic dynamics in mechanics of cross-waves. – Qualifying scientific works on rights for a manuscript.

Dissertation on the receipt of scientific degree of Ph.D. by speciality a 131 «Applied mechanics»(13 Mechanical engineering). - Kyiv national university of building and architecture, Kyiv 2024.

In this work possibility of pumping over of energy is first shown from wavemaker to the cruciform superficial waves in an ideal liquid in the rectangular pool of eventual sizes from wave maker. It is shown analytically on the basis of application of method of superposition and it is tested experimentally.

Conformities to the law of regular withstand superficial waves are set in a liquid in the rectangular pool of eventual sizes from wavemaker. Existence of the regular modes of vibrations of free surface of liquid is shown at one modes parametrical resonances. Parameters, at which chaotic proof vibrations are possible in the averaged dynamic system which describes the dynamics of amplitudes of cruciform waves, are resulted.

A new numeral algorithm is built for the differential systems with a delay. This is an explicit hybrid method for the systems of differential equations with a delay on the basis of polynomials of Newton and formula of Teylora for approaching on the next step of numeral integration and classic methods of Runge-kutti. The explicit hybrid method of fifth order is got thus for the systems of differential equations with a delay, for example, with the coefficients of Kutti-nyustrema or coefficients of method of Dormana-prinsa, with the estimation of error of numeral integration, befits for research of the actual now systems with a delay on the large enough, comparatively with a delay, intervals of time.

Numerical calculation of maximum exponent of Lyapunov from usage classic algorithm of Benettin not always is satisfactory in case of the dynamic system with dissipation of energy. It is done modification of this algorithm that gives opportunity to promote exactness of calculations and extend an application of method domain. Application of this modification for the model of excitation of cross-waves on the free

surface of liquid in the rectangular channel of eventual length and depth enabled more precisely to identify the dynamical modes.

The numeral calculation of maximum exponent of Lyapunov on the basis of classic algorithm of Benettina does not take into account running back and running approach of trajectory on chaotic attractor. An universal algorithm exactness of which does not depend on it and other features of chaotic аттракторів is developed in work, such as a form, size and structure, their amount and location in phase space. A new algorithm allows to increase exactness of calculations and extend an application of the noted method domain. Application of the offered modification for the model of excitation of cross-waves on the free surface of liquid in the rectangular channel of eventual length and depth allows more exactly to identify the dynamic modes.

First probed influencing of delay on the dynamics of cross-waves. Importance of account of factors of delay is set at research on the regular and chaotic dynamics of the system that describes cross-waves in the pool of complete sizes from wave maker.

Keywords: numerical simulation, approximation, incompressible flow, droplet liquid, surface deformation, forced vibration frequencies, numeric differentiation, oscillations, periodic oscillations, natural vibration, natural frequency and vibrational patterns, stability, dynamical stability, hydrodynamic system, cross-waves, waves, numerical methods, chaos, dynamical systems, differential equations with a delay, methods of Runge-kutti, exponents of Lyapunov, algorithm of Benettin.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	10
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	14
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 1.....	25
РОЗДІЛ 2. СУЧАСНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	33
2.1. ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ТА АТРАКТОРИ.....	33
2.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ	37
2.2.1. Означення та постановка основної початкової задачі.....	37
2.2.2. Теорема існування та єдиності	38
2.3. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ.....	40
2.3.1. Методи Рунге-Кутти.....	40
2.3.2. Узагальнені методи Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.....	43
2.3.3 Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем з запізнюванням.....	49
2.4. ОЦІНКА СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА.....	59
2.4.1. Алгоритм Бенеттіна та його модифікація.....	59
2.4.2. Новий універсальний алгоритм оцінки старшого показника Ляпунова в дисипативній динамічній системі.....	63
2.5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є.....	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 2.....	70
РОЗДІЛ 3. ХРЕСТОПОДІБНІ ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ.....	73
3.1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ І МОДЕЛЕЙ.....	73
3.2. ДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИН. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ.....	73
3.3. ХРЕСТОПОДІБНІ ХВИЛІ.....	75
3.4. ЛАБОРАТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ.....	78
3.5. НОВА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ЩО ОПИСУЄ ПРЯМЕ ЗБУДЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ КОЛИВАННЯМИ ХВИЛЕПРОДУКТОРА.....	86

3.6. ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ.....	111
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 3.....	116
РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ.....	119
4.1. ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ.....	119
4.2. ПОРІВНЯННЯ АЛГОРИТМІВ ПІДРАХУНКУ СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА.....	121
4.3. ХАОС В ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ.....	125
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 4.....	130
ВИСНОВКИ.....	132

ВСТУП

Актуальність теми досліджень визначається широким розповсюдженням і проявом хрестоподібних поверхневих хвиль в рідині. Основою для розуміння поведінки хвиль в рідині є вивчення особливостей їх усталених режимів, які можна розділити на два класи: хаотичних і регулярних, що реалізуються з плином часу. Важливо відзначити, що перейти від одного класу режимів до іншого без застосування додаткових джерел енергії принципово неможливо. Поведінка і характеристики хвиль в рідині суттєво відрізняються для хаотичних і регулярних режимів.

Вивченню хаотичних і регулярних рухів у рідких середовищах присвячена велика кількість теоретичних та експериментальних робіт, причому накопичено багато цікавих і несподіваних результатів, котрі показують складну структуру перекачки енергії від коливань конструкційних елементів у коливання та хвилі в рідині.

І все ж зроблено порівняно мало для здобуття ясного уявлення про те, що приводить до появи хаосу і що відбувається в хаотичних режимах. Зараз, коли дослідженню хаосу в гідромеханіці присвячені численні роботи, стає зрозуміло, що він виникає в системах, поведінка яких адекватно описується в часі системою диференціальних рівнянь третього і більш високих порядків, а також в системах з запізнюванням будь-якого порядку, тобто виникнення хаосу обумовлене наявністю навіть дуже малих за величиною зв'язків. Пов'язаність рухів рідини і конструкції – ось що може ставати причиною, котра приводить до переходу від регулярних до хаотичних режимів взаємодії.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалась в рамках напрямків фундаментальних досліджень Інституту гідромеханіки НАН України і Київського національного університету будівництва і архітектури. Зокрема, результати досліджень

увійдуть у звіт по темі "Генерація та властивості хрестоподібних хвиль у басейнах скінченних розмірів" (державний реєстраційний номер: 0124U000988).

Мета і задачі дослідження.

Метою дослідної роботи є встановлення закономірностей регулярних і хаотичних режимів руху хрестоподібних хвиль в басейнах скінченних розмірів. Поставлена мета досягається шляхом експериментальних та теоретичних досліджень отриманих при вивченні процесів збудження хрестоподібних хвиль. Для досягнення поставленої мети були сформульовані такі наукові задачі:

-- вивчити експериментально та теоретично збудження хрестоподібних поверхневих хвиль у прямокутному басейні скінченних розмірів;

-- дослідити закономірності хаотичних та регулярних режимів коливань поверхневих хрестоподібних хвиль в рідині у прямокутному басейні скінченних розмірів при різних режимах роботи хвилепродуктора, зокрема при наявності запізнення;

Об'єктом дослідження є хрестоподібні хвилі на вільній поверхні рідини, спричинені коливаннями хвилепродукторів.

Предметом дослідження є регулярні і хаотичні режими руху хрестоподібних хвиль, що породжуються коливаннями хвилепродукторів.

Методи досліджень.

Застосовується комплексний метод дослідження, що полягає в об'єднанні аналітичного та асимптотичного методів малого параметру, лінійної та нелінійної теорій, чисельного інтегрування систем диференціальних рівнянь, чисельного визначення власних частот і критеріїв стійкості, показників Ляпунова, спектрів Фур'є.

Наукова новизна роботи полягає у:

-- побудові моделі і визначенні закономірностей хрестоподібних хвиль в прямокутному басейні скінченних розмірів, що безпосередньо збуджуються коливаннями хвилепродуктора;

- доведенні можливості перекачки енергії від хвилепродуктора до хрестоподібних поверхневих хвиль;
- визначенні параметрів усталених режимів коливань хрестоподібних хвиль в прямокутних басейнах;
- встановленні можливості збудження хаотичних хрестоподібних поверхневих хвиль;
- розробці нового чисельного методу для інтегрування систем з запізнюванням;
- розробці покращеного а також нового алгоритму підрахунку показників Ляпунова;
- дослідженні впливу запізнювання на динаміку хрестоподібних хвиль.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вироблене розуміння сутності регулярних і хаотичних режимів доцільно використовувати при розрахунку і конструюванні різного роду пристроїв, що коливаються в рідині, випромінювачів, а також механізмів, призначених або придушувати, або створювати динамічний вплив. Результати дисертації можуть бути використані в суднобудівництві при проектуванні кораблів на повітряній подушці, де також виникають хрестоподібні хвилі. Також відзначимо, що проблема коливань пружних пластин, що контактують з рідиною при силовому навантаженні, є ключовою для розуміння динаміки конструкцій в акустиці судна.

Результати дисертації впроваджено в Інституті гідромеханіки НАН України (довідка про впровадження № 54-142-1/6 від 10.10.2024).

Особистий внесок здобувача.

- розвинення системи, що описує хрестоподібні хвилі;
- участь у проведенні експериментів;
- розробка нового чисельного методу для інтегрування систем з запізнюванням;
- розробка нового і покращеного алгоритму підрахунку показників Ляпунова;

- комп'ютерне моделювання систем що описують хрестоподібні хвилі;
- комп'ютерне дослідження систем що описують хрестоподібні хвилі;

Подальші дослідження полягають у врахуванні сейсмічного впливу на динаміку хрестоподібних хвиль.

Апробація результатів дисертації

Матеріали дисертації доповідались на 4 міжнародних конференціях:

1. The 14-th CHAOS 2021 International Conference, Greece, 8-11 June, 2021.
2. The 2st International Conference on Emerging Technology Trends on the Smart Industry and the Internet of Things, "TTSIIT-2023" 24-25 January, Ukraine-Iraq-Poland.
3. The 16th Chaotic Modeling and Simulation International Conference Heraklion, Crete, Greece, 13 – 16 June, 2023 Hybrid.
4. Комп'ютерна гідромеханіка: Дев'ята міжнародна науково-практична конференція, Київ. 1-2 жовтня 2024р.

Публікації.

Результати дисертації опубліковані в 6 роботах. А саме, у 5 статтях: у виданнях зі спеціальності, затверджених ВАК України, опубліковано 5 робіт і одна робота опублікована у виданні включеному до міжнародних наукометричних баз.

Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів, висновків, переліку використаних літературних джерел після кожного розділу.

Обсяг дисертації 133 сторінки.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Бурхливий розвиток машинобудування, приладобудування, авіа- і суднобудування, а також підвищена увага до проблем енергетичного комплексу і до енергозберігаючих технологій зумовили інтенсивний розвиток досліджень динаміки конструкцій, елементи яких контактують з рідиною. До таких споруд відносяться суднобудівні споруди і гідроакустичні пристрої.

Теоретичні основи теорії взаємодії рідини і конструкцій закладені в фундаментальних працях Релея [1]. Взаємний вплив динаміки пружних структур при їх хвильових рухах і рідини особливо актуально в проблемах морського і акустичного обладнання. Основоположними в цьому відношенні є праці Л. Я. Гутіна [2], В. Т. Грінченка [3], В. Т. Грінченка і І. В. Вовка [4, 5], В. В. Бабенко [6], Г. А. Воропаєва [7]. Відзначимо, що проблема коливань пружних пластин, що контактують з рідиною при силовому навантаженні, є ключовою для розуміння динаміки конструкцій в акустиці судна. Ця проблема в різних її аспектах привернула пильну увагу дослідників в останні десятиліття. Відзначимо основні праці для вирішення цього завдання Г. Лемба [8, 9], в яких було встановлено значний вплив рідини на коливання пластини.

Явища і процеси збудження поверхневих хвиль в рідині широко і постійно зустрічаються в природі: атмосфері або океані. Загальновідомо, що коливальні тіла, занурені в рідину, можуть генерувати різні типи хвиль на вільній поверхні рідини. Прикладом може служити утворення хрестоподібних хвиль, вперше відкритих М. Фарадеєм в 1831 році [10] (рис. 1), який спостерігав і вперше описав виникнення хрестоподібних хвиль на поверхні рідини. Саме в цій роботі [10] М. Фарадей також дав повний опис своїх спостережень про появу хвиль на вільній поверхні шару рідини при вертикальному коливанні басейну з рідиною. Ці хвилі пізніше були названі Фарадеєвськими або параметричними і сьогодні мають досить повне теоретичне пояснення, яке почалося з Релея [1]. У цій же роботі Фарадей докладно описав наступний експеримент: при зануренні вертикально в рідину одним кінцем дерев'яної дошки (див. Верхню ліву фігуру

на рис. 2) і її горизонтальними коливаннями по обидва боки від планки, перпендикулярно їй, виникали хвилі, немов зубці горизонтально лежачого гребінця. Ці хвилі, що утворюють прямий кут в горизонтальній площині з напрямком руху планки, отримали назву «хрестоподібні»(cross waves). Такого роду хвилі виникають навколо сфери [11], циліндра та інших тіл, які коливаються в рідині і розходяться, як спиці в колесі, від поверхні тіла. Так Фарадей вертикально піднімав і опускав пробку в воду (схема експерименту показана на верхньому правому малюнку на рис. 2). На поверхні навколо пробки промені хвиль розходилися. Саме ці хвилі виникають в «співаючих» келихах, перпендикулярних краю скла, якщо рухатися по краю мокрим пальцем руки (див. нижній рисунок на рис. 2). Крім хрестоподібних хвиль, коливальні хвильові тіла на поверхні рідини також збуджують звичайні резонансні хвилі, що поширюються по напрямку коливань хвилепродуктора. Ці хвилі збуджуються на низьких частотах і мають амплітуди, менші за величиною, ніж хрестоподібні. Інтерес представляє аналіз переходу від одного класу хвиль до іншого, класифікація та умови резонансів, зіставлення теоретичних висновків з результатами експериментальних досліджень. Саме цим питанням і присвячена ця робота. Зокрема, розглядається можливість хвильових структур на вільній поверхні рідини в прямокутному басейні, коли одним з її кінців є хвилепродуктор.

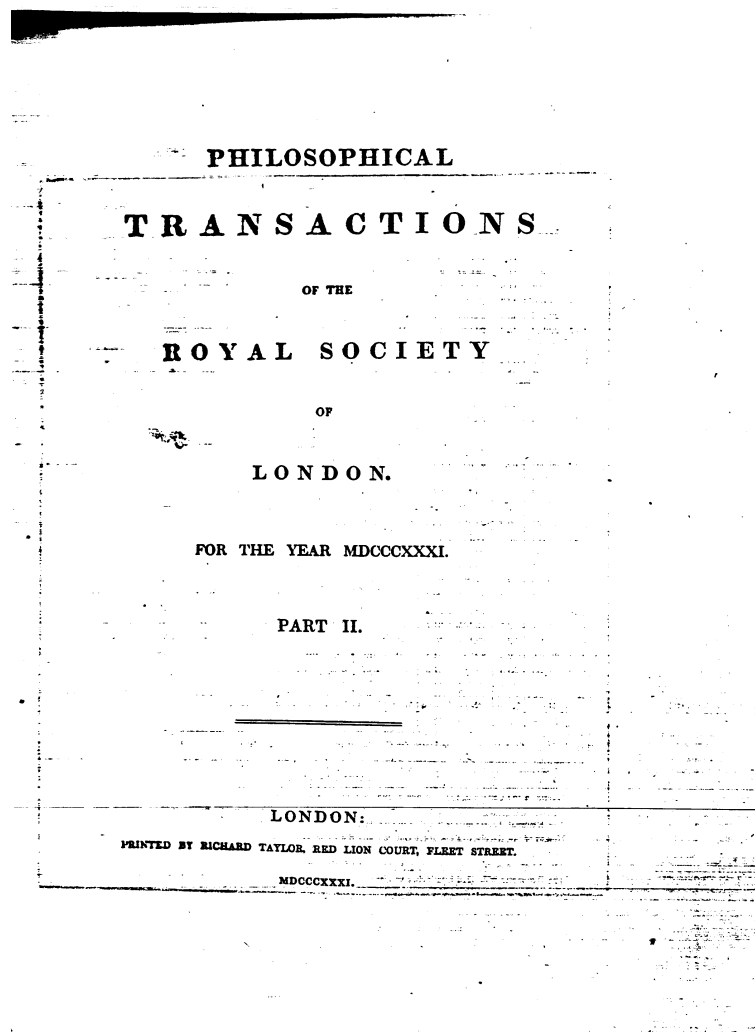
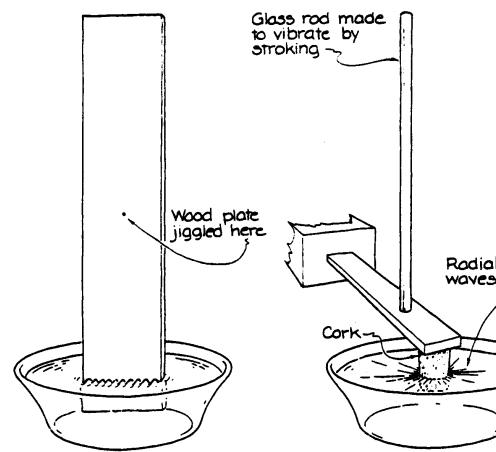
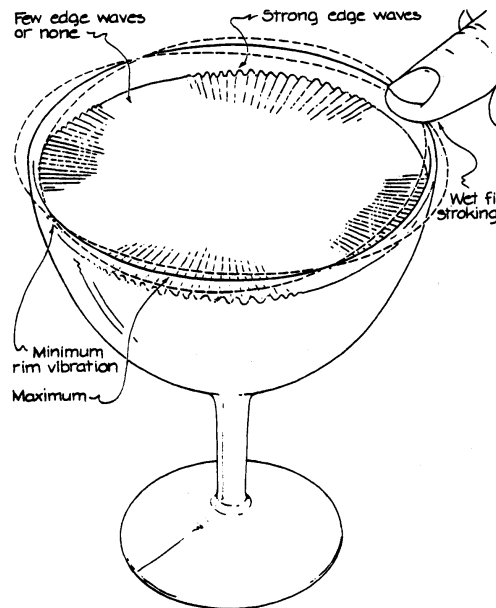


Рис. 1: Обкладинка журналу з відомою статтею Фарадея.

Такі хвилі були предметом багатьох досліджень протягом останніх 40 років. Як зазначалося в оглядовій статті [12], хрестоподібні хвилі виникають від нестійкості безпосередньо збуджених симетричних хвиль (так звана нестійкість, викликана розбитою симетрією).



How Michael Faraday experimented with edge waves



Setting up edge waves in a wineglass

Рис. 2: Схеми дослідів по збудженню хрестоподібних хвиль.

У роботі [13] проведені детальні результати експериментів і представлені з достатньою повнотою фотографії візуалізації руху поверхневих хвиль, викликаних віброуючою сферою. Танеда тримав частоту коливань постійною, і при збільшенні лише амплітуди коливань сфери він спостерігав перетворення безпосередньо збуджених осьових хвиль в параметричні несиметричні хвильові структури на нижньому фото, зображеному на рис. 3. Аналогічні дослідження були виконані в [11] і для випадку напівзануреного вертикально коливаючогося горизонтального циліндра скінченої довжини.

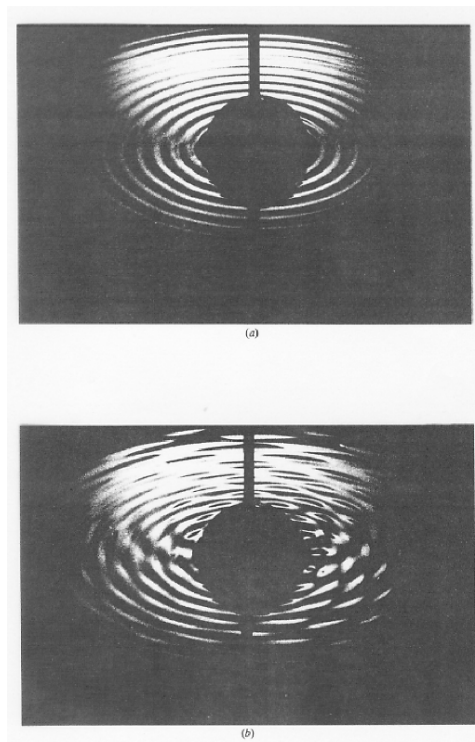


Рис. 3: Хвилі на поверхні при вертикальних коливаннях сфери.

К. Я. Гаррет [14] першим показав, як енергія хвилепродуктора перетворюється в хрестоподібні хвилі в прямокутному басейні скінченних розмірів, а саме: хвилепродуктор збуджує коливання середнього рівня рідини, які служать збудником хрестоподібних хвиль. При цьому він зазначив, що коливання середнього рівня рідини вільної поверхні недостатні для збудження хрестоподібних хвиль. Тому хвилі повинні підживлюватися енергією безпосередньо від хвилепродуктора, що він не зміг показати аналітично вирішенням задачі [15]. Нелінійну модель виникнення хрестоподібних хвиль розглянули пізніше Махоні [16], Джонс [17], С. Ліхтер [18-21], а також відомий фахівець з нелінійних хвиль Дж. Майлс [22]. Однак всі вони використовували розв'язки Т. Х. Гавелока [23], які отримано для хвиль в напівнескінченному прямокутному басейні. До цієї роботи не було аналітичного обґрунтування появи хрестоподібних хвиль без урахування коливань середнього рівня, безпосередньо від руху хвилепродуктора. У даній роботі отримано відповідний аналітичний розв'язок проблеми.

Вигляд хрестоподібних хвиль на хвилепродукторі показаний на фото проведених нами дослідів у басейні Інституту гідромеханіки НАН України (рис. 4)

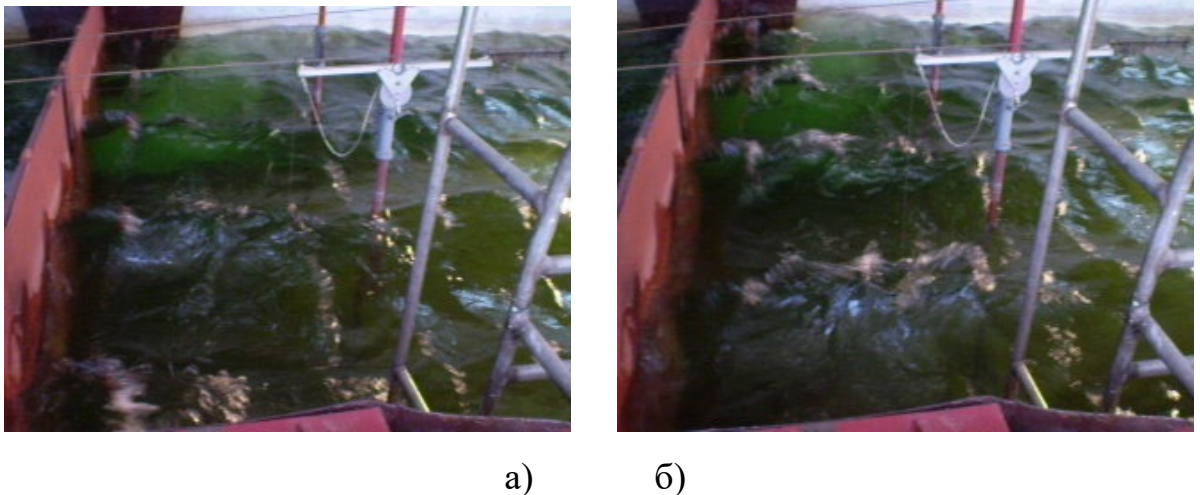


Рис. 4: поверхневі хвилі а) безпосередньо збуджувані хвилі б) усталені хрестоподібні хвилі

В експериментальній роботі М. Тацуно, С. Іну і Ж. С. Окабе [24] вперше виявлено перекачування енергії з безпосередньо збуджених хвиль в хрестоподібні хвилі при вертикальних коливаннях напівзануреного сферичного тіла в нескінченному басейні. У лінійному випадку ця задача була аналітично вирішена в роботі Л. М. Хокіна [25], а для нелінійного випадку - в роботі М. Беккер і Дж. У. Майлз [26].

У даній роботі розглядається басейн з водою з хвилепродуктором, і для вирішення завдання використовується метод суперпозиції Ламе [27]. Цей метод дозволяє побудувати просту математичну модель, яка показує, як перехресна хвиля може генеруватися безпосередньо при русі хвилепродуктора [15]. Ця нова математична модель збудження резонансних хрестоподібних хвиль може стати найпростішим поясненням формування хвильового малюнка на вільній поверхні рідини. Вона також дає умови стійкості системи і описує вплив різних внутрішніх форм коливань вільної поверхні рідини з власними частотами,

близькими до резонансної хрестоподібної. Відзначимо, що частотний спектр коливань вільної поверхні рідини дуже щільний, так що ці форми можна розглядати як і в параметричному резонансі. Крім теоретичного аналізу, проводилися лабораторні досліди, та чисельні дослідження. Були сфотографовані резонансні хвильові структури для різних частот збудження. Точні вимірювання за допомогою спеціальних приладів надавали інформацію про спектральні характеристики двох типів резонансу.

Останні десятиліття в науковому світі ознаменувалися значним відкриттям, а саме відкриттям нового класу режимів – хаотичних усталених режимів в детермінованих динамічних системах. Якщо встановлені режими в системі в більшості випадків хаотичні, то пізнання і розуміння динаміки системи пов'язані не з регулярними, а з її хаотичними рухами. Неможливо відповісти на питання надійності, міцності і т. д., якщо не розглядати хаотичні режими. Існування таких режимів в системі залежить від значень її фізичних параметрів і наявності зв'язків (навіть дуже слабких) з іншими системами. Невелика варіація параметрів може істотно змінити динамічний портрет системи. Тому аналіз динамічного хаосу в системах породжує необхідність виявлення і вивчення більш тонких характеристик систем, ніж ті, на яких базується розуміння закономірних режимів. У даній роботі вперше показана можливість реалізації хаотичних хрестоподібних хвиль з дворезимним наближенням поверхневих хвиль.

Фундаментальним питанням теорії хаосу і його проявів присвячені книги В. І. Арнольда [28], Дж. Гукенгеймер і Ф. Холмс [29], А. Ліхтенберг і М. Ліберман [30], Ю. І. Неймарк і П. С. Ланда [31], Г. М. Заславський і Р. З. Сагдеев [32], Ф. Мун [33], Г. Шустер [34], В. С. Аніщенко [35, 36], А. Ф. Вакакіс, Л. І. Маневич і Ю. В. Міхлін [37], С. П. Кузнєцов [38], В. Т. Грінченко, В. Т. Мацепура і А. А. Снарський [39], Т. С. Краснополюска і А. Я. Швець [40], Н. А. Магнітський [41], В. В. Яновський [42-44]. Деякі положення загальної теорії хаосу і її застосування будуть більш детально описані в розділі 2.

І хоча вперше динаміка хаосу була описана на початку 60-х років минулого століття американським вченим Е.Н. Лоренцом [45], який проводив інтенсивні чисельні експерименти з вивчення термоконвекції в значно спрощеній моделі атмосфери, ця його робота залишалася практично непоміченою для широкого кола гідромеханіків протягом двох десятиліть. Тільки в 80-х роках почалося стрімке зростання кількості наукових робіт з вивчення хаотичних коливань і хвиль [31,32].

Вперше досліджено хаотичні усталені режими коливань у гідропружних системах та доведено їх появу в динаміці поверхневих хвиль у рідині в циклі робіт Дж. Майлза у 1984 році [46-48]. Ці роботи були в подальшому продовжені в його роботах зі своїми учнями [49, 12, 50]. Хаотичні хвилі були експериментально вперше виявлені в знаменитій американській лабораторії Дж. Голлуба [51] при аналізі хвиль на поверхні шару рідини з параметричним збудженням. Вони практично одночасно вивчалися горьківською школою нелінійної фізики і механіки під керівництвом М. І. Рабіновича [52], де велися роботи з теоретичного та експериментального вивчення поверхневих хвиль в рідині. Хаотичним хвилям на поверхні рідини під час коливань резервуарів були присвячені також роботам Е. Мерона і Дж. Прокачча [53], М. Умеки і Т. Камбе [54,55], Дж. Кроуфорд і Е. Кноблех [56]. У роботах М. Пейдуссіса і Ф. Муна [57] був виявлений хаос при вивченні коливань трубопроводів в рідині. При цьому використовувалися маловимірні моделі розподілених систем континуума рідини на основі методу Бубнова-Галеркіна. Теоретичні та експериментальні дослідження реалізації хаотичних хрестоподібних хвиль в прямокутному басейні на основі розв'язку для напівнескінченного басейну були дані в серії робіт С. Ліхтера і його учнів [18-21, 58, 59]. Витончені досліди з вивчення хаотичних параметричних хвиль Фарадея на поверхні пластини за її вертикальних коливань наведені в роботах В. ван дер Ваттера і його колег [60, 61].

Останнім часом спостерігається великий інтерес до динамічних систем, що мають запізнювання у часі. Динамічні процеси пов'язані з передачею маси,

енергії, інформації супроводжуються наявністю запізнювання. Таке запізнювання може бути обумовлене різними причинами – обмеженістю швидкості поширення взаємодії, наявністю інерційності деяких елементів, обмеженістю протікання технологічних процесів та інше[62].

Факторами запізнювання не можна нехтувати в інженерних дослідженнях при розгляді великих за розміром механічних систем і навпаки в наносистемах теплообміну.

В багатьох випадках складних фізико або фізико-механічних процесів написання чіткої математичної моделі викликає великі труднощі. Тоді доводиться для опису впливу деяких факторів вважати, що від впливу до чіткого наслідку проходить деякий проміжок часу – запізнювання, що приводить до систем диференціальних рівнянь з запізнюванням [63].

Розв'язок систем диференціальних рівнянь з запізнюванням зазвичай знаходять чисельними методами. У випадку, коли величина запізнювання більша, ніж крок чисельного інтегрування, знахоження чисельного розв'язку систем диференціальних рівнянь з запізнюванням не викликає складності. Для цього використовують інтерполяцію передісторії моделі і чисельні методи для звичайних систем диференціальних рівнянь, наприклад, явні методи Рунге-Кутти. Застосовуючи метод кроків, отримують чисельний розв'язок на необхідний проміжок часу. Проте, якщо проміжок часу, на якому розглядається динамічна система, досить великий у порівнянні з запізнюванням, то число кроків збільшується. Це уповільнює процес чисельного інтегрування і приводить до накопичення похибки. У випадку малих за величиною запізнювань, застосовують розклад в ряд Тейлора по запізнюванню і далі розв'язують звичайну систему диференціальних рівнянь чисельним методом, наприклад, методом Рунге-Кутти. Такий підхід має обмеження на величину запізнювання і не може бути застосований для багатьох моделей задач. Тому часто доводиться застосовувати крок чисельного інтегрування більший, ніж величина запізнювання, і неперервні неявні методи Рунге-Кутти. Тоді на

кожному кроці чисельного інтегрування доводиться розв'язувати системи нелінійних рівнянь, що ускладнює алгоритм розв'язку.

Вивченню розв'язків різного типу диференціальних рівнянь з запізнюванням і систем диференціальних рівнянь з запізнюванням присвячені роботи [64-72]. Але запропоновані методи знаходження розв'язку динамічних систем з запізнюванням, мають певні обмеження на величину запізнювання або складності в підрахунку числового розв'язку. Наприклад, в роботах [65] та [66] для чисельного розв'язку динамічних систем з запізнюванням використовуються неперервні неявні методи Рунге-Кутти, що приводять до необхідності розв'язання нелінійних систем на кожному кроці чисельного інтегрування. А це значно ускладнює процес програмування, збільшує час чисельних підрахунків. В роботі [67] використано методи Рунге-Кутти та розклад в ряд Тейлора по запізнюванню, що має суттєві обмеження на величину запізнювання.

Ми побудуємо явний гідбридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням п'ятого порядку збіжності, який базується на явних методах Рунге-Кутти та побудові поліномів Ньютона для передісторії моделі. Було використано явні методи Рунге-Кутти п'ятого порядку, оскільки вони є найбільш поширеними для звичайних систем диференціальних рівнянь завдяки зручності їх використання і швидкості обчислення числового розв'язку. Ми доведемо збіжність цього методу і зробимо оцінку локальної похибки на кожному кроці чисельного інтегрування. Ми також встановимо основні принципи побудови таких гібридних методів вищих порядків збіжності для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Дослідження впливу запізнювання на динаміку хрестоподібних хвиль проводиться вперше в даній роботі.

Як відомо, однією з необхідних умов хаотичності динамічної поведінки системи є її чутливість до заданих початкових умов [73-77]. Кількісним критерієм такої чутливості зазвичай є старший показник Ляпунова (експонента Ляпунова) [74, 78-88]. На практиці для знаходження СПЛ використовують

алгоритм Бенеттіна. Запропонований колективом авторів у 1976 р. для консервативної системи Hénon – Heiles [76], цей метод є ефективним у першу чергу для консервативних систем. У 1980 р. ці автори використали власні результати для гладких гамільтонових динамічних систем [75]. Зважаючи на відсутність альтернатив, його часто застосовують і для дисипативних систем. Проте в цьому випадку неминуче виникають помилки, пов'язані з тим, що розмірність атратора такої системи є нижчою від розмірності фазового простору. А застосування класичного алгоритму Бенеттіна у випадку існування в системі декількох атракторів, зокрема прихованих, є, взагалі кажучи, некоректним.

У цій роботі запропоновано метод підвищення точності алгоритму Бенеттіна для дисипативної динамічної системи. А також розроблено повністю новий універсальний алгоритм підрахунку показників Ляпунова.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 1.

1. Rayleigh M.A. The Theory of Sound / M.A. Rayleigh, S.W. Strutt // MacMillan. London. – 1877. – vol. 1. – P. 504.
2. Гутин Л. Я. Избранные труды / Л. Я. Гутин. – Л. : Судостроение, 1977. – 597 с.
3. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах : Монографія / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наукова думка, 1981. – 284 с.
4. Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках : Монографія / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк. – К. : Наукова думка, 1986. – 238 с.
5. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики : Монографія / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацьпура. – К. : Интерсервис, 2013. – 572 с.
6. Бабенко В. В. Пограничный слой на эластичных пластинах: Монографія / В. В. Бабенко, М. В. Канарский, В. И. Коробов. – К. : Наукова думка, 1993. – 264 с.
7. Воропаев Г. А. Моделирование турбулентных сложных течений : Монографія / Г. А. Воропаев, Ю. А. Птуха. – К. : Наукова думка, 1991. – 165 с.
8. Lamb H. Hydrodynamics / H. Lamb, - Dover, New-York. – 1945. – P. 760.
9. Lamb H. On waves in an elastic plate / H. Lamb // Proc. R. Soc. London. – 1917. – Vol. A93. – P. 114-128.
10. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces / M. Faraday // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1831. – Vol. A121. – P. 299–340.
11. Taneda S. Visual observations of the flow around a half-submerged oscillating circular cylinder / S. Taneda // Fluid Dyn. Research. – 1994. – Vol. 13. – P. 119–151.
12. Miles J. W. Parametrically forced surface waves / J. W. Miles, D. Henderson // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 22. – P. 143–165.

13. Takens F. Detecting Strange Attractors in Fluid Turbulence / F. Takens / / Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – Vol. 898. – P. 366–375.
14. Garrett C. J. R. Cross waves / C. J. R. Garrett / / J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 41. – P. 837–849.
15. Krasnopolskaya T. S. Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell / T. S. Krasnopolskaya, G. J. F. van Heijst / / J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 328. – P. 229–252.
16. Mahony J. J. Cross-waves. Part 1. Theory / J. J. Mahony / / J. Fluid Mech. – 55, 2. – P. 229-244.
17. Jones A. F. The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance / A. F. Jones / / J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 138. – P. 53-74.
18. Lichter S. Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves / S. Lichter, J. Chen – J. Fluid Mech. – 1987. – 183. – P. 451.
19. Lichter S. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves / S. Lichter, W. B. Underhill. – Phys. Rev. – 1987. – A35. – P. 5282–5284.
20. Lichter S. Stability of steady cross-waves: theory and experiment / S. Lichter, A. J. Bernoff. – Phys. Rev. – 1988. – A37. – P. 1883–1667.
21. Ayanle H. Spanwise modal competition in cross-waves / H. Ayanle, A.J. Bernoff, S. Lichter / / Physica D – 1990. – Vol. 43, – P. 87-104.
22. Miles J. W. Parametrically excited, standing cross-waves / J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 186. – P. 119-127.
23. Havelock T. H. Forced surface waves on water / T. H. Havelock / / Phil. Mag. (Ser. 7). – 1929. – Vol. 8. – P. 569–576.
24. Tatsuno M. Transfiguration of surface waves / M. Tatsuno, S. Inoue, J. Okabe / / Rep. Res. Inst. Appl. Mech. – 1969. – Vol. 17. – P. 195–215.
25. Hocking L. M. Capillary-gravity waves produced by a heavy body / L. M. Hocking / / J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 186. – P. 337-349.
26. Becker J. M. Progressive radial cross-waves / J. M. Becker, J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 245. – P. 29–46.

27. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / G. Lamé. – Paris : Bachelier, 1852. – 335 p.
28. Arnold V. I. Ergodic Problems of Statistical Mechanics./ V. I. Arnold, A. Avez, – New York : Benjamin, 1968. – 354 p.
29. Guckenheimer J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. – New York : Springer, 1983. – 459 p.
30. Lichtenberg A. J. Regular and Stochastic Motion / A. J. Lichtenberg, M. A. Leiberman : – New-York. : Springer, 1983. – 499 p.
31. Neimark Yu. I. Stochastic and Chaotic Oscillations / Yu. I. Neimark, P. S. Landa. : Springer, 1992. – 512 p.
32. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику : От маятника до турбулентности и хаоса : Монография / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 368 с.
33. Moon F. C. Chaotic Vibrations / F. C. Moon. – New York : Wiley, 1987. – 329 p.
34. Schuster H. G. Deterministic Chaos / H. G. Schuster. – Weinheim. :verlagsgeseiischaf, 1988. – 273 p.
35. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: Монография / В. С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
36. Анищенко В. С. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах : Монография / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др. – М.-Ижевск, 2003. – 530 с.
37. Vakakis A. F. Normal modes and localization in nonlinear systems / A. F. Vakakis, L. I. Manevich, Yu. V. Mikhlin. – New York : Wiley, –1996. – 207 p.
38. Кузнецов С. П. Динамический хаос : Монография / С. П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001. – 295 с.
39. Гринченко В. Т. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы : Монография / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – К. : Наукова думка, 2005. – 263 с.

40. Краснопольская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением : Монография / Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. – 278 с.
41. Магницкий Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
42. Болотин Ю. Л. Конструктивный хаос / Ю. Л. Болотин, А. В. Тур, В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2005. – 420 с.
43. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. В 2 т. Т. 1 / В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2006. – 456 с.
44. Яновский В. В. Лекции о нелинейных явлениях. В 2 т. Т. 2 / В. В. Яновский. – Харьков : Институт монокристаллов, 2007. – 456 с.
45. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz / / J. Atmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
46. Miles J. W. Internally resonant surface waves in circular cylinder / J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 149. – P. 1–14.
47. Miles J. W. Nonlinear Faraday resonance / J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 146. – P. 285–302.
48. Miles J. W. Resonantly forced surface waves in circular cylinder / J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 149. – P. 15–31.
49. Henderson D. M. Single-mode Faraday waves in small cylinders / D. M. Henderson, J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 213. – P. 95–109.
50. Henderson D. M. Faraday waves in 2 :1 resonance / D. M. Henderson, J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 222. – P. 449–470.
51. Ciliberto S., Gollub J. P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves/ S. Ciliberto, J. P. Gollub / / J. Fluid. Mech. – 1985. – Vol. 158. – P. 381–398.
52. Рабинович М. И., Сущик М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости / М. И. Рабинович, М. М. Сущик / / Усп. физич. наук. – 1990. – Т. 170, вып. 1. – С. 3–64.

53. Meron E. Low-dimensional chaos in surface waves : Theoretical analysis of an experiment / E. Meron, J. Procaccia / / Phys. Rev. – 1986. – Vol. A34. – P. 3221–3237.
54. Kambe T. Nonlinear dynamics of two-mode interaction in parametric excitation of surface waves / T. Kambe, M. Umeki / / J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 139. – P. 461–471.
55. Umeki M. Nonlinear dynamics and chaos in parametrically excited surface waves / M. Umeki, T. Kambe / / J. Phys. Soc. Japan. – 1989. – Vol. 28. – P. 140–154.
56. Crawford J. D. Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics / J. D. Crawford, E. Knobloch / / Annu. Rev. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 23. – P. 341–387.
57. Paidoussis M. P. Nonlinear and chaotic fluid-elastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid / M. P. Paidoussis, F. C. Moon / / J. Fluids & Structures. – 1988. – Vol. 2. – P. 567–591.
58. Shemer L. Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency / L. Shemer, S. Lichter. – Phys. Fluids. – 1987. – 30. – P. 3427–3433.
59. Shemer L. The mode number dependence of neutral stability of cross-waves / L. Shemer, S. Lichter. – Exps Fluids. – 1990. – 9. – P. 148–152.
60. Binks D. Nonlinear pattern formation of Faraday waves / D. Binks, W. van de Water / / Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78. – P. 4043–4048.
61. Binks D. Effect of depth on the pattern formation of Faraday waves / D. Binks, M/-T. Westra, W. van de Water / / Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 5010–5018.
62. Kyrychko Y.N. On the use of delay equations in engineering applications/ Y.N. Kyrychko, S.J. Hogan // Journal of Vibration and Control,16(7–8) – 2010 – 943–960 p.
63. Титов Н.К. Моделирование систем с запаздыванием. / Н.К. Титов, В.К. Успенский. –Ленинград, Энергия, 1969. -100с.

64. Gu K. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems./ K. Gu , S.I. Niculesc // ASME J Dyn Syst-T, V. 125, - 2003,- P. 158–165.
65. Bellen A. Numerical Methods for Delay Differential Equations./ A. Bellen, M. Zennaro. - Clarendon Press Oxford, - 2003. – 526p.
66. Gimeno J. On time Delay Deferential Equations./ J. Gimeno, I. Alquezar // Final project thesis master of advanced mathematics facultat de matematiques universitat de Barcelona,- 2015. – 135p.
67. Siregar B.H. Numerical Solution of Delayed SIR Model of Tuberculosis with Combination of Runge Kutta Method and Taylor Series Approach./ B.H. Siregar , Y.R. Rangkuti, A. Mansyur // Proceedings of The 5th Annual International Seminar on Trends in Science and Science Education, AISTSSE 2018, 18-19 October 2018, Medan, Indonesia.- P. 34-42.
68. Cimen E. On the Solution of the Delay Differential Equation via Laplace Transform./ E. Cimen, S. Uncu // Communications in Mathematics and Applications, Vol. 13, No. 3, - 2020, - P. 284–304.
69. Guglielmi N. Computing breaking points in implicit delay differential equations./ N. Guglielmi, E. Hairer // Advances in Computational Mathematics, Vol. 29 (3), - 2008, -P. 229-247.
70. Ibrahim F. Extended One-Step Methods for Solving Delay-Differential Equations./ F. Ibrahim, A.A. Salama , A. Quazzi , S. Turek // Applied Mathematics & Information Sciences, Vol. 8 (7), - 2014, - P. 941-948.
71. Jaaffar N.T. Numerical Approach for Solving Delay Differential Equations with Boundary Conditions./ N.T. Jaaffar, Z.A. Majid, N. Senu // MDPI Mathematics, V. 8, - 2020, - P. 1-18.
72. Rebenda J. Numerical algorithm for nonlinear delayed differential systems of nth order./ J. Rebenda, Z. Smarda // Advances in Difference Equations, Vol. 26, - 2019, - P. 1-16.
73. Кузнецов С. П. Динамический хаос./ С. П. Кузнецов – Москва: Физматлит, 2001. – 296 с.

74. Moon F. C. Chaotic Vibrations: An introduction for Applied Scientists and Engineers / F. C. Moon. – New York : Wiley, 2004. – 309 p.

75. Benettin G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory./ G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. Strelcyn // Meccanica. – 1980. – **15**, No. 1. – P. 9–20.

76. Benettin G. Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J. Strelcyn // Phys. Rev. A. – 1976. – **14**, No. 6. – P. 2338–2342

77. Laskar J. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping./ J. Laskar, C. Froeschlé, A. Celletti // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1992. – **56**, Nos. 2-3. – P. 253–269.

78. Berge P. L'Ordre dans le chaos. Vers une approche deterministe de la turbulence. / P. Berge, Y. Pomeau, Ch. Vidal –Paris: Hermann, 1985. – 309 p.

79. Краснопольская Т. С. Свойства хаотических колебаний жидкости в цилиндрических баках./ Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 6. – С. 52–61.

80. Краснопольская Т. С. Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источниками энергии./ Т. С. Краснопольская, А. Ю. Швец // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 10. – С. 61–68.

81. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем/ В. И. Оселедец // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1968. – **19**. – С. 179–210.

82. Crutchfield J. P. Chaos / J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, R. S. Shaw // Sci. Am. – 1986. – **255**, No. 6. – P. 46–57.

83. Krasnopolskaya T. S. Acoustic chaos caused by the Sommerfeld effect./ T. S. Krasnopolskaya // J. Fluid Struct. – 1994. – **8**, No. 7. – P. 803–815.

84. Krasnopolskaya T. S. Chaos in acoustic subspace raised by the Sommerfeld–Kononenko effect./ T. S. Krasnopolskaya // Meccanica. – 2006. – **41**, No. 3. – P. 299–310.

85. Krasnopolskaya T. S. Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity/ T. S. Krasnopolskaya , V. V. Meleshko, G. W. M. Peters, H. E. H. Meijer // Eur. J. Mech. B-Fluids. – 1999. – **18**, No. 5. – P. 793–822.

86. Meleshko V. Coherent structures and scales of Lagrangian turbulence/ V. V. Meleshko, T. S. Krasnopolskaya, G. W. M. Peters, H. E. H. Meijer, S. Gavrilakis, L. Machiels, P. A. Monkewitz (eds.). // Advances in Turbulence. VI. Fluid Mechanics and its Applications. – Vol. 36. – Dordrecht: Springer, 1996. – P. 601–604.

87. Shvets A. Y. Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply / A. Y. Shvets, T. S. Krasnopolskaya, A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev, M. A. Sokolovskiy (eds.). // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence – IUTAM Bookseries. – Vol. 6. – Dordrecht: Springer, 2008. – P. 313–322.

88. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence / F. Takens, D. Rand, L. S. Young (eds). – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 898. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1981. – P. 366–381.

РОЗДІЛ 2. СУЧАСНІ МЕТОДИ ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1. ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ТА АТРАКТОРИ

1. Динамічна система та її математична модель

Під динамічною системою розуміють будь-який об'єкт чи процес, для якого однозначно введено поняття стану як сукупності деяких величин в даний момент часу і вказаний оператор, який описує еволюцію цього стану, починаючи з початкового. Спосіб введення оператора еволюції визначає математичну модель відповідну до даної динамічної системи.

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введені параметри (координати) системи, які однозначно визначають її стан, та оператор еволюції, який дозволяє визначати зміну стану системи з плином часу.

При дослідженні однієї і тієї самої динамічної системи, в залежності від ступеня врахування різних факторів, можна отримати різні математичні моделі, які описують якісно різні динамічні процеси. Тому під динамічною системою варто розуміти саме її математичну модель.

Розглянемо динамічну систему, яка моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Якщо вважати (x_1, x_2, \dots, x_n) координатами точки X в деякому n -вимірному просторі, тоді геометричним представленням стану системи і буде точка X . Така точка називається зображуючою точкою, а відповідний n -вимірний простір – фазовим простором динамічної системи. Еволюції системи відповідатиме рух зображуючої точки X вздовж деякої кривої, яка називається фазовою траєкторією. Швидкість зображуючої точки буде визначатися вектором $\vec{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$. Таким чином, динамічну систему (1) можна представити у векторному вигляді:

$$\dot{X} = F(X), \quad (2)$$

де $F(X)$ - вектор-функція розмірності n . [1].

2. Класифікація динамічних систем

Якщо динамічна система задана рівнянням (2), тоді кожному початковому стану $X(t_0)$ у фазовому просторі ставиться у відповідність єдиний $X(t), t > t_0$, куди за час $t - t_0$ перемістилася зображуюча точка, рухаючись у відповідності до оператора еволюції. В операторній формі (2) можна записати у вигляді:

$$X(t) = T(X(t_0)), t > t_0. \quad (3)$$

Класифікують динамічні системи за властивістю оператора еволюції T [2].

Лінійними називаються такі динамічні системи, оператори еволюції яких є лінійними функціями.

Розрізняють неперервні та дискретні оператори і відповідно системи з неперервним та дискретним часом. Неперервними називаються динамічні системи, стан яких може бути визначений в будь-який момент часу $t > t_0$. Такі системи називаються ще потоками. Дискретними називаються динамічні системи, стан яких визначається на деякій множині (дискретній) значень часу t_k . Такі системи називаються ще каскадами.

За енергетичною ознакою динамічні системи поділяються на консервативні та неконсервативні. Консервативними називаються динамічні системи, запас енергії яких незмінний. В механіці такі системи називаються ще гамільтоновими. Для таких систем об'єм елемента фазового простору не змінюється з плином часу, а дивергенція векторного поля швидкостей дорівнює нулю:

$$\operatorname{div} F = \sum_{k=1}^n \frac{dF_k}{dx_k} = 0.$$

Неконсервативними називаються динамічні системи, запас енергії яких змінюється з плином часу. Неконсервативна динамічна система називається

дисипативною, якщо енергія системи зменшується внаслідок тертя, розсіювання або інших факторів. В таких системах елемент фазового простору зменшується з плином часу, а дивергенція векторного поля швидкостей від'ємна. Переважна більшість динамічних систем є дисипативними.

Коливальними називаються динамічні системи, в яких виникають деякі коливання. Серед коливальних систем грають важливу роль автоколивальні системи, які принципово є нелінійні і неконсервативні.

Автоколивальними називаються динамічні системи, в яких енергія зовнішнього джерела збудження перетворюється в енергію незатухаючих коливань. При цьому основні параметри цих коливань (частота, форма, амплітуда і т.д.) визначається параметрами системи і, взагалі кажучи, не залежить від початкового стану системи [3].

3. Регулярні та хаотичні атрактори

Еволюцію дисипативних систем розділяють на два класи [2]: клас перехідних нестационарних рухів зображуючої точки, які відповідають перехідному процесу динамічної системи від початкової до граничної множини станів, та клас усталених стаціонарних рухів, фазові траєкторії яких повністю належать граничним множинам.

Атрактором динамічної системи називається гранична множина в фазовому просторі до якої притягуються всі траєкторії з деякої області. Ця область називається басейном притягіння системи. Атрактори існують лише в дисипативних системах.

Рух зображуючої точки, якому відповідає фазова траєкторія з басейну притягіння, є перехідним процесом. Усталений рух характеризується належністю фазової траєкторії до атрактора.

Регулярними називаються атрактори, на яких траєкторії стійкі за Ляпуновим і за Пуассоном. До регулярних атракторів належать [4]:

- 1) положення рівноваги, якому відповідає точка у фазовому просторі;
- 2) граничний цикл, фазові траєкторії яких мають - замкнені лінії;

3) квазіперіодичний атрактор, якому відповідає тороїдальна поверхня.

В фазовому просторі розмірності $n \geq 3$ існують складні неперіодичні рухи, геометричним образом яких є складні притягуючі множини. Фазові траєкторії цих рухів представляють собою нескінчену лінію, яка ніде не перетинається, при $t \rightarrow +\infty$ не залишає деякої обмеженої області і не притягується до жодних регулярних атракторів. Час від часу траєкторія повертається в окіл початкового стану, інакше вона б залишила обмежену область, але ці повернення мають не передбачуваний характер. Такі атрактори називаються дивними або хаотичними.

Вперше таку властивість динамічних систем відкрив у 1963 році Е.Лоренц [5] при чисельному дослідженні динаміки трьохвимірної моделі теплової конвекції, а термін „дивний атрактор” був вперше запропонований через вісім років в роботі Д.Рюеля та Ф.Такенса [6].

Проте для дивного атрактора залишається передбачуваність стосовно детермінованості оператора еволюції $T_t : X(t_0) \mapsto X(t)$ (3). Для розв'язку системи (2), як і у випадку регулярних атракторів, виконується теорема існування і єдиності, тому він однозначно відтворюється при заданих початкових умовах. Для визначення складних неперіодичних автоколивань детермінованих динамічних систем, математичним образом яких є дивні атрактори, використовують термін детермінований хаос.

Хаотичний атрактор – це складний аперіодичний рух в фазовому просторі, який стійкий за Пуассоном і нестійкий за Ляпуновим.

Принципова відмінність регулярних та хаотичних атракторів полягає в тому, що стійкість останніх за Пуассоном завжди супроводжується експоненціальною нестійкістю за Ляпуновим. Як наслідок, це призводить до експоненціальної розбіжності близьких в початковий момент часу фазових траєкторій та перемішуванню.

Отже граничні множини (атрактори) до яких притягуються траєкторії розв'язків динамічної системи поділяють на регулярні та хаотичні. Регулярні це положення рівноваги (точка у фазовому просторі), граничні цикли (фазові

траєкторії - замкнені лінії), квазіперіодичні атрактори (тороїдальна поверхня у фазовому просторі). Хаотичний атрактор – це складний аперіодичний рух в фазовому просторі, який стійкий за Пуассоном і нестійкий за Ляпуновим.[1].

2.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

2.2.1. Означення та постановка основної початкової задачі

Математична модель динамічних процесів з запізнюванням описується диференціальним рівнянням з запізнюванням або в більш складних випадках системою диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Диференціальними рівняннями з запізнюванням називаються диференціальні рівняння, в які невідома функція та її похідні входять, взагалі кажучи, за різних значень аргумента. Наприклад

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)). \quad (1)$$

Число $\tau > 0$ визначає величину наслідків. Якщо $\tau = 0$, тобто післядія відсутня, то рівняння (1) перетворюється в звичайне диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \quad (2)$$

В рівнянні (2) швидкість динамічних процесів визначається станом системи в заданий момент часу t , тобто в математичній моделі (2) не враховується залежність швидкості динамічних процесів від стану системи в момент часу, що передує t . Врахування цієї залежності, тобто властивостей пам'яті і спадковості динамічної системи, післядія в законі взаємодії в динамічній системі приводить до рівняння (1).[7].

Для найпростішого диференціального рівняння з запізнюванням (1), де $\tau > 0$ - стала, основна початкова задача полягає в відшукуванні неперервного розв'язку $x(t)$ рівняння (1) при $t > t_0$, за умови, що $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$,

де $\varphi(t)$ - задана неперервна функція, яка називається початковою. Відрізок $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, на якому задана початкова функція називається початковою множиною і позначається E_{t_0} ; точка t_0 називається початковою точкою. Зазвичай припускається, що $x(t_0 + 0) = \varphi(t_0)$.

Якщо в рівнянні (1) і в початкових умовах $x(t)$, f і $\varphi(t)$ вважати вектор-функціями, то ми отримаємо постановку основної початкової задачі для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

У випадку змінного запізнювання $\tau = \tau(t) \geq 0$ в рівнянні (1) також потребується знайти розв'язок цього рівняння при $t > t_0$, причому на початковій множині E_{t_0} , яка складається з точки t_0 і з тих значень $t - \tau(t)$, які менші за t_0 при $t \geq t_0$, $x(t)$ вважається співпадаючою з заданою початковою функцією $\varphi(t)$.

Якщо потрібно знайти розв'язок на відрізку $t_0 \leq t \leq T$, то початкова множина $E_{t_0 T}$ складається з точки t_0 і тих значень $t - \tau(t)$, які менші за t_0 при $t_0 \leq t \leq T$. [8].

2.2.2. Теореми існування та єдиності

Розглянемо основну початкову задачу для диференціального рівняння з запізнюванням наступного вигляду:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))), \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t) \text{ на початковій множині } E_{t_0}.$$

Теорема 1. Якщо в рівнянні (1) всі $\tau_i(t)$ неперервні при $t_0 \leq t \leq t_0 + H$ ($H > 0$) і невід'ємні, а функція f неперервна в околі точки $(t_0, x(t_0), x(t_0 - \tau_1(t_0)), \dots, x(t_0 - \tau_m(t_0)))$ і задовольняє умові Ліпшиця за всіма аргументами, починаючи з другого, початкова функція $\varphi(t)$ неперервна на E_{t_0} ,

то існує єдиний розв'язок $x(t)$ основної початкової задачі для рівняння (1) при $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, де h достатньо мале.

Теорема 2. Розв'язок рівняння (1), яке задовольняє умовам теореми 1, неперервно в просторі C_0 залежить від початкової функції. Більш того, якщо

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \delta, \quad \delta > 0$$

на E_{t_0} , то

$$\left| x(t)_{\varphi_1} - x(t)_{\varphi_2} \right| < \delta e^{(m+1)N(t-t_0)}$$

при $t > t_0$. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $t - t_0 < T$ можливо вибрати $\delta(\varepsilon) > 0$ на стільки малим, що

$$\left| x(t)_{\varphi_1} - x(t)_{\varphi_2} \right| < \varepsilon$$

Постановка основної початкової задачі та аналогічні теореми мають місце і для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням.

Якщо

$$d \leq \tau_1(t) \leq D, \dots, d \leq \tau_m(t) \leq D, \quad t \geq t_0, \quad D, d = \text{const}, \quad D \geq d > 0, \quad (2)$$

то найбільш природним методом розв'язування рівнянь вигляду (1) є, так званий, метод кроків (або метод послідовного інтегрування) з кроком d . Суть цього методу полягає в тому, що на проміжку $t \in [t_0, t_0 + d]$ розв'язок рівняння(системи) (1) визначається з диференціальних рівнянь без запізнювання:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))) = \\ &= f(t, x(t), \varphi(t - \tau_1(t)), \dots, \varphi(t - \tau_m(t))) \\ x(t_0) &= \varphi(t_0) \end{aligned}$$

Приймаючи за початкову точку $t_0 + d$, а за початкову функцію отриманий розв'язок аналогічно знаходимо розв'язок на проміжку $t \in [t_0 + d, t_0 + 2d]$. І т. д. Детальніше в [8].

З даного методу витікає, що для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням вигляду (1), за умови (2), справедливі теореми, що мають місце для систем без запізнювання. Зокрема отримуємо, як і для звичайних систем, існування і єдиність розв'язку системи (1) на проміжку $t \in [t_0, +\infty]$ (пункти 1.7, 1.9 з [9]).

Отже матеріали наведені в даному пункті обґрунтовують коректність проведеного дослідження.

2.3. МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

2.3.1. Методи Рунге-Кутти

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в автономному вигляді:

$$(y^J)' = f^J(y^1, \dots, y^n), J = 1, \dots, n \quad (1)$$

s - стадійним методом чисельного інтегрування Рунге-Кутти для задачі (1) називається метод:

$$g_i^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J(g_j^1, \dots, g_j^n), i = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$y_1^J = y_0^J + \sum_{j=1}^s b_j h f^J(g_j^1, \dots, g_j^n),$$

де y_0^J - початкове значення,

y_1^J - шукане наближення невідомої функції y^J , за один крок чисельного інтегрування h ,

g_i^J - суть попередні наближення розв'язку.

$J = 1, \dots, n$.

Зазвичай коефіцієнти c_i задовольняють умові

$$c_i = \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij}. \quad (3)$$

Метод (2) має порядок апроксимації p , якщо для досить гладких задач (1) має місце наступна нерівність:

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq Kh^{p+1}, \quad y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t)),$$

де K - стала,

тобто ряди Тейлора для точного та наближеного розв'язку співпадають до члена h^p включно.

Однією з умов того, що s -стадійний метод Рунге-Кутти має порядок s є:

$$\sum_{j=1}^s b_j = 1. \quad (4)$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в не автономному вигляді:

$$(y^J(t))' = f^J(t, y^2(t), \dots, y^n(t)), \quad J = 2, \dots, n, \quad (5)$$

де t - час.

Позначимо $y^1 \equiv t$, тоді $(y^1)' = 1$. Маємо систему вигляду (1) :

$$\begin{cases} (y^1)' = 1, \\ (y^J)' = f^J(y^1, y^2, \dots, y^n), \quad J = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Враховуючи формули (3), (4) маємо:

$$\begin{aligned} g_i^1 &= y_0^1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^1(g_j^1, \dots, g_j^n) = t_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h = t_0 + c_i h, \quad i = 1, \dots, s, \\ y_1^1 &= y_0^1 + \sum_{j=1}^s b_j h f^1(g_j^1, \dots, g_j^n) = t_0 + \sum_{j=1}^s b_j h = t_0 + h, \end{aligned} \quad (6)$$

де t_0 - початкове значення часу.

Тоді за формулами (6) метод Рунге-Кутти (2) для системи (5) набуває вигляду:

$$g_i^J = y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J(t_0 + c_i h, g_j^2, \dots, g_j^n), \quad i = 1, \dots, s,$$

$$y_1^J = y_0^J + \sum_{j=1}^s b_j h f^J(t_0 + c_i h, g_j^2, \dots, g_j^n),$$

$$t^1 = t_0 + h,$$

де $J = 2, \dots, n$.

Коефіцієнти методу (2) зручно записувати у вигляді таблиці Бутчера(табл. 1):

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{21}	a_{32}			
...	...				
c_s	a_{s1}	a_{s2}	...	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s

Табл. 1

В роботі, для чисельного дослідження, використано метод Дормана – Принса 5(4). Коефіцієнти такого методу наведені в таблиці 2:

	0							
1/5	1/5							
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$						
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$					
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$				
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$			
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$		
y_1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0	
\bar{y}	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$	

Табл. 2

Даний метод y_1 має збіжність 5-го порядку, а метод \bar{y} - 4-го порядку, його використовують для контролю похибки і регулювання кроку чисельного інтегрування. [9].

2.3.2. Узагальнені методи Рунге-Кутти для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням

Ми розглядаємо узагальнену систему диференціальних рівнянь зі скінченною кількістю змінних запізнювань:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))\right), \quad (1)$$

де $y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$, $f = (f^1, \dots, f^n)$ – вектор-функції.

Початкова умова:

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [t^0 - D, t^0], \quad \text{де } \varphi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)). \quad (2)$$

Функції $\tau_1(t), \dots, \tau_m(t)$ задовольняють умові:

$$d \leq \tau_1(t) \leq D, \dots, d \leq \tau_m(t) \leq D, \quad t \geq t^0, \quad (3)$$

де $d > 0, D \geq d$ – деякі сталі.

Теореми існування і єдиності розв'язку для задачі Коші (1)–(2) за умови (3) аналогічні теоремам існування і єдиності розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь наведені в пункті 2.2.2.

Позначимо $\tilde{y}(t) = y(t), \quad t \in [t_0 - D, t_0]$. Нехай \tilde{y} – відома функція, тобто відомий розв'язок до деякого моменту часу $t_0, \quad t_0 \geq t^0$. Тоді враховуючи (3) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))) = \\ &= f(t, y(t), \tilde{y}(t - \tau_1(t)), \dots, \tilde{y}(t - \tau_m(t))) = \\ &= \tilde{f}(t, y(t)), \end{aligned}$$

де $\tilde{f}(t, y) = f(t, y, \tilde{y}(t - \tau_1(t)), \dots, \tilde{y}(t - \tau_m(t)))$.

Отримаємо на проміжку $t \in [t_0, t_0 + d]$ систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = \tilde{f}^J(t, y^2(t), \dots, y^n(t)), \quad J = 2, \dots, n. \quad (4)$$

Тоді s - стадійний метод Рунге-Кутти для отриманої системи (4) має вигляд:

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h \tilde{f}(t_0 + c_j h, g_j^2, \dots, g_j^n), \quad i = 1, \dots, s, \\ y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^s b_j h \tilde{f}(t_0 + c_j h, g_j^2, \dots, g_j^n), \\ t^1 &= t_0 + h, \end{aligned} \quad (5)$$

де y_0^J – початкове значення, y_1^J – шукане наближення невідомої функції y^J , за один крок чисельного інтегрування h , g_i^J – попередні наближення розв’язку першого порядку, $J = 2, \dots, n$. Коефіцієнти a_{ij}, b_j визначають метод Рунге-Кутти, t_0 – початкове значення часу, $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $\sum_{j=1}^s b_j = 1$ [9].

Зауважимо, що метод (5) має порядок апроксимації p , якщо для досить гладких задач (4) має місце наступна нерівність:

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq Kh^{p+1}, \quad y(t) = (y^2(t), \dots, y^n(t)),$$

де K – стала, а $\|y(t)\| = |y^2(t)| + \dots + |y^n(t)|$.

Повертаючись до функції f отримаємо s - стадійний метод Рунге-Кутти для систем з запізнюванням вигляду (1):

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_1(t_0 + c_j h)), \dots \\ &\dots, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_m(t_0 + c_j h))), \quad i = 1, \dots, s, \\ y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_1(t_0 + c_j h)), \dots \\ &\dots, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_m(t_0 + c_j h))), \\ t^1 &= t_0 + h, \\ g_i &= (g_i^2, \dots, g_i^n), \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \tag{6}$$

де $y_0 = (y_0^2, \dots, y_0^n)$ – початкове значення, $y_1 = (y_1^2, \dots, y_1^n)$ – шукане наближення невідомої функції $y(t)$ за один крок чисельного інтегрування $h \leq d$.

Оскільки при чисельних обрахунках немає точної функції $\tilde{y}(t)$ (передісторії моделі), то за неї береться його наближення, отримане на попередніх кроках чисельного інтегрування [10]:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [t^0 - D, t^0], \\ \hat{y}(t), & t \in (t^0, t_0]. \end{cases}$$

Де $\hat{y}(t)$ – наближене значення розв'язку $y(t)$, $t \in (t^0, t_0]$.

Твердження 1. Якщо порядок наближення розв'язку $\hat{y}(t)$ рівний p_1 , а порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (5) рівний p_2 , тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (6) рівний $p = \min\{p_1 + 1, p_2\}$.

Доведення. Умови твердження справедливі за умови виконання вимог теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші. При цьому функція f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця за всіма аргументами, починаючи з другого. Дійсно, нехай L найбільша з констант Ліпшиця для f^2, \dots, f^n . Тоді маємо

$$\begin{aligned}
\|y(t_0 + h) - y_1\| &= \left\| \begin{aligned} &y(t_0 + h) - y_0 - \sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_1(t_0 + c_j h)), \dots) \\ &\dots, \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_m(t_0 + c_j h)) \end{aligned} \right\| = \\
&= \left\| \begin{aligned} &y(t_0 + h) \pm \left(y_0 + \sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, y(\cdot), \dots, y(\cdot)) \right) \\ &- y_0 - \sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(\cdot), \dots, \tilde{y}(\cdot)) \end{aligned} \right\| \leq \\
&\leq K_2 h^{p_2+1} + \left\| \begin{aligned} &\sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, y(\cdot), \dots, y(\cdot)) \\ &- \sum_{j=1}^s b_j h f(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(\cdot), \dots, \tilde{y}(\cdot)) \end{aligned} \right\| = K_2 h^{p_2+1} + \\
&+ \sum_{J=2}^n \sum_{j=1}^s |b_j| h \left| f^J(t_0 + c_j h, g_j, y(\cdot), \dots, y(\cdot)) - f^J(t_0 + c_j h, g_j, \tilde{y}(\cdot), \dots, \tilde{y}(\cdot)) \right| \leq \\
&\leq K_2 h^{p_2+1} + \sum_{J=2}^n \sum_{j=1}^s |b_j| h \sum_{i=1}^m L \left\| y(t_0 + c_j h - \tau_i(t_0 + c_j h)) - \tilde{y}(t_0 + c_j h - \tau_i(t_0 + c_j h)) \right\| \leq \\
&\leq K_2 h^{p_2+1} + (n-1) \sum_{j=1}^s |b_j| h L K_1 m h^{p_1+1} \leq K h^{p+1}.
\end{aligned}$$

Якщо в методі (6) $h > d$, то можливо, що для деяких $\tau_l \in \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ та $j \in \{1, \dots, s\}$ має місце $t_0 + c_j h - \tau_l(t_0 + c_j h) > t_0$, тоді необхідне наближене значення розв'язку $\tilde{y}(t)$ в момент часу $t > t_0$. Тобто:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [t^0 - D, t^0], \\ \hat{y}(t), & t \in (t^0, t_0], \\ \check{y}(t), & t > t_0, \end{cases}$$

де $\check{y}(t)$ – наближене значення розв'язку $y(t)$, $t > t_0$.

Зазвичай значення функцій $\hat{y}(t)$, $\check{y}(t)$ отримують відповідно з інтерполяції та екстраполяції значень розв'язку на попередніх кроках застосування методу Рунге-Кутти [10].

Твердження 2. Якщо порядок наближення розв'язку $\hat{y}(t)$ рівний p_1 , $\check{y}(t)$ рівний p_2 , а порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (5) рівний p_3 , тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (6) рівний $p = \min\{p_1 + 1, p_2 + 1, p_3\}$.

Умови твердження справедливі за умови виконання вимог теорем існування і єдиності розв'язку задачі Коші. При цьому функція f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця за всіма аргументами, починаючи з другого. Доведення аналогічне попередньому твердженню.

Перепишемо (6) в більш зручному для програмування вигляді. Для цього позначимо $y^1 \equiv t$, тоді $\frac{dy^1}{dt} = 1$. Тоді система (1) матиме вигляд:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \bar{f}(y(t), y(t - \tau_1(t)), \dots, y(t - \tau_m(t))),$$

$$y = (y^1, \dots, y^n), \bar{f} = (1, f^2, \dots, f^n).$$

Метод (9) має вигляд:

$$\begin{aligned}
g_i &= y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h \bar{f} \left(g_j, \tilde{y} \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y} \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right) \right), \quad i = 1, \dots, s, \\
y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^s b_j h \bar{f} \left(g_j, \tilde{y} \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y} \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right) \right), \\
g_i &= \left(g_i^1, \dots, g_i^n \right), \quad i = 1, \dots, s.
\end{aligned} \tag{7}$$

Або:

$$\begin{aligned}
g_i^J &= y_0^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J \left(g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}^2 \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y}^n \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots \right. \\
&\quad \left. \dots, \tilde{y}^2 \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y}^n \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right) \right), \quad i = 1, \dots, s, \\
y_1^J &= y_0^J + \sum_{j=1}^s b_j h f^J \left(g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}^2 \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y}^n \left(g_j^1 - \tau_1 \left(g_j^1 \right) \right), \dots \right. \\
&\quad \left. \dots, \tilde{y}^2 \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right), \dots, \tilde{y}^n \left(g_j^1 - \tau_m \left(g_j^1 \right) \right) \right), \quad J = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Нехай порядок апроксимації методу Рунге-Кутти (5) рівний p . Для інтерполяції розв'язку використаємо поліном Лагранжа порядку $p-1$, побудований по p точкам y^1 . Тоді порядок апроксимації методу Рунге-Кутти для систем з запізнюванням (7), згідно зауваженням 1, теж рівний p за умови $h \leq d$.

Якщо $h > d$, то для екстраполяції передісторії використаємо, як і в звичайних методах Рунге-Кутти, метод Ейлера. Тоді, якщо в (7) для деяких $\tau_l \in \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ та $j \in \{1, \dots, s\}$ виконується нерівність $g_j^1 - \tau_l \left(g_j^1 \right) > t_0$, отримаємо

$$\tilde{y} \left(g_j^1 - \tau_l \left(g_j^1 \right) \right) = g_k + \left(g_j^1 - \tau_l \left(g_j^1 \right) - g_k^1 \right) f \left(g_k, \tilde{y} \left(g_k^1 - \tau_l \left(g_k^1 \right) \right) \right), \tag{8}$$

де $g_k \in \{g_1, \dots, g_j\}$ – найближче по часу g_k^1 до $g_j^1 - \tau_l \left(g_j^1 \right)$ пораховане наближення першого порядку. Апроксимація порядку 2 даного методу впливає з зауваження 2.

Зауваження 3. При екстраполяції передісторії за методом Ейлера (8) метод (7) при $\tau_1(t) = 0, \dots, \tau_m(t) = 0, t \geq t^0$ співпадає з методом Рунге-Кутти для систем звичайних диференціальних рівнянь. Дійсно, якщо $\tau_l(t) = 0, t \geq t^0$, то

найближчим до $g_j^1 - \tau_l(g_j^1)$ буде g_j^1 , тобто в формулі (8) $g_k = g_j$, $l = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, s$. Тоді рівність (8) при $\tau_1(t) = 0, \dots, \tau_m(t) = 0$, $t \geq t^0$ має вигляд

$$\tilde{y}(g_j^1) = g_j^1, j = 1, \dots, s,$$

що відповідає звичайному методу Рунге-Кутти.

Таким чином, в даному розділі, ми отримали явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, що є модифікацією методу Рунге-Кутти другого порядку для звичайних систем диференціальних рівнянь[11].

2.3.3 Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем з запізнюванням

1. Побудова явного гібридного методу для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням п'ятого порядку збіжності

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з запізнюванням наступного вигляду:

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = f^J(t, y^1(t), \dots, y^n(t), y^1(t-\tau), \dots, y^n(t-\tau)), \quad (1)$$

$$J = 1, \dots, n, \quad \tau = const > 0,$$

з початковими умовами:

$$y^J(t) = \varphi^J(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], J = 1, \dots, n.$$

Тут y^J - невідомі функції, f^J - деякі задані функції, φ^J - початкові функції, t_0 - початкове значення часу, τ - запізнювання аргументу, $J = 1, \dots, n$.

Нехай $\varphi^J \in C^5[t_0 - \tau, t_0]$, існують і неперервні на $[t_0; T]$ всі частинні похідні до п'ятого порядку включно функцій f^J , а також φ^J і f^J узгоджені до похідних п'ятого порядку включно так, що

$$y^{J(i)}(t_0 + 0) = \varphi^{J(i)}(t_0), \quad i = 0, \dots, 5, \quad J = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Тоді існує і єдиний розв'язок y^J та згідно [8]:

$$y^J \in C^5[t_0 - \tau, T], \quad J = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Якщо в системі (1) $\tau = 0$, тоді ми маємо систему без запізнювання

$$\frac{dy^J(t)}{dt} = f^J(t, y^1(t), \dots, y^n(t)), \quad (4)$$

$$y^J(t_0) = \varphi^J(t_0), \quad J = 1, \dots, n,$$

до якої застосовуються звичайні методи Рунге-Кутти [9].

Кажуть, що чисельний метод має порядок p , якщо має місце наступна нерівність для задач (1) або (4):

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq Kh^{p+1},$$

де K – стала, $y = (y^1, \dots, y^n)$, $\|y\| = |y^1| + \dots + |y^n|$, y_1 – шукане наближення невідомої функції y в точці $t_0 + h$, де h – крок чисельного інтегрування.

Якщо крок чисельного інтегрування $h \leq \tau$, $h > 0$, тоді чисельний розв'язок системи (1) не викликає труднощів. Для цього використовують інтерполяцію передісторії моделі і чисельні методи для звичайних систем диференціальних рівнянь (4) [11]. Але, якщо потрібно знайти чисельний розв'язок для досить великого проміжку часу, порівняно з τ , доцільно використовувати крок $h > \tau$.

Ми побудуємо для системи (1) явний гібридний метод п'ятого порядку збіжності. Нехай крок чисельного інтегрування $h > \tau$.

Оскільки $\varphi^J \in C^5[t_0 - \tau, t_0]$, $J = 1, \dots, n$, то запишемо формулу Тейлора для функції φ^J в точці $t_0 - \tau$:

$$\varphi^J(t) = \sum_{i=0}^4 \varphi_i^J(t - t_0 + \tau)^i + \frac{\varphi^{J(5)}(\eta)(t - t_0 + \tau)^5}{5!}, \quad (5)$$

$$\text{де } \varphi_i^J = \frac{\varphi^{J(i)}(t_0 - \tau)}{i!}, \quad i = 0, \dots, 4, \quad \eta \in [t_0 - \tau, t_0], \quad J = 1, \dots, n.$$

Оскільки $y^J \in C^5[t_0 - \tau, t_0 + h - \tau]$, тоді

$$\tilde{y}^J(t_0 + ch - \tau) = \sum_{i=0}^4 \varphi_i^J(ch)^i \quad (6)$$

є наближенням четвертого порядку значення функції y^J в точці $t_0 + ch - \tau$, де $t_0 + h \leq T$, $0 \leq c \leq 1$.

За твердженням 2 з пункту 2.3.2, якщо s -стадійний метод Рунге-Кутти для звичайних систем диференціальних рівнянь (4) з коефіцієнтами a_{ij}, b_j [9] має порядок збіжності п'ять, то і метод

$$\begin{aligned} g_i^J &= \varphi^J(t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J(t_0 + c_j h, g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}_j^1, \dots, \tilde{y}_j^n), \\ y_1^J &= \varphi^J(t_0) + \sum_{j=1}^s b_j h f^J(t_0 + c_j h, g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}_j^1, \dots, \tilde{y}_j^n), \\ \tilde{y}_i^J &= \sum_{j=0}^4 \varphi_j^J(c_i h)^j, \quad t_1 = t_0 + h, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^s b_j = 1, \\ & i = 1, \dots, s, \quad J = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (7)$$

для систем з запізнюванням (1) має порядок збіжності п'ять на першому кроці $[t_0, t_1]$. Тут y_1^J шукане наближення невідомих функцій y^J для одного кроку чисельного інтегрування h , $J = 1, \dots, n$.

Ми запишемо цей метод для деякого з наступних кроків чисельного інтегрування $[t_k, t_k + h]$. Для цього ми отримаємо наближення четвертого порядку \tilde{y}^J для кроку чисельного інтегрування $[t_k, t_k + h]$, маючи розв'язок на попередньому кроці $[t_{k-1}, t_k]$, $t_{k-1} \geq t_0$, $t_k = t_{k-1} + h$, $t_k + h \leq T$, $h > \tau$.

З попереднього кроку чисельного інтегрування $[t_{k-1}, t_k]$ ми маємо значення $y_{k-1}^J = y^J(t_{k-1})$, $y_{-\tau}^J = y^J(t_k - \tau)$, $y_k^J = y^J(t_k)$ і значення похідних в точках t_{k-1} та t_k : $f_{k-1}^J = f^J(t_{k-1}, y_{k-1}, \tilde{y}(t_{k-1} - \tau))$, $f_k^J = f^J(t_k, y_k, y_{-\tau})$, $J = 1, \dots, n$.

Запишемо інтерполяційні поліноми Ньютона четвертого порядку значень $y_{k-1}^J, y_{-\tau}^J, y_k^J, f_{k-1}^J, f_k^J$ в точках $t_{k-1}, t_k - \tau, t_k$.

Поліном Ньютона побудований по п'яти точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 для функції $z(x)$ має вигляд [12]:

$$\begin{aligned} N(x) = & z_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]z + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]z + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]z + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]z, \end{aligned} \quad (8)$$

де $[x_0, x_1]z$, $[x_0, x_1, x_2]z$, $[x_0, x_1, x_2, x_3]z$, $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]z$ – роздільні різниці (різницеві похідні вперед, чисельне наближення похідних) першого, другого, третього, четвертого порядків відповідно. Роздільні різниці визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} [x_i, x_{i+1}]z &= \frac{z(x_{i+1}) - z(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \\ [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}]z &= \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}]z - [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]z}{x_{i+j} - x_i}, \quad i, j = 0, \dots, 4. \end{aligned}$$

Запишемо многочлени Ньютона $N^J(t)$, в нашому випадку, з кратними точками інтерполяції $t_{k-1}, t_{k-1}, t_k - \tau, t_k, t_k$. Перші і останні роздільні різниці першого порядку для многочленів $N^J(t)$ відповідно рівні $[t_{k-1}, t_{k-1}]y^J = f_{k-1}^J$, $[t_k, t_k]y^J = f_k^J$, оскільки f_{k-1}^J та f_k^J – наближення похідної четвертого порядку в точках t_{k-1} і t_k .

Побудуємо таблицю роздільних різниць.

Аргумент	Функції	Роздільні різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
t_{k-1}	y_{k-1}^J	f_{k-1}^J	$\frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{h - \tau}$	$\frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^2} - \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{h(h - \tau)}$	$\frac{f_k^J - \Delta_2^J}{\tau h^2} - 2 \frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^3} + \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{(h - \tau)h^2}$
t_{k-1}	y_{k-1}^J				
$t_k - \tau$	$y_{- \tau}^J$	$\frac{y_{- \tau}^J - y_{k-1}^J}{h - \tau} = \Delta_1^J$	$\frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h}$		
t_k	y_k^J	$\frac{y_k^J - y_{- \tau}^J}{\tau} = \Delta_2^J$	$\frac{f_k^J - \Delta_2^J}{\tau h}$		
t_k	y_k^J	f_k^J	$\frac{f_k^J - \Delta_2^J}{\tau}$		
t_k	y_k^J		$\frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^2}$		

Позначимо

$$N_2^J = \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{h - \tau}, \quad N_3^J = \frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^2} - \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{(h - \tau)h},$$

$$N_4^J = \frac{f_k^J - \Delta_2^J}{\tau h^2} - 2 \frac{\Delta_2^J - \Delta_1^J}{h^3} + \frac{\Delta_1^J - f_{k-1}^J}{(h - \tau)h^2},$$

$$\Delta_1^J = \frac{y_{- \tau}^J - y_{k-1}^J}{h - \tau}, \quad \Delta_2^J = \frac{y_k^J - y_{- \tau}^J}{\tau}, \quad J = 1, \dots, n.$$

Тоді поліноми Ньютона $N^J(t)$ за формулою (8) мають вигляд :

$$N^J(t) = y_{k-1}^J + (t - t_{k-1})f_{k-1}^J + (t - t_{k-1})^2 N_2^J + (t - t_{k-1})^2 (t - t_k + \tau) N_3^J + (t - t_{k-1})^2 (t - t_k + \tau)(t - t_k) N_4^J. \quad (9)$$

Запишемо поліноми (9) по степеням $(t - t_k + \tau)$:

$$N^J(t) = \sum_{i=0}^4 K_i^J (t - t_k + \tau)^i, \quad \text{де } K_i^J = \frac{N^J(t_k - \tau)^{(i)}}{i!}, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (10)$$

Знайдемо похідні поліномів $N^J(t)$:

$$N^J(t)^{(1)} = f_{k-1}^J + 2(t - t_{k-1})N_2^J + \left(2(t - t_{k-1})(t - t_k + \tau) + (t - t_{k-1})^2\right)N_3^J + \left(\left(2(t - t_{k-1})(t - t_k + \tau) + (t - t_{k-1})^2\right)(t - t_k) + (t - t_{k-1})^2(t - t_k + \tau)\right)N_4^J;$$

$$\begin{aligned}
N^J(t_k - \tau)^{(1)} &= f_{k-1}^J + 2N_2^J(h - \tau) + (h - \tau)^2 N_3^J - \tau(h - \tau)^2 N_4^J; \\
N^J(t)^{(2)} &= 2N_2^J + (2(t - t_k + \tau) + 4(t - t_{k-1}))N_3^J + ((2(t - t_k + \tau) + \\
&\quad + 4(t - t_{k-1}))(t - t_k) + 4(t - t_{k-1})(t - t_k + \tau) + 2(t - t_{k-1})^2)N_4^J; \\
N^J(t_k - \tau)^{(2)} &= 2(N_2^J + 2(h - \tau)N_3^J + (h - \tau)(h - 3\tau)N_4^J); \\
N^J(t)^{(3)} &= 6N_3^J + (6(t - t_k) + 6(t - t_k + \tau) + 12(t - t_{k-1}))N_4^J; \\
N^J(t_k - \tau)^{(3)} &= 6(N_3^J + (2h - 3\tau)N_4^J); \\
N^J(t)^{(4)} &= 24N_4^J.
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned}
K_0^J &= y_{-\tau}^J; \\
K_1^J &= f_{k-1}^J + 2N_2^J(h - \tau) + (h - \tau)^2 N_3^J - \tau(h - \tau)^2 N_4^J; \\
K_2^J &= N_2^J + 2(h - \tau)N_3^J + (h - \tau)(h - 3\tau)N_4^J; \\
K_3^J &= N_3^J + (2h - 3\tau)N_4^J; \\
K_4^J &= N_4^J, J = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Оскільки поліноми Ньютона (9) четвертого порядку, то вони мають порядок апроксимації чотири [12]. Таким чином, поліноми (10) співпадають з розкладами в ряд Тейлора функції y^J в точці $t_k - \tau$ до четвертого порядку малості $o(h^4)$, $J = 1, \dots, n$.

Отже, для чисельного розв'язку на кроці $[t_k, t_k + h]$ ми маємо необхідне наближення четвертого порядку функції y^J в точці $t_k + ch - \tau$, $0 \leq c \leq 1$:

$$\tilde{y}^J(t_k + ch - \tau) = \sum_{i=0}^4 K_i^J (ch)^i, \quad J = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Таким чином, якщо a_{ij}, b_j – коефіцієнти будь-якого s -стадійного методу Рунге-Кутти п'ятого порядку для систем без запізнювання (4) [9], то за твердженням 2 з пункту 2.3.2 гібридний метод для систем з запізнюванням (1)

$$\begin{aligned}
g_i^J &= y_k^J + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} h f^J(t_k + c_j h, g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}_j^1, \dots, \tilde{y}_j^n), \\
y_{k+1}^J &= y_k^J + \sum_{j=1}^s b_j h f^J(t_k + c_j h, g_j^1, \dots, g_j^n, \tilde{y}_j^1, \dots, \tilde{y}_j^n),
\end{aligned}
\tag{12}$$

$$\tilde{y}_i^J = \sum_{j=0}^4 K_j^J (c_i h)^j, \quad t_{k+1} = t_k + h, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^s b_j = 1,$$

$$i = 1, \dots, s, \quad J = 1, \dots, n,$$

має п'ятий порядок збіжності. Тут y_{k+1}^J - шукане наближення невідомих функцій y^J в точці $t_k + h$, $J = 1, \dots, n$.

Зауважимо, якщо умова (2) не виконується, то завдяки властивості згладжування розв'язків системи (1) [8] перших п'ять кроків можна застосовувати будь-який чисельний метод першого порядку наближення.

Гібридний метод третього та четвертого порядків збіжності може бути отриманий аналогічно, побудувавши поліноми Ньютона другого і третього порядків відповідно. Явний метод Рунге-Кутти другого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням отриманий в пункту 2.3.2.

Побудова явного гібридного методу для систем диференціальних рівнянь більших порядків збіжності p може бути здійснена шляхом збільшення порядку наближення поліномів Ньютона (збільшення точок інтерполяції) до $p-1$ і, відповідно, використання звичайних явних методів Рунге-Кутти порядку збіжності p . [13,14].

2. Оцінка локальної похибки чисельного інтегрування отриманого гібридного методу

Знайдемо точну оцінку локальної похибки чисельного інтегрування отриманого гібридного методу (7), (12).

Оскільки існують і неперервні на $[t_0; T]$ всі частинні похідні до п'ятого порядку включно функцій f^J , $J = 1, \dots, n$, то відповідний метод Рунге-Кутти п'ятого порядку для задачі Коші без запізнюванням (4) має оцінку похибки

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq Ch^6, \quad (13)$$

де $C = \text{const}$ [9].

З (3) ми маємо

$$|y^{J(5)}(t)| \leq \mu^J, \quad t \in [t_0; T], \quad \mu^J = \text{const}, \quad J = 1, \dots, n.$$

Нехай $h > \tau$ (У випадку $h \leq \tau$ похибки обчислення розв'язку в точках $t_0 - \tau + c_i h$, $i = 1, \dots, s$ відсутні, а похибка методу співпадає з похибкою методу Рунге-Кутти (13)).

Оскільки в данному випадку похибка наближення розв'язку в точці $t_0 - \tau + c_i h$ функцій y^J (6) співпадає з похибкою розкладу в ряд Тейлора (5), то:

$$|y^J(t_0 - \tau + c_i h) - \tilde{y}^J(t_0 - \tau + c_i h)| \leq \frac{\mu^J}{5!} (c_i h)^5, \quad J = 1, \dots, n, \quad i = 1 \dots s.$$

Оскільки $0 \leq c_i \leq 1$, то

$$\|y(t_0 - \tau + c_i h) - \tilde{y}(t_0 - \tau + c_i h)\| \leq \frac{\|\mu\|}{5!} h^5, \quad i = 1, \dots, s. \quad (14)$$

З (13), (14) та доведення твердження 2 з пункту 2.3.2 маємо для задачі Коші з запізнюванням (1):

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq \left(C + n \sum_{j=1}^s |b_j| L \frac{\|\mu\|}{5!} \right) h^6, \quad (15)$$

де L - найбільша з констант Ліпшиця для функцій f^J , $J = 1, \dots, n$.

Розглянемо локальну похибку на наступних кроках чисельного інтегрування $[t_k, t_k + h]$. Для цього вважатимемо, що поліноми $N^J(t)$ (9) побудовані по точним значенням y_{k-1}^J , $y_{-\tau}^J$, y_k^J , f_{k-1}^J , f_k^J з минулого кроку чисельного інтегрування $[t_{k-1}, t_k]$. Тоді згідно [12]:

$$y^J(t) - N^J(t) = \frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!} (t - t_{k-1})^2 (t - t_k + \tau) (t - t_k)^2, \quad (16)$$

де $\xi \in [t_k - \tau, t_k + h - \tau]$, $J = 1, \dots, n$.

Нехай $h > \tau$ (Якщо $h < \tau$, то обчислення похибки $\tilde{y}^J(t_k - \tau + c_i h)$, $i = 1, \dots, s$ співпадає з похибкою інтерполяції передісторії моделі поліномами Ньютона (9). В цьому випадку справедливі формули аналогічні до (14) та (15)).

Тоді з (16) маємо:

$$y^J(t_k - \tau) - N^J(t_k - \tau) = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y^{J(1)}(t) - N^{J(1)}(t) &= \\ &= \frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!} \left((t - t_{k-1})^2 (t - t_k)^2 + 2(t - t_{k-1})(t - t_k)(2t - t_{k-1} - t_k)(t - t_k + \tau) \right). \end{aligned}$$

Розглядаючи $0 \leq \tau < h$, ми отримаємо:

$$|y^{J(1)}(t_k - \tau) - N^{J(1)}(t_k - \tau)| = \frac{|y^{J(5)}(\xi)|}{5!} (h - \tau)^2 \tau^2 \leq \frac{\mu^J h^4}{16 \cdot 5!}. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} y^{J(2)}(t) - N^{J(2)}(t) &= \frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!} 2 \left(2(t - t_{k-1})(t - t_k)(3t - 2t_k - t_{k-1} + \tau) + \right. \\ &\quad \left. + (2t - t_{k-1} - t_k)^2 (t - t_k + \tau) \right), \end{aligned}$$

$$|y^{J(2)}(t_k - \tau) - N^{J(2)}(t_k - \tau)| = \frac{|y^{J(5)}(\xi)|}{5!} 4 |(h - \tau)\tau(h - 2\tau)| \leq \frac{\mu^J h^3}{5!}. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} y^{J(3)}(t) - N^{J(3)}(t) &= \frac{|y^{J(5)}(\xi)|}{5!} 2 \left(2(2t - t_{k-1} - t_k)(5t - 4t_k - t_{k-1} + 3\tau) + \right. \\ &\quad \left. + 6(t - t_{k-1})(t - t_k) + (2t - t_{k-1} - t_k)^2 \right), \end{aligned}$$

$$|y^{J(3)}(t_k - \tau) - N^{J(3)}(t_k - \tau)| = \frac{|y^{J(5)}(\xi)|}{5!} 6 \left((h - 2\tau)^2 - 2\tau(h - r) \right) \leq \frac{\mu^J 6h^2}{5!}. \quad (20)$$

$$y^{J(4)}(t) - N^{J(4)}(t) = 24(5t - 3t_k - 2t_{k-1} + 3\tau) \frac{y^{J(5)}(\xi)}{5!},$$

$$|y^{J(4)}(t_k - \tau) - N^{J(4)}(t_k - \tau)| = \frac{y^5(\xi)}{5!} 48 |h - 2\tau| < \frac{48\mu^J h}{5!}. \quad (21)$$

Тут $J = 1, \dots, n$.

З (18)-(21) для похибки $\tilde{y}^J(t_k - \tau + c_i h)$ (11) маємо:

$$\begin{aligned}
& \left| y^J(t_k - \tau + c_i h) - \tilde{y}^J(t_k - \tau + c_i h) \right| = \\
& \left| \sum_{j=0}^4 \frac{y^{J(j)}(t_k - \tau)}{j!} (c_i h)^j + \frac{y^{J(5)}(\zeta)(c_i h)^5}{5!} - \sum_{j=0}^4 \frac{N^{J(j)}(t_k - \tau)}{j!} (c_i h)^j \right| \leq \\
& \leq \sum_{j=0}^4 \frac{|y^{J(j)}(t_k - \tau) - N^{J(j)}(t_k - \tau)|}{j!} (c_i h)^j + \frac{\mu^J (c_i h)^5}{5!} < \frac{41\mu^J h^5}{16 \cdot 5!},
\end{aligned}$$

де $\zeta \in [t_k - \tau, t_k + h - \tau]$, $J = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, s$.

Звідси, маємо

$$\| y(t_k - \tau + c_i h) - \tilde{y}(t_k - \tau + c_i h) \| \leq \frac{41 \| \mu \| h^5}{16 \cdot 5!}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Відповідно до доведення твердження 2 з пункту 2.3.2 та оцінки (13) маємо:

$$\| y(t_k + h) - y_{k+1} \| \leq \left(C + n \sum_{j=1}^s |b_j| L \frac{41 \| \mu \|}{16 \cdot 5!} \right) h^6. \quad (22)$$

Формули (15), (22) дають точну оцінку локальної похибки на першому та наступних кроках чисельного інтегрування за цим гібридним методом і доводять, що ми маємо наближення п'ятого порядку збіжності.

Таким чином, ми побудували явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням для кроку чисельного інтегрування більшого за запізнювання. Для цього достатньо записати поліноми Ньютона необхідного порядку по підрахованим наближенням та отримати розклад за формулою Тейлора для наближення на наступний крок чисельного інтегрування. Ці ж поліноми Ньютона можна використовувати для випадку кроку чисельного інтегрування меншого за запізнювання. Отриманий таким чином явний гібридний метод п'ятого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, наприклад, з коефіцієнтами Кутти-Нюстрема [9]:

$$c_1 = 0;$$

$$c_2 = \frac{1}{3}, a_{21} = \frac{1}{3};$$

$$c_3 = \frac{2}{5}, a_{31} = \frac{4}{25}, a_{32} = \frac{6}{25};$$

$$c_4 = 1, a_{41} = \frac{1}{4}, a_{42} = -3, a_{43} = \frac{15}{4};$$

$$c_5 = \frac{2}{3}, a_{51} = \frac{6}{81}, a_{52} = \frac{90}{81}, a_{53} = \frac{-50}{81}, a_{54} = \frac{8}{81};$$

$$c_6 = \frac{4}{5}, a_{61} = \frac{6}{75}, a_{62} = \frac{36}{75}, a_{63} = \frac{10}{75}, a_{64} = \frac{8}{75}, a_{65} = 0;$$

$$b_1 = \frac{23}{192}, b_2 = 0, b_3 = \frac{125}{192}, b_4 = 0, b_5 = \frac{-81}{192}, b_6 = \frac{125}{192}.$$

або коефіцієнтами методу Дормана-Принса, з оцінкою похибки чисельного інтегрування, підходить для дослідження актуальних на даний момент систем з запізнюванням на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу.[14].

2.4. ОЦІНКА СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА

2.4.1. Алгоритм Бенеттіна та його модифікація

1. Вступ

Старший показник Ляпунова характеризує ступінь експоненціального розходження близьких траєкторій динамічної системи. Наявність у системи додатної експоненти Ляпунова свідчить про швидке розходження з часом двох довільних близьких траєкторій та чутливості до значень початкових умов. Тому визначення експоненти Ляпунова дає змогу ідентифікувати систему в сенсі наявності хаотичної динаміки.

Нехай динамічну систему задано аналітично системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), t), \quad (1)$$

де $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}(t)$ – шукана вектор-функція, яка задовольняє початкову умову $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, \mathbf{R}^n – фазовий простір системи, $f : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ – неперервна вектор-

функція. Відомо, що якщо функція f задовольняє умови Ліпшиця за всіма аргументами, крім часу t , то існує єдиний розв'язок системи (1). Позначимо через \mathbf{x}_i точку в фазовому просторі \mathbf{R}^n динамічної системи, що відповідає радіусу-вектору стану $\mathbf{x}(t_i)$.

Нехай розв'язок системи отримано за деяких початкових умов і після перехідного процесу виявлено деякий атрактор. Щоб з'ясувати, чи є на атракторі чутливість до початкових умов, характерна для хаотичного атрактора [4], потрібно обчислити старший показник Ляпунова (СПЛ). Для цього розглянемо точку \mathbf{x}_0 на атракторі динамічної системи (рис. 1) у початковий момент часу t_0 . Задавши деяке мале число ε_0 , виберемо ще одну точку $\tilde{\mathbf{x}}_0$ на атракторі так, щоб виконувалась умова $|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| = \varepsilon_0$. Для коректної роботи алгоритму [15,16] потрібна точка саме на атракторі, а не близька до нього. В іншому випадку отриманий результат характеризуватиме поведінку траєкторії не на атракторі, а поблизу нього, що є основним джерелом помилок при обчисленні СПЛ для неконсервативних систем.

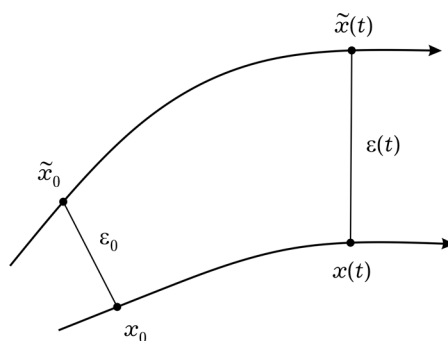


Рис. 1. Еволюція двох близьких точок на атракторі динамічної системи.

Через проміжок часу Δt точки \mathbf{x}_0 та $\tilde{\mathbf{x}}_0$ еволюціонують відповідно в точки $\mathbf{x}(t)$ та $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Відстань між ними позначимо через $\varepsilon(t)$, де $t = t_0 + \Delta t$. Значення $\varepsilon(t)$ залежить від початкового положення точок \mathbf{x}_0 та $\tilde{\mathbf{x}}_0$, а також проміжку часу Δt і динамічної системи в цілому. Проте наближено можна вважати, що $\varepsilon(t) \approx \varepsilon_0 e^{\lambda \Delta t}$, де

λ – СПЛ системи. Таким чином, динаміку біжучої точки на атракторі характеризує параметр [15, 16]

$$\lambda \approx \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

З умови обмеженості атрактора випливає і скінченність $\varepsilon(t)$, тому Δt має збільшуватись лише до тих пір, поки значення $\varepsilon(t)$ залишається суттєво меншим ніж геометричні розміри атрактора. У протилежному випадку $\lambda = 0$ при $\Delta t \rightarrow \infty$. При цьому отримане відповідно до (2) значення λ потрібно розглядати як усереднене за всіма початковими точками \mathbf{x}_0 атрактора. Тому остаточно маємо

$$\lambda = \overline{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} \right)},$$

де значення $\varepsilon(t)$ є значно меншим від розмірів атрактора. Такий підхід базується на ергодичній теоремі В. І. Оселедця [17], згідно з якою експоненційне розходження двох випадково вибраних точок на атракторі з одиничною ймовірністю характеризує СПЛ.

На практиці для знаходження СПЛ використовують алгоритм Бенеттіна.

2. Алгоритм Бенеттіна та його модифікація

Розглянемо спочатку класичний алгоритм Бенеттіна [15, 16]. Позначимо через \mathbf{x}_0 точку $\mathbf{x}(t_0)$ на атракторі динамічної системи (1) у початковий момент часу t_0 після перехідного процесу. Зафіксуємо значення ε , яке є істотно меншим ніж лінійні розміри атрактора, та точку $\tilde{\mathbf{x}}_0$ з рівності

$$|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| = \varepsilon. \quad (3)$$

Відстежимо еволюцію точок \mathbf{x}_0 та $\tilde{\mathbf{x}}_0$ через деякий невеликий проміжок часу $\Delta t = T$. Отримані значення позначимо через \mathbf{x}_1 та $\tilde{\mathbf{x}}_1$ (рис. 2). Вектор $\Delta \mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1$ називають вектором збурення, а його абсолютну величину $|\Delta \mathbf{x}_1|$ – амплітудою збурення. Значення СПЛ на першому етапі оцінимо за формулою

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1|}{\varepsilon} = \frac{1}{T} \ln \frac{|\Delta \mathbf{x}_1|}{\varepsilon}.$$

Далі виконуємо перенормування за формулою $\Delta \mathbf{x}'_1 = \varepsilon \Delta \mathbf{x}_1 / |\Delta \mathbf{x}_1|$ та повторюємо описану процедуру вже для точок $\tilde{\mathbf{x}}'_1 = \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}'_1$ та \mathbf{x}_1 замість точок \mathbf{x}_0 та $\tilde{\mathbf{x}}_0$ (рис. 2). Після M повторень знаходимо СПЛ як середньоарифметичне значень, отриманих на кожному з етапів:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \lambda_k = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{|\Delta \mathbf{x}_k|}{\varepsilon}.$$

Зрозуміло, що алгоритм добре працює в консервативних моделях, де об'єм фазового простору не змінюється з часом. Наприклад, в задачах перемішування рідин у різних ємностях, отриманий у такий спосіб результат безпосередньо характеризує ступінь перемішування точок середовища. При цьому, однак, показано [18,19], що найбільше значення максимального СПЛ не гарантує найкращого за якістю змішування.

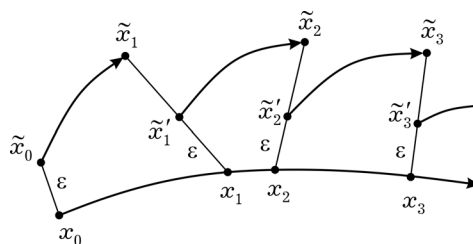


Рис. 2. Алгоритм Бенеттіна обчислення старшого показника Ляпунова.

Основною проблемою цього методу у випадку дисипативної системи є той факт, що точки $\tilde{\mathbf{x}}'_1, \tilde{\mathbf{x}}'_2, \dots$, взагалі кажучи, не лежать на аттракторі. Розмірність останнього є нижчою від розмірності фазового простору, тому ймовірність того, що випадково взята точка потрапить саме на нього, дорівнює нулеві. Наприклад, якщо єдиним аттрактором системи є граничний цикл, то в результаті застосування алгоритму Бенеттіна СПЛ буде мати від'ємне значення, хоча насправді має бути рівним нулеві. Можливі варіанти, коли збурена точка $\tilde{\mathbf{x}}'_k$ потрапляє:

- 1°) на досліджуваний аттрактор (ймовірність потрапляння рівна нулеві);
- 2°) на інший, можливо, прихований аттрактор (ймовірність рівна нулеві);

3°) у басейн тяжіння досліджуваного атрактора (ймовірність є відмінною від нуля);

4°) у басейн тяжіння іншого атрактора (ймовірність є відмінною від нуля).

У випадках 3° та 4°, які є найбільш імовірними, значення λ_k характеризує не значення СПЛ атрактора, а поведінку близької до нього траєкторії, що спричинює похибку обчислень. Для усунення цієї похибки потрібно вибрати точки $\tilde{x}'_0, \tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2, \dots$ безпосередньо на досліджуваному атракторі. Якщо права частина рівняння (1) є відомою, розв'язок можна отримати чисельно, а алгоритм розв'язування передбачає виконання таких кроків.

Крок 1. Після перехідного процесу вибираємо точки x_0 та \tilde{x}_0 на розв'язку системи (1) для фіксованих початкових умов так, щоб рівність (3) виконувалася для деякого малого значення $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Рухаючись далі уздовж траєкторії розв'язку, через проміжок часу T отримуємо відповідно точки x_1 та \tilde{x}_1 на ньому. З їх використанням обчислюємо

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{\varepsilon_0}.$$

Крок 2. Фіксуємо одну з точок, наприклад x_1 , а \tilde{x}_1 знаходимо, розв'язавши систему на віддалі $|\tilde{x}' - x_1| = \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ від \tilde{x}_1 . Таким чином, початок і кінець вектора збурення належать атрактору. Через проміжок часу T отримуємо точки x_2 та \tilde{x}_2 на атракторі. Знаходимо наступне значення

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{\varepsilon_1}.$$

Крок 3. Повторюючи процедуру M разів, обчислюємо СПЛ як середньоарифметичне значень, отриманих на кожному етапі:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \lambda_k,$$

$$\text{Де } \lambda_k = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_k - x_k|}{\varepsilon_{k-1}}$$

Отримане значення, за ергодичною теоремою В. І. Оселедця [17], з імовірністю одиниця характеризує СПЛ атрактора. Зрозуміло, що значення λ залежить від величин ε та T . При цьому величину ε потрібно узгоджувати з геометричним розміром атрактора. Проміжок T має бути значно коротшим ніж час умовного «повного оберту» біжучої по атрактору точки.[20-22].

2.4.2. Новий універсальний алгоритм оцінки старшого показника

Ляпунова в дисипативній динамічній системі

1.Вступ. В попередньому пункті показано, що для коректної роботи алгоритму Бенеттіна у випадку дисипативної динамічної системи потрібна саме точка на атракторі досліджуваної системи, а не близька до атрактора. В іншому випадку отриманий результат характеризуватиме не поведінку траєкторії на атракторі, а поблизу нього, що є джерелом помилок при обчисленні СПЛ для неконсервативних систем. Не менш серйозною проблемою є також той факт, що на хаотичному атракторі траєкторії не лише збігаються, але й розбігаються з плином часу. Це очевидно впливає з обмеженості атрактора у фазовому просторі динамічної системи. Дійсно, відстань між точками на атракторі не може бути більшою за геометричні розміри самого атрактора, тому вона обов'язково має змінюватись – як збільшуватися так и зменшуватися. Яскравим прикладом цього є відомий метелик Лоренца [4]. В даному пункті ми побудуємо новий універсальний алгоритм, що враховуватиме цю особливість хаотичних атракторів. Також даний алгоритм не залежатиме від форми, розміру та структури самого атрактора та їх кількості в фазовому просторі системи.

2.Універсальний алгоритм оцінки СПЛ. Спочатку розглянемо ситуацію, що ілюструє проблеми, які виникають при дослідженні хаотичної динаміки. Нехай для динамічної системи, що задана аналітично системою диференціальних рівнянь у формі Коші з неперервними правими частинами, що задовольняють умовам Ліпшиця по всім аргументам, окрім часу t

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t). \quad (1)$$

де $x \in \mathbf{R}^n$, \mathbf{R}^n – фазовий простір системи, потрібно оцінити старший показник Ляпунова (СПЛ). В результаті застосування чисельного методу знайдено ненульовий розв’язок для початкових умов $x(t_0) = x_0$, а після перехідного процесу виявлено деякий хаотичний атрактор складної форми та структури. На цьому атракторі відстежимо поведінку двох близьких траєкторій та відстань між ними. Для цього позначимо через x_i точку в фазовому просторі динамічної системи, що відповідає радіус-вектору стану $x(t_i)$.

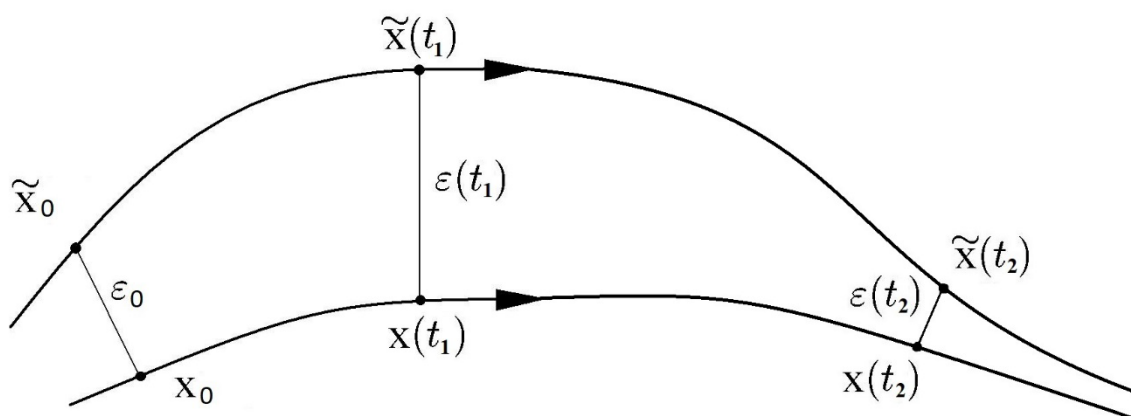


Рис. 1. Збігання та розбігання двох близьких точок на атракторі динамічної системи.

Вибиремо довільну точку x_0 на атракторі динамічної системи (Рис. 1.) в деякий початковий момент часу t_0 . Задавши деяке мале ε_0 , виберем ще одну точку \tilde{x}_0 на атракторі, що задовольняє умові

$$|\tilde{x}_0 - x_0| = \varepsilon_0. \quad (2)$$

З плином часу траєкторії розбігаються та збігаються. В залежності від проміжку часу Δt_1 точки x_0 та \tilde{x}_0 еволюціонують в точки $x(t_1)$ та $\tilde{x}(t_1)$ відповідно. Відстань між ними позначимо через $\varepsilon(t_1)$, де $t_1 = t_0 + \Delta t_1$. Значення $\varepsilon(t_1)$ залежить від початкового положення точок x_0 та \tilde{x}_0 , а також проміжку часу Δt_1 і динамічної системи в цілому. Причому в нашому випадку $\varepsilon(t_1) > \varepsilon_0$. Наближено, можна вважати, що

$$\varepsilon(t_1) \approx \varepsilon_0 e^{\lambda \Delta t_1},$$

де λ є оцінкою старшого показника Ляпунова. Отримане значення буде в даному конкретному випадку додатним. Таким чином, параметром, що характеризує динаміку зображуючої точки на атракторі буде, в першому наближенні, згідно [15, 16]:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\Delta t_1} \ln \frac{\varepsilon(t_1)}{\varepsilon_0} > 0.$$

Якщо тепер провести аналогічні розрахунки для проміжку часу $t_2 = t_1 + \Delta t_2$, то отримаємо, що точки x_0 та \bar{x}_0 еволюціонують в точки $x(t_2)$ та $\bar{x}(t_2)$ відповідно. Відстань між ними $\varepsilon(t_2) < \varepsilon(t_1)$, тому отримуємо наступний результат:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\Delta t_2} \ln \frac{\varepsilon(t_2)}{\varepsilon(t_1)} < 0.$$

Таким чином, в даній ситуації, після усереднення буде отримано занижену оцінку СПЛ

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \approx 0.$$

Зрозуміло, що отримане на другому етапі значення λ_2 для оцінки старшого показника Ляпунова хаотичного атрактора було некоректне. На практиці така ситуація призводить до того, що при обчисленнях за класичними алгоритмами Бенеттіна чи Вольфа, результати для хаосу можуть бути дуже заниженими та неточними. На деяких проміжках часу значення будуть додатні, на деяких від'ємні, а середнє значення буде близьке до нуля, що не дозволить відрізнити регулярні та хаотичні режими (Рис. 2.). Шляхом для підвищення точності таких розрахунків є додавання до алгоритму процедур аналізу отриманих значень на кожному з етапів. Тут слід зазначити, що експоненційне розходження траєкторій еквівалентне експоненційному зближенню в зворотному часі. А згідно з ергодичною теоремою В. І. Оселедця [17], експоненційне розходження двох випадково обраних точок на атракторі з одиничною ймовірністю характеризує старший показник Ляпунова. Тому, для розглянутого вище прикладу коректною оцінкою СПЛ має бути наступне значення:

$$\lambda = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{2} > 0.$$

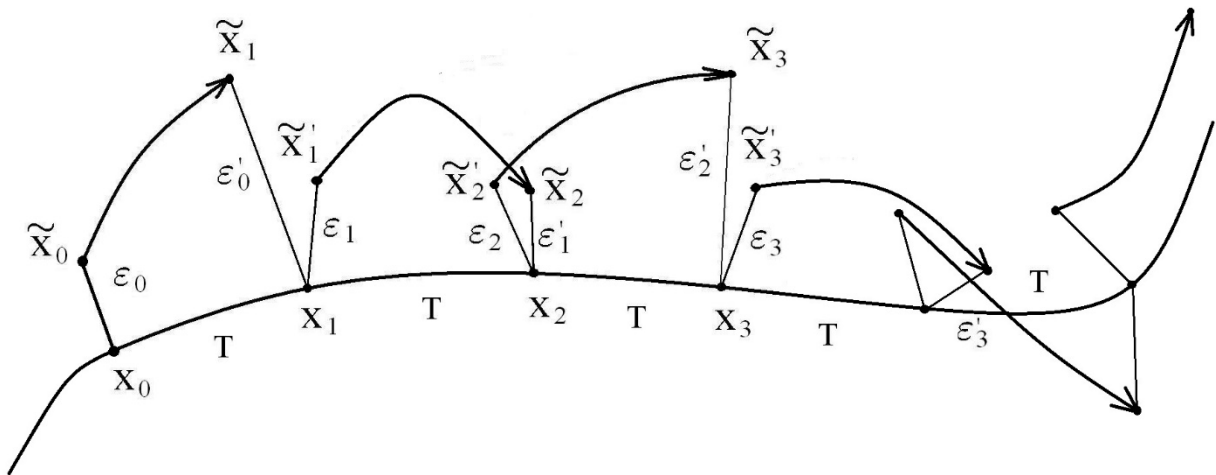


Рис. 2. До універсального алгоритму обчислення старшого показника Ляпунова.

А універсальний алгоритм може виглядати наступним чином.

Крок 1. Після перехідного процесу обираємо точки x_0 та \tilde{x}_0 на розв'язку системи (1) для фіксованих початкових умов так, щоб рівність (2) виконувалася для деякого малого $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Рухаючись по траєкторії розв'язку далі, через час T отримаємо відповідно точки x_1 та \tilde{x}_1 на ньому. Знаходимо перше значення

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{\varepsilon_0}.$$

Крок 2. Фіксуємо одну з отриманих точок, наприклад x_1 , а \tilde{x}'_1 знаходимо розв'язуючи систему далі від точки x_1 до виконання умови $|\tilde{x}'_1 - x_1| = \varepsilon_1 \leq \varepsilon$. Таким чином і початок і кінець вектора збурення лежать на аттракторі. Через час T отримаємо наступні значення x_2 та \tilde{x}_2 на аттракторі. Знаходимо наступне значення

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{\varepsilon_1}.$$

Крок 3. Повторюючи цю процедуру M разів, знаходимо СПЛ, як середнє арифметичне значень, отриманих на кожному етапі:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\lambda_k|.$$

Отримане число, за ергодичною теоремою В. І. Оселедця [17], з імовірністю одиниця характеризуватиме старший показник Ляпунова атрактора. Зрозуміло, що отримане значення залежатиме як від вибору величини ε , так і довжини проміжку часу T . Як було зазначено вище величину ε потрібно узгоджувати з геометричним розміром атрактора. Довжина T має бути значно меншою за час умовного “повного оберту” зображуючої точки по атрактору. [23].

2.5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Основною характеристикою, яка дозволяє вивчати динамічний режим на кількісному і якісному рівні, є частотний спектр. Як відомо, перетворення Фур'є функції часу є функцією змінної ω , яку слід розглядати як кутову частоту. Тому перетворення Фур'є функції часу

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

можна розглядати як спектральне представлення цієї функції координат $x(t)$. Аналіз за допомогою перетворення Фур'є називається частотним аналізом. При цьому розглядають графік $F(\omega)$ як функція ω . В загальному випадку $F(\omega)$ це комплексна функція, тому можна окремо зобразити дійсну і уявну частини функції $F(\omega)$, або амплітуду і фазу функції $F(\omega)$:

$$F(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)},$$

тут $A(\omega)$ - амплітуда функції $F(\omega)$, є дійсною ненегативною функцією аргументу ω :

$$A(\omega) = \sqrt{(\Re[F(\omega)])^2 + (\Im[F(\omega)])^2},$$

а $\theta(\omega)$ — фаза $F(\omega)$, дійсна функція аргументу ω :

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{\Im[F(\omega)]}{\Re[F(\omega)]}.$$

Амплітуду $A(\omega)$ для часової реалізації $x(t)$ зручно зобразити графікічно за логарифмічною шкалою як функцію частоти (з амплітудою, вираженою в децибелах і частотою в герцах):

$$S(f) = 10 \lg[A(f)]^2,$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

На практиці частотний спектр будується чисельно [24, 25], за допомогою дискретного перетворення Фур'є. В даному випадку часто використовується алгоритм Кулі-Туки швидкого перетворення Фур'є, який значно оптимізує кількість необхідних числових обчислень [26].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 2.

1. Краснополюская Т. С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением./ Т. С. Краснополюская, А. Ю. Швец – Ижевск: НИЦ “ Регулярная и хаотическая динамика ”, институт компьютерных исследований, 2008. – 280 с.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах./ В.С. Анищенко, – М.: Наука, 1990, – 312 с.
3. Андронов А.А. Теория колебаний./А.А Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин – М.: Наука, 1981. – 312с.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос./ С.П. Кузнецов - М.: Наука, 2002. – 296 с.
5. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz / / J. Atmos. Sci. – 1963. – Vol. 20. – P. 130–141.
6. Ruelle D. On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens / / Comm. Math. Phys. – 1971. – Vol. 20. – P. 167–192.
- 7.Титов Н.К. Моделирование систем с запаздыванием./ Н.К. Титов, В.К. Успенский , –Ленинград: Энергия, 1969. -100с.
8. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом./ Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин .- М.: Наука, 1971. – 296с.
9. Hairer E. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems / E. Hairer, G. Wanner, P. Norsett. – Heidelberg. : Springer Berlin, 1993. – 528p.
10. Пимёнов В.Г. Функционально-дифференциальные уравнения в биологии и медицине./ В.Г. Пимёнов. – Екатеринбург, 2008. – 91с.
11. Бондаренко Н.В. Моделювання динамічних систем з запізнюванням за допомогою узагальнених методів Рунге-Кутта / Н.В. Бондаренко, В.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2019. – Вип. 96. - С. 3- 11.
12. Ильин М.И. Аппроксимация и интерполяция. Методы и приложения./ М.И. Ильин, - Рязань, 2010. - 56 с.

13. Бондаренко Н.В. Побудова явних методів Рунге-Кутти для моделювання динамічних систем з запізнюванням / Н.В. Бондаренко, В.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2020. - Вип. 99. - С. 16-27.
14. Печук В.Д. Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем з запізнюванням / В.Д. Печук, Н.В. Бондаренко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2021. - Вип. 101. - С. 168-180.
15. Benettin G. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. Strelcyn // Meccanica. – 1980. – **15**, No. 1. – P. 9–20.
16. Benettin G. Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J. Strelcyn // Phys. Rev. A. – 1976. – **14**, No. 6. – P. 2338–2342.
17. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / В. И. Оселедец // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1968. – **19**. – С. 179–210.
18. Krasnopolskaya T. S. Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity/ T. S. Krasnopolskaya , V. V. Meleshko, G. W. M. Peters, H. E. H. Meijer // Eur. J. Mech. B-Fluids. – 1999. – **18**, No. 5. – P. 793–822.
19. Meleshko V. Coherent structures and scales of Lagrangian turbulence/ V. V. Meleshko, T. S. Krasnopolskaya, G. W. M. Peters, H. E. H. Meijer, S. Gavrilakis, L. Machiels, P. A. Monkewitz (eds.)// Advances in Turbulence. VI. Fluid Mechanics and its Applications. – Vol. 36. – Dordrecht: Springer, 1996. – P. 601–604.
20. Pechuk V.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk. // CHAOS 2021 International Conference, [Crete], 8-11 June, 2021 / Proceedings. - P. 351-359.
21. Pechuk V.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation. / V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk. // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). – 2022. – Вип. 1. - P. 3-12.
22. Pechuk V.D. Maximum Lyapunov Exponent Calculation / V.D. Pechuk,

T.S. Krasnopolskaya, E.D. Pechuk //materials CHAOS 2021: 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. - Springer Proceedings in Complexity. Springer. – 2022. - P. 327–335.

23. Печук В.Д. Універсальний алгоритм оцінки старшого показника Ляпунова в дисипативній динамічній системі/ В.Д. Печук, Т.С. Краснополяска, Є.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2023. - Вип. 105. - С. 190-199.

24. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах : Монографія / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наукова думка, 1981. – 284 с.

25. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики : Монографія / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацьпура. – К. : Інтерсервіс, 2013. – 572 с.

26. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наукова думка, 1981. – 284 с.

РОЗДІЛ 3. ХРЕСТОПОДІБНІ ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ

3.1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ І МОДЕЛЕЙ

Загальним завданням аеро-гідромеханіки є визначення поля швидкостей гідросередовища при заданих поверхневих і об'ємних силах, заданих граничних і початкових умовах. Коли поле швидкостей створюється коливаючимся тілом, задача формулюється так: визначити поле швидкостей середовища або руху вільної поверхні при умові рівності швидкостей тіла (або їх складових) і середовища на кордоні коливаючогося тіла [1-13]. Це загальна задача, яка набуває своїх специфічних особливостей при конкретизації як моделей гідросередовища, так і коливаючогося тіла. У даній дисертації буде розглянута загальна проблема взаємодії по відношенню до такої загальноприйнятої моделі середовища, як ідеальна нестислива рідина.

Ефекти взаємодії в системах тіло-рідина істотно залежать від властивостей руху розглянутих структур. Найпростішою моделлю рухомої конструкції є коливання жорсткого (абсолютно твердого) тіла. При цьому структура не деформується, а робить просторові коливання. Такий підхід використовується в даній дисертації.

3.2. ДИНАМІКА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИН. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Найпростіша модель рідини - ідеальна нестислива середа, що володіє властивістю ідеальної текучесті при русі. Ця властивість рівнозначна умові відсутності внутрішнього тертя. У рухомій ідеальній рідині виконується закон Паскаля рівності до нуля дотичних напружень [9, 14]:

$$p_{12} = p_{21} = p_{23} = p_{32} = p_{31} = p_{13} = 0 \quad (1)$$

і рівність нормальних

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p; \quad \vec{p}_n = -p\vec{n}, \quad (2)$$

де \vec{n} - нормаль до поверхні.

У моделі ідеальної рідини задається тільки умова непроникності і рівності нормальних складових швидкостей на рухомих поверхнях конструкцій в середовищі, так як допускається вільне ковзання як поверхонь конструкцій, так і шарів рідини по відношенню один до одного.

Основні диференціальні рівняння динаміки ідеальної рідини містять рівняння неперервності компонента вектора швидкості

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho V_3) = 0, \quad (3)$$

де ρ - щільність рідини, x_i - декартові координати, V_i - складові вектора швидкості, $i = 1, 2, 3$ і рівняння динаміки неперервного середовища в напругах

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) &= \rho F_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \\ \rho \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) &= \rho F_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \\ \rho \left(\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) &= \rho F_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (4)$$

де F_i - складові вектора об'ємних сил $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ - тиск. Для отримання повної системи рівнянь в загальному випадку баротропної рідини система рівнянь (3) - (4) доповнюється рівнянням

$$\rho = f(p). \quad (5)$$

Якщо розглядається ідеальна нестислива (тобто та, щільність якої постійна), то умова (3) набуває вигляду:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0; \quad (6)$$

Тоді замкнута система рівнянь руху ідеальної рідини набуває вигляду [8]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= 0; \\
\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} &= F_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}; \\
\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} &= F_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}; \\
\frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= F_3 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Припустимо, що рух рідини є безвихровим, тобто вихори відсутні. Як відомо, можливість існування такого руху визначається виконанням теорем Кельвіна і Лагранжа [9], а саме виконанням умови сталості циркуляції швидкості по замкнутому контуру і сталістю безвихрового руху, якщо так було в початковий момент. При виконанні припущення про безвихровість руху у всьому полі, коли згідно з теорією Кельвіна

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0 \tag{8}$$

можна ввести потенціал швидкості, функцію $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ коли $\vec{V} = \operatorname{grad} \bar{\varphi}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = V_i(x_i, t). \tag{9}$$

Якщо рідина нестислива, то за першим рівнянням системи (7)

$$\operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0. \tag{10}$$

Таким чином, для потенціалу швидкості має виконуватись рівняння (10).

3.3. ХРЕСТОПОДІБНІ ХВИЛІ

Хрестоподібні хвилі - це хвилі, перпендикулярні напрямку руху хвилепродуктора. Хоча вони були добре відомі хоча б з часів знаменитої роботи М. Фарадея в 1831 році, їх аналіз має великі математичні труднощі, викликані тим, що лінеаризовані рівняння не описують механізм їх виникнення і передачі енергії від руху хвилепродуктора до такого роду хвиль. Хрестоподібні хвилі

можуть виникати при русі хвилепродуктора, що незалежить від поперечної координати, скажімо, ширини каналу (координати y на рис. 1), коли коливання хвилепродуктора відбуваються вздовж каналу (по координаті x на рисунку 1). При цьому лінеаризовані рівняння не містять доданків, що відповідають передачі енергії від хвилепродуктора до хрестоподібних хвиль, а значить, їх (хвиль) не повинно існувати. Проте вони спостерігаються і існують на практиці (в експерименті). В експериментах по збудженню хрестоподібних хвиль хвилепродуктор коливається з частотою, половинне значення якої близьке до власної частоти хрестоподібних хвиль. Це свідчить про реалізацію параметричного резонансу, тобто механізм збудження перехресних хвиль є реалізацією умов параметричного резонансу.

У даній роботі вперше буде показано існування хрестоподібних хвиль без урахування інших поверхневих хвиль в тому випадку, коли геометрія басейну така, що коливання середнього рівня нехтовно малі. Всі попередні дослідження К. Я. Гарретта [15], Дж. Махони [16], Джонса [17], вказували що саме взаємодія хрестоподібних хвиль з основним базовим рухом вільної поверхні рідини що безпосередньо збуджується хвилепродуктором, передає енергію хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі. Звичайно, такого роду взаємодія також створює канал для перекачування енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі. Але навіть без урахування такої взаємодії ці хвилі збуджуються і існують. Механізм генерації хрестоподібних хвиль при наявності значних коливань середнього рівня рідини в басейні вперше був пояснений Гарреттом в 1970 році [15]. Він вигляділив коливання середнього рівня, а поверхневі хвилі були розкладені на ряди Фур'є по довжині і ширині басейну. Застосувавши процедуру Бубнова-Галеркіна для амплітуди хвилі, яку він розглядав як основну з хвильовими числами $n = 0$ (по довжині басейну x) та $m = 1$ (по ширині), після лінеаризації рівнянь з відносно невеликою амплітудою хвилі він отримав рівняння Матьє (по ширині) для амплітуди цієї хвилі. З цього рівняння він зробив висновок, про можливість існування хвилі з половиною частотою хвилі хвилепродуктора при наявності коливань середнього рівня. Коливання

середнього рівня в силу виконання закону збереження маси рідини мають існувати завжди. Однак їх амплітуда може бути незначною, що залежить від співвідношення довжини басейну до його ширини. Чим більше це співвідношення, тим менше амплітуда коливань середнього рівня. При співвідношенні, близькому до 10, вони стають наступного порядку малості величини, тобто незначними. Тому в 1972 році Дж. Махоні [16] переглянув теорію Гарретта, показавши, що вона не була застосовна до довгих басейнів. Він створив теорію генерації хрестоподібних хвиль, коли відбувається взаємодія вимушених хвиль і хрестоподібних. Махоні [16] розглядав нелінійні граничні умови, на хвилепродукторі також. Він, однак, розглядав довгий басейн, для якого він враховував умови випромінювання, коли $x = \infty$. Махоні, як і Гаррет, розглядав механізм нестійкості хвиль або коливань, які не залежать від координат уздовж хвилепродуктора, а залежать від координат по ширині y басейну, по якій генеруються хрестоподібні хвилі. Їх нестійкість призводить до генерації хрестоподібних хвиль. Махоні [16] використовував в якості основних коливань поверхні рідини такі, що відповідають знаменитому розв'язку 1929 року Хаверлока для нескінченного басейну. Ми розглядаємо генерацію хрестоподібних хвиль в довгому басейні, але скінченного розміру. Крім того, як зазначив А. Джонс [17] Махоні лінеаризував рівняння щодо амплітуди хрестоподібних хвиль, опустивши члени, які навіть більші за ті, що залишилися, стверджуючи, що вони не впливають на резонанс. А. Джонс [17] утримав всі нелінійні члени, але його розв'язок для хрестоподібних хвиль знайдено для нескінченно довгого каналу. Крім того, безпосередньо збуджені (вимушені хвилі) при застосуванні методу розкладу на малому параметру виявляються на порядок більшими ніж хрестоподібні. У роботах С. Ліхтера і його учнів [18-23] хрестоподібні хвилі розглядаються для значних хвильових параметрів по ширині басейну, який є напівнескінченим, що дозволяє застосовувати розв'язок Гавелка (1929). У цих роботах було розглянуто відразу кілька хрестоподібних хвиль, частоти яких близькі. Наприклад, в роботах Ліхтера і Аїдехілла [19]

вперше були вивчені хаотичні хрестоподібні хвилі з одночасним збудженням двох таких хвиль (власних мод).

Дж. Майлз [24, 25] застосував варіаційний метод (заснований на роботі Лока 1967 року) для отримання розв'язок для хрестоподібних хвиль в прямокутному басейні. При цьому він зводив граничну умову рівності швидкості при нулі на дні басейну до нескінченності, тобто розглядав нескінченно глибокий канал ($4\pi d > b$). Ми розглянемо хрестоподібні хвилі в прямокутному басейні скінченних розмірів.

3.4. ЛАБОРАТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

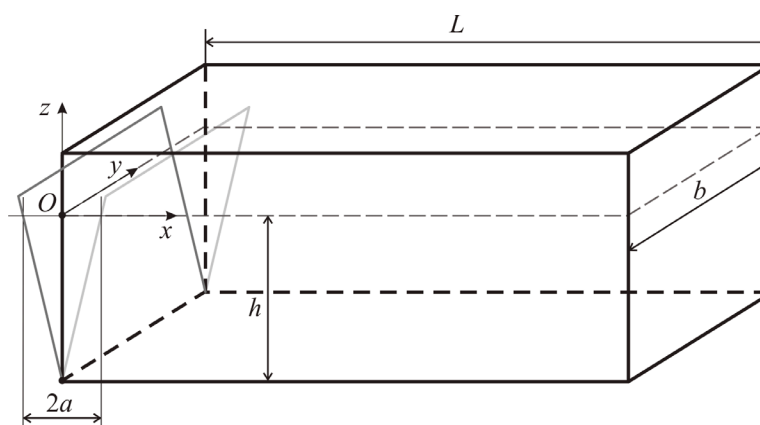


Рис. 1: Басейн з хвилепродуктором

Експериментальні спостереження за хрестоподібними хвилями проводилися в експериментальному басейні Інституту гідромеханіки НАН України. Басейн має розміри: довжина $L = 50$ м, ширина $b = 6,8$ м і глибина $3,5$ м. Експерименти проводилися при наповненні басейну на глибину $2,5$ м. Схематично басейн з хвилепродуктором представлений на рис. 1. Введемо декартову систему координат з початком в точці 0 на незбуреній поверхні рідини. Хвилепродуктор розташовується в одному кінці басейну, при $x = 0$ рухи хвилепродуктора в напрямку осі \vec{x} описуються функцією

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{az}{h} \right) \sin \omega t,$$

Де $2a$ - діапазон коливань хвилепродуктора на поверхні рідини, ω - частота $\omega = 2\pi f_e$. В експериментальних дослідженнях частота хвилепродуктора варіювалася в діапазоні $0 < f_e < 2,5$ Гц. На відносно низьких частотах f_e хвилі збуджувалися тільки в напрямку x , потім, при збільшенні f_e - і в напрямку y , тобто хрестоподібні хвилі. Хвилі в напрямку хвилепродуктора мають вигляд, показаний на фото рис.2 (а)



а) Симетричні вимушені б) Хрестоподібні хвилі, що зароджуються

Рис. 2: Хвилі на вільній поверхні басейну

При $f_e > 1,5$ Гц спостерігалися хрестоподібні хвилі. Їх зародження при початковому збільшенні частоти хвилепродуктора показано на рис.2 (б).

На рисунку 3 (а) представлена фотографія зароджуючихся хрестоподібних хвиль при $f_e = 1,87$ Гц, а на (б) показані встановлені хрестоподібні хвилі поблизу хвилепродуктора при $f_e = 2,27$ Гц.



Рис. 3: Хрестоподібні хвилі (а) хрестоподібні хвилі, що зароджуються; б) встановлені хрестоподібні хвилі

Якщо порівнювати фотографії на рис.2 (а) і 3, то очевидно, що стоячі хрестоподібні хвилі мають набагато більші амплітуди, що перевищують амплітуди хвиль на рис.2 (а) в напрямку x більш ніж в 5 разів, крім того хрестоподібні хвилі мають частоти блтзькі до $\frac{1}{2}f_e$, а саме 1,15 Гц.

На фото зображених на рис. 4, передній фронт хрестоподібної хвилі у хвилепродуктора виділений жовтими маркерами, щоб було легше порівнювати.

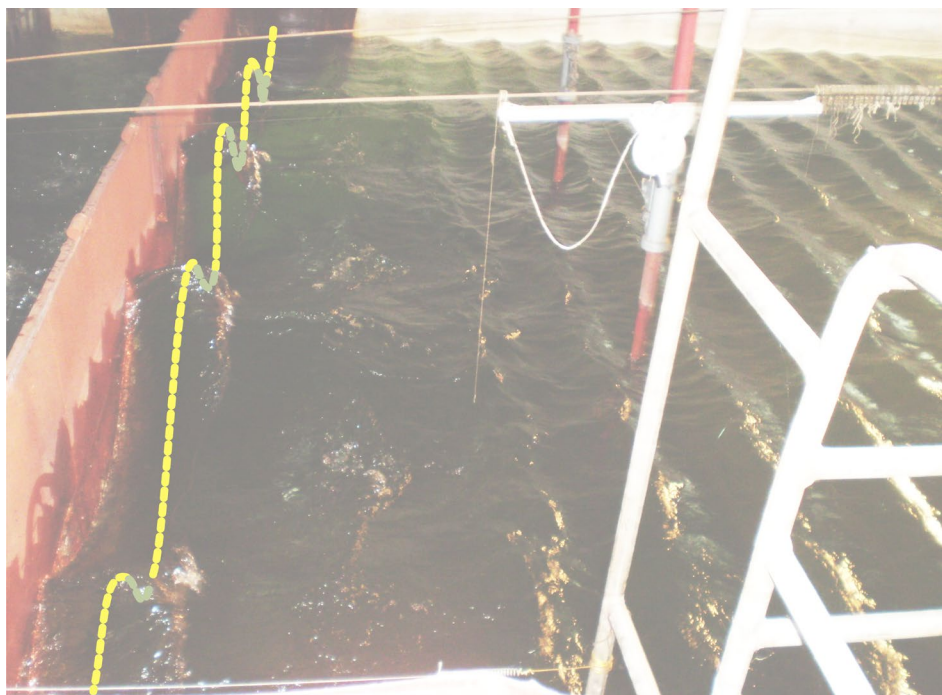


Рис. 4: Фронт хрестоподібних хвиль на хвилепродукторі

На фото зображеному на рис. 5 показано слід на поверхні хвилепродуктора, залишеного хрестоподібними хвилями після першого експерименту в басейні, коли на початку експерименту водяний слід був горизонтальним. Мокрий слід ми посилити пунктирною лінією.

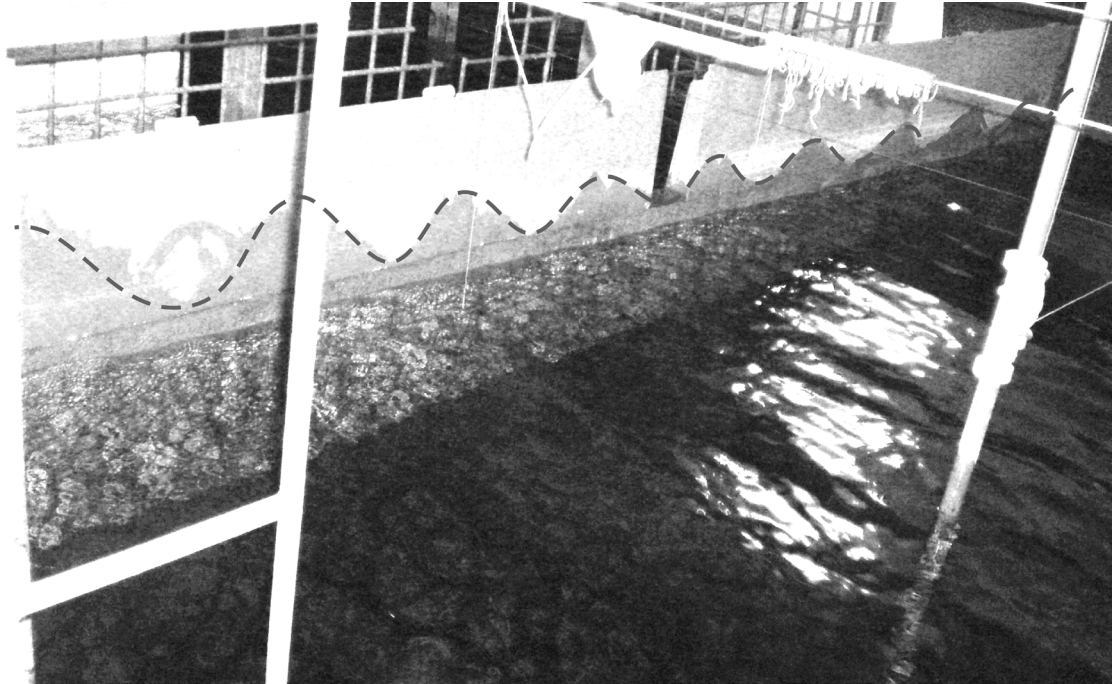


Рис. 5: Слід хрестоподібних хвиль на хвилепродукторі

З рис.5 можна зробити висновок, що в напрямку ширини, тобто по координаті y , спостерігалось 10 напівхвиль, тобто така форма коливань, коли в напрямку y реалізується форма

$$\xi_{0,10}(y) = \cos \frac{10\pi}{b} y = \cos \frac{5(2\pi)}{b} y.$$

Вимірювання частоти хрестоподібних хвиль показали, що їх частота дорівнює 1,15 Гц, а власна частота коливань по власній моді (вигляд всіх можливих власних форм коливань на вільній поверхні прямокутного басейну буде детально розглянуто в наступному пункті)

$\xi_{0,10}(y) = \cos \frac{0\pi}{L} x \cos \frac{10\pi}{b} y = \cos \frac{10\pi}{b} y$ дорівнює $\omega_{010} = 1,07$ Гц, що близько до 1,15 Гц.

На рисунку 6 представлений графік в квадраті 6,8 x 6,8 для порівняння з експериментально спостережуваною формою хвилі (рис. 2 (а)), що відповідає власній формі вимушеної хвилі $\xi_{150,0}(x) = \cos \frac{150\pi}{L}x$, якій відповідає власна частота $\omega_{150,0} = 2\pi f_{150,0}$ коли $f_{150,0} = 1,53$ Гц.

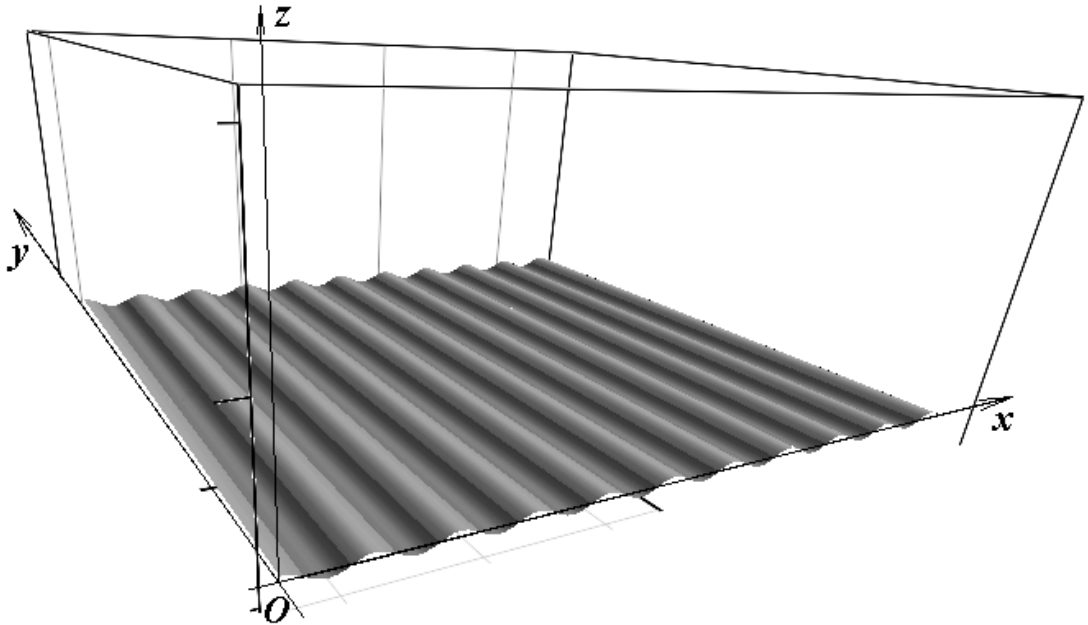


Рис. 6: Графік вимушених симетричних хвиль

Відзначимо, що власні частоти поверхневих хвиль в прямокутному басейні визначаються (як буде показано в наступному пункті) формулою

$$\omega_{nm} = (gk_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h))^{1/2}; k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}. \quad (1)$$

для власної моди $\xi_{nm}(xy) = \cos \frac{n\pi}{L}x \cos \frac{m\pi}{b}y$

Власна мода хрестоподібних хвиль вигляду

$$\xi_{40,10}(x,y) = \cos \frac{40\pi x}{L} \cos \frac{10\pi y}{b}. \quad (2)$$

має частоту $\omega_{40,10} = 2\pi f_{40,10}$ с $f_{40,10} = 1,143$ Гц. При цьому $2 f_{40,10}(y) \approx f_e = 2,27$ Гц, тобто виконується умова здійснення основного параметричного

резонансу, при якому реалізуються хрестоподібні хвилі. На рисунку 7 представлений графік в квадраті 6,8 x 6,8 даного режиму.

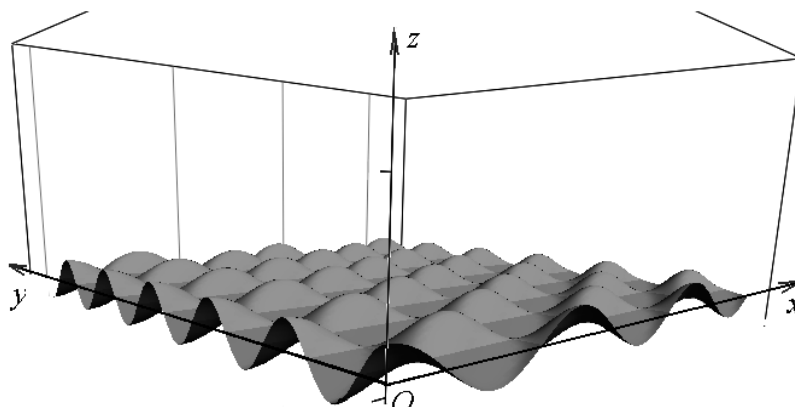


Рис. 7: Графік хрестоподібних хвиль

Якщо до хрестоподібних хвиль (2) додати резонансні вимушені хвилі, які мають власну частоту 2,1 Гц (що досить близько до 2,27 Гц) і мають форму ,

$\xi_{175,0} = \cos \frac{175\pi}{L} x$ то коливання вільної поверхні басейну записуються як

$$\xi(x, y) \approx \xi_{40,10} + 0,2\xi_{175,0} = \cos \frac{40\pi x}{L} \cos \frac{10\pi y}{b} + 0,2 \cos \frac{175\pi}{L} x. \quad (3)$$

При цьому ми вже врахували, що амплітуди хрестоподібних хвиль в 5 разів більше вимушених. Крім того, з експериментальних досліджень [26, 19, 20] відомо, що хрестоподібні хвилі локалізуються біля хвилепродуктора, що прекрасно видно на фото на рис. 4, і швидко згасають з віддаленням від хвилепродуктора. Тому порівнюємо хвилі в експерименті на рис. 4 з графіком поверхні, представленої у вигляді

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &\approx \xi_{40,10} \exp(-x) + 0,2\xi_{175,0} = \\ &= \cos \frac{40\pi x}{L} \cos \frac{10\pi y}{b} \exp(-x) + 0,2 \cos \frac{175\pi}{L} x. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 8 - графік зазначеної форми вільної поверхні. Порівняння рис. 4 і рис. 8 вказує на відмінну відповідність.

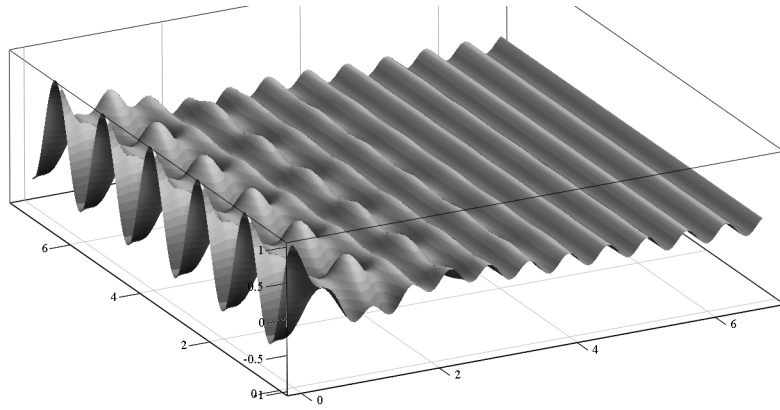


Рис. 8: Графік хрестоподібних хвиль $\xi(x, y) \approx \xi_{40,10} \exp(-x) + 0,2\xi_{175,0}$.

Для порівняння, на рисунку 9 представлений графік форми $\xi_{0,10}(y) = \cos \frac{0\pi}{L} x \cos \frac{10\pi}{b} y = \cos \frac{10\pi}{b} y$ ($\omega_{010} = 1,07$ Гц) з експоненціальним згасанням на x .

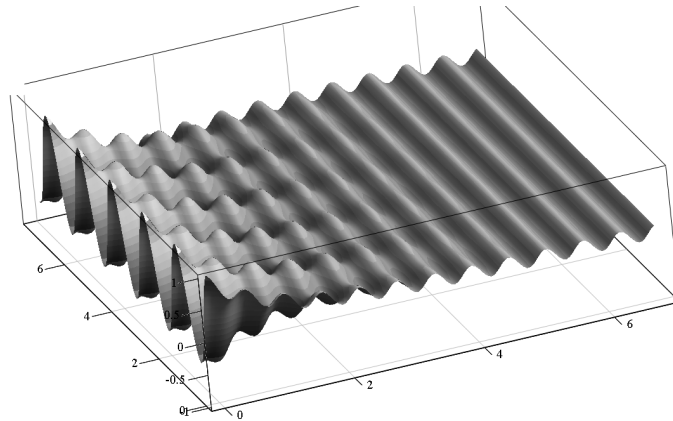


Рис. 9: Графік хрестоподібних хвиль $\xi(x, y) \approx \xi_{0,10} \exp(-x) + 0,2\xi_{175,0}$.

Цей графік добре збігається з картиною, що спостерігається в експерименті, представленому на рис. 3 на правому фото, а також на рис. 4 попереднього розділу. Крім того, надамо графік форми

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &\approx \xi_{90,10} \exp(-x) + 0,2\xi_{175,0} = \\ &= \cos \frac{90\pi x}{L} \cos \frac{10\pi y}{b} \exp(-x) + 0,2 \cos \frac{175\pi}{L} x. \end{aligned} \quad (5)$$

на рис. 10, для подальшого використання цієї форми в нашому дослідженні. Власна частота перехресної хвилі становить 1,347 Гц. [27].

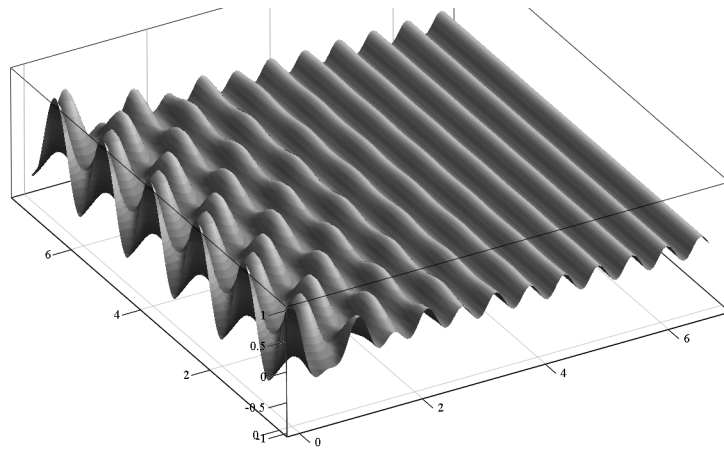


Рис. 10: Графік хвилі $\xi(x, y) \approx \xi_{90,10} \exp(-x) + 0,2\xi_{175,0}$.

3.5. НОВА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ЩО ОПИСУЄ ПРЯМЕ ЗБУДЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ КОЛИВАННЯМИ ХВИЛЕПРОДУКТОРА

1 Математична постановка задачі

Припускаючи, що рідина нев'язка і нестислива, розглянемо хвилі на її поверхні в басейні довжини L , ширини b , і глибини h . Рис. 1. попереднього пункту. Для теоретичного розгляду проблеми введемо декартову систему координат з початком O на вільній незбуреній поверхні рідини. Хвилепродуктор розташований в торці при $x = 0$. Рухи хвилепродуктора в напрямку \vec{x} описуються функцією

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{a}{h} z \right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

де $2a$ - діапазон коливань хвилепродуктора на поверхні рідини; ω - кругова частота.

В експериментальних дослідженнях частота хвилепродуктора $f_e = \omega / (2\pi)$ варіювалася в діапазоні $0 < f_e \leq 3$ Гц. На відносно низьких частотах f_e збуджуються тільки хвилі в напрямку Ox , потім при збільшенні f_e - і в напрямку Oy , тобто хрестоподібні хвилі. Припускаючи, що рідина ідеальна, а її рух безвихровий, введемо потенціал для поля швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$, коли $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$. Тоді для φ із умови неперервності маємо рівняння

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ при } F(z) \cos(\omega t) \leq x \leq L, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (2)$$

де $\xi(x, y, t)$ - зсув вільної поверхні.

Динамічний і кінематичний стан на вільній поверхні мають, відповідно, вигляд

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + g\xi = F_0(t) \text{ при } z = \xi(x, y, t); \quad (3)$$

$$\varphi_z = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \xi + \xi_t \text{ при } z = \xi(x, y, t), \quad (4)$$

де g - прискорення вільного падіння; $F_0(t)$ - Довільна функція часу [12],
підрядкові символи t, x, y, z позначають частинні похідні.

Крім того, ми маємо наступні однорідні граничні умови. Нормальна складова швидкості рідини перетворюється на нуль в жорстких межах

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ \varphi_y = 0 & \text{при } y = 0; \quad y = b; \\ \varphi_x = 0 & \text{при } x = L; \end{cases} \quad (5)$$

Кінематичний стан на коливаючомуся хвилепродукторі має вигляд

$$\varphi_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) \varphi_z \sin \omega t \quad \text{при } x = F(z) \sin \omega t. \quad (6)$$

Експериментальні спостереження свідчать про те, що спочатку хвилепродуктор створює вимушені стоячі хвилі в напрямку свого руху вздовж осі $O\bar{x}$, а потім стоячі хвилі з'являються біля хвилепродуктору в напрямку, перпендикулярному його руху по осі $O\bar{y}$, а кількість хвильових гребенів змінюється зі збільшенням швидкості коливань. ω хвилепродуктора. Таким чином, хрестоподібні хвилі мають резонансний характер, кожна окрема хвильова структура має свою «власну» частоту.

Припускаючи, що ці хвильові структури можуть бути апроксимовані за такими динамічними характеристиками, як власні форми, які є розв'язками лінійних задач. Тому необхідно розглянути лінійні крайові задачі, що відповідають нелінійній задачі (2) -(6). Крім того, ми вважаємо, що діапазон коливань хвилепродуктора невеликий $2a$ в порівнянні з характерним розміром, тобто можна ввести, скажімо, невеликий параметр $\varepsilon_0 = a\omega^2 / g$. Розглянемо розв'язок наступної лінійної крайової задачі

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_z = \xi_t \text{ при } z = 0; \\ \varphi_z = 0 \text{ при } z = -h; \\ \vdots \\ \varphi_x = F_t(z, y, t) \text{ при } x = 0; \\ \varphi_x = 0 \text{ при } x = L; \\ \varphi_y = 0 \text{ при } y = 0; \\ \varphi_y = 0 \text{ при } y = b. \end{array} \right. \quad (8)$$

Розв'язок лінійної задачі (7) – (8) можна знайти традиційно використовуваним методом Грінберга. Пропонуємо використовувати метод аналітичної суперпозиції, так як він дає чітку фізично прозору картину перекачування енергії з хвилепродуктора в коливання вільної поверхні рідини. Ідея методу суперпозиції вперше була висунута Ламе [28]. Слідуючи цьому методу, потенціал φ можна записати як суму трьох гармонічних функцій

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (9)$$

Потенціал φ_0 - це розв'язок наступної граничної задачі

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_0)_z = (\xi_0(t))_t \text{ при } z = 0; \\ (\varphi_0)_z = 0 \text{ при } z = -h; \\ \vdots \\ (\varphi_0)_x = (F_0(t))_t \text{ при } x = 0; \\ (\varphi_0)_x = 0 \text{ при } x = L; \\ (\varphi_0)_y = 0 \text{ при } y = 0; \\ (\varphi_0)_y = 0 \text{ при } y = b, \end{array} \right. \quad (11)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0(t) = \frac{1}{bL} \int_0^b \int_0^L \xi(x, y, t) dx dy; \\ \dot{F}_0(t) = \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \dot{F}(z, y, t) dy dz; \\ \left(\begin{array}{l} \text{якщо від } y \text{ не залежить, то} \\ \dot{F}_0(t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \dot{F}(z, t) dz \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (12)$$

Якщо $F(z) = a + \frac{a}{h}z$, тоді

$$\begin{aligned} \dot{F}_0(t) &= \frac{\sin \omega t}{h} \int_{-h}^0 \left(a + \frac{a}{h}z \right) dz = \\ &= \frac{\sin \omega t}{h} \left(az - \frac{a}{2h}z^2 \right) \Big|_{-h}^0 = \frac{\sin \omega t}{h} \left(ah - \frac{ah}{2} \right) = \frac{a \sin \omega t}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$\xi_0(t)$, $\dot{F}_0(t)$ описують коливання середнього рівня вільної поверхні рідини і усереднене по поверхні переміщення хвилепродуктора. Ці величини пов'язані співвідношенням

$$(\xi_0)_t bL - \dot{F}_{0t} hb = 0, \quad (14)$$

що виражає закон збереження маси для нестисливої рідини. Так, для розглянутого випадку рух хвилепродуктора (1), (13)

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah \sin \omega t}{2L} = \left(\frac{ah}{2L} \right) \sin \omega t. \quad (15)$$

Потенціал φ_1 визначається з розв'язку наступної лінійної задачі

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t \text{ при } z = 0; \\ (\varphi_1)_z = 0 \text{ при } z = -h; \\ (\varphi_1)_x = 0 \text{ при } x = 0; \\ (\varphi_1)_x = 0 \text{ при } x = L; \\ (\varphi_1)_y = 0 \text{ при } y = 0; \\ (\varphi_1)_y = 0 \text{ при } y = b, \end{array} \right. \quad (17)$$

При цьому для φ_1 граничні умови (17) однорідні в напрямку абсцис і ординат, тобто $O\vec{x}$ і $O\vec{y}$, і неоднорідні (похідна по z не дорівнює нулю) в напрямку $O\vec{z}$. Тому φ_1 , згідно з теоремою Стеклова про розв'язання задачі Штурма-Ліувіля, буде представлений у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по x і y , а по z функції не будуть являти собою повну систему.

Для потенціалу φ_2 крайова задача формулюється наступним чином

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_2)_z = 0 \text{ при } z = 0; \\ (\varphi_2)_z = 0 \text{ при } z = -h; \\ (\varphi_2)_x = \left(\begin{array}{c} \dot{F} \\ F - F_0 \end{array} \right)_t \text{ при } x = 0; \\ (\varphi_2)_x = 0 \text{ при } x = L; \\ (\varphi_2)_y = 0 \text{ при } y = 0; \\ (\varphi_2)_y = 0 \text{ при } y = b, \end{array} \right. \quad (19)$$

Оскільки φ_2 має однорідні граничні умови по y і по z , і неоднорідні по x , то даний потенціал φ_2 можна представити у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по y і z . Слід зазначити, що потенціал φ_2 не створює зміни швидкості ξ на вільній поверхні при $z = 0$, він створює компонент тиску, як впливає з динамічної умови на вільній поверхні (3). Причому дана складова має частоту коливань хвилепродуктора $\dot{F}(t)$ в лінійному наближенні задачі.

Важливо зазначити, що крайові задачі (10)–(11), (16)–(17) і (18)–(19) є задачами Неймана, коли задана нормальна похідна гармонічної функції. Для отримання розв'язку без особливостей у кутових точках друга теорема Гріна вимагає, щоб ці задані значення задовольняли умові нульового потоку через границю. Ця властивість задовольняється для всіх трьох крайових задач. Розв'язок крайової задачі для φ_0 можна знайти у вигляді

$$\varphi_0 = -\dot{F}_0(t) \frac{(x-L)^2}{2L} + \dot{\xi}_0 \frac{(z+h)^2}{2h} \quad (20)$$

(тут точка означає похідну по часу). Однак, враховуючи умову (14), яка дає, $\dot{\xi}_0 = \dot{F}_0 \frac{h}{L}$ рівняння Лапласа для

$$\varphi_0 = \frac{\dot{F}_0}{2L} \{-(x-L)^2 + (z+h)^2\} \quad (21)$$

задовольняється тотожно.

Розв'язок лінійної задачі (16)–(17) можна записати як

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{ch[k_{nm}(z+h)]}{ch(k_{nm}h)} \quad (22)$$

по повним системам функцій $\cos \frac{n\pi x}{L}$ і $\cos \frac{m\pi y}{b}$ з невідомими амплітудами $\varphi_{nm}(t)$, де

$$k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (23)$$

Система функцій $\cos \frac{n\pi x}{L}$ і $\cos \frac{m\pi y}{b}$ є повною ортогональною системою, тому будь-яка функція, яка залежить від x і y може бути представлена у вигляді ряду Фур'є по цим функціям. Тому функцію рухів (хвиль) вільної поверхні рідини $\xi(x, y, t) - \xi_0(t)$ можна представити у вигляді

$$\xi(x, y, t) - \xi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (24)$$

Гранична умова (17) вигляду $(\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t$ дає зв'язок між амплітудами рядів (22) і (24)

$$\varphi_{nm} = \dot{\xi}_{nm} (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{-1}. \quad (25)$$

Потенціал швидкості $\varphi_2(x, y, z, t)$ може бути записаний у вигляді рядів Фур'є над повними системами $\cos \frac{m\pi y}{b}$ і $\cos \frac{j\pi z}{h}$, так що загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi_2 = \sum_m \sum_j \Phi_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}, \quad (26)$$

$$\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{j^2 \pi^2}{h^2}}. \quad (27)$$

Використовуючи граничну умову (19), при $x=0$, вигляду $(\varphi_2)_x = (\dot{F} - \dot{F}_0)_t$, маємо

$$\dot{F}_{mj}(t) = \bar{\Phi}_{mj}(t) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}{\alpha_{mj} \operatorname{sh}[\alpha_{mj}(-L)]} \int_0^b \int_{-h}^0 (\dot{F} - \dot{F}_0) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} dy dz. \quad (28)$$

Для визначення невідомих функцій $\xi_{nm}(t)$ (24), що представляють амплітуди безпосередньо збуджених хвиль на вільній поверхні, ми повинні використовувати лінеаризований динамічний стан на вільній поверхні.

$$\varphi_t + g\xi = F(t) \quad \text{при} \quad z=0, \quad (29)$$

де φ - повний потенціал швидкості (9). Підстановка (9) в (29) при $z=0$ приводить до функціонального рівняння по x , в інтервалі $(0, L)$. Оскільки φ_1 і φ_2 при $z=0$, є рядами Фур'є по y , то необхідно представити функції

$\frac{\operatorname{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}$ у вигляді розкладів в ряд Фур'є по $\cos \frac{n\pi x}{L}$, додатково

необхідно представити функцію $(x-L)^2$, включену в (21), також в ряд Фур'є по

$\cos \frac{n\pi x}{L}$. Тоді, нехай

$$(x-L)^2 = a_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} \cos \frac{i\pi}{L} x;$$

$$\frac{ch[\alpha_{mj}(x-L)]}{ch(\alpha_{mj}L)} = b_{mj0} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{mji} \cos \frac{i\pi}{L} x,$$
(30)

де коефіцієнти - константи. В результаті з динамічної умови (29) для амплітуд функції коливань (30) маємо рівняння

$$\frac{\ddot{\xi}_{n0}(t)}{k_{n0} \operatorname{th}(k_{n0}h)} + g\xi_{n0}(t) = \frac{\dot{F}_0 a_{0n}}{2L} - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{0j} b_{0jn};$$

$$\frac{\ddot{\xi}_{nm}(t)}{k_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h)} + g\xi_{nm}(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{mj} b_{mjn};$$
(31)

Таким чином, отримаємо

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{n0}(t) + \omega_{n0}^2 \xi_{n0}(t) = \frac{\dot{F}_0 a_{0n}}{2L} - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{0j} b_{0jn} b_{n0}; \\ \ddot{\xi}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 \xi_{nm}(t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{mj} b_{mjn} b_{nm}, \end{cases}$$
(32)

Де $\omega_{nm} = (gk_{nm} \operatorname{th}k_{nm}h)^{1/2}$; $b_{nm} = k_{nm} \operatorname{th}k_{nm}h$.

Лінійні рівняння (32) представляють традиційні рівняння для випадку вимушених коливань з власною частотою ω_{ij} . Розв'язуючи ці лінійні диференціальні рівняння в заданих початкових умовах і заданих $F_0(t)$ і $F_{nm}(t)$ можна легко визначити амплітуди $\xi_{n,m}(t)$ коливань вільної поверхні рідини в явному вигляді.

Оскільки хрестоподібні хвилі є параметричними резонансними хвилями, слід розглянути нелінійні задачі визначення їх амплітуд. Далі ми застосуємо метод суперпозиції Ламе для визначення амплітуд резонансних коливань вільної поверхні рідини як розв'язок нелінійних задач. Спочатку для визначення амплітуд потенціалу φ_2 (26) використовуються нелінійні граничні кінематичні умови (6). Потім визначаються співвідношення між амплітудами потенціалу φ_1 , і амплітудами $\xi_{nm}(t)$ вільної поверхні рідини на основі нелінійної кінематичної

умови (5). І, нарешті, використовуючи нелінійну динамічну умову (3), отримаємо нелінійні рівняння для визначення амплітуд резонансних коливань вільної поверхні рідини при заданому русі хвилепродуктора (1).[29-32].

2 Стоячі хвилі уздовж басейну при вимушеному резонансі

Розглянемо поздовжні стоячі хвилі, безпосередньо збуджені хвилепродуктором, коли реалізуються резонансні умови вимушеного резонансу, коли частота коливань хвилепродуктора ω близька до деякої власної частоти ω_{n0} хвиль в поздовжньому напрямку. Припустимо, що стояча хвиля на вільній поверхні може бути апроксимована власною формою, яка має власну частоту ω_{n0}

$$\xi(x, y, t) \approx \xi_{n0}(t) \cos \frac{n\pi}{L} x + \xi_{00}, \quad (33)$$

де згідно з (15)

$$\xi_{00} = \frac{ah}{2L} \sin \omega t = \frac{\varepsilon g}{\omega^2} \frac{h}{2L} \sin \omega t.$$

Для визначення невідомої функції - амплітуди хвилі $\xi_{n0}(t)$, вводиться невеликий позитивний параметр

$$\varepsilon = \frac{a\omega_{n0}^2}{g}, \quad (34)$$

де $2a$ - діапазон коливань хвилепродуктора на вільній поверхні рідини (1).

Амплітуду будемо шукати, задавшись її представленням у вигляді

$$\begin{aligned} \xi_{n0}(t) = & \varepsilon^{1/3} \lambda [p(\tau) \cos \omega t + q(\tau) \sin \omega t] + \\ & + \varepsilon^{2/3} \lambda [A_0(\tau) \cos 2\omega t + B_0(\tau) \sin 2\omega t + C_0(\tau)], \end{aligned} \quad (35)$$

де $\lambda = k_{n0}^{-1} \text{th}(k_{n0}h)$ і

$$\tau = \varepsilon^{2/3} \omega t. \quad (36)$$

Якщо $\xi(x, y, t)$ мають вигляд (33), то потенціал φ_1 апроксимується аналогічно, а саме

$$\varphi_1 \approx \varphi_{n_0}(t) \cos \frac{n\pi}{L} x \frac{ch k_{n_0}(z+h)}{ch k_{n_0} h}. \quad (37)$$

Потенціал $\varphi_0(x, z, t)$ має вигляд відповідно до (1) і (21)

$$\varphi_0 = \frac{a\omega \cos \omega t}{2 \cdot 2L} [-(L-x)^2 + (z+h)^2] = \frac{\varepsilon g}{4\omega L} [-(L-x)^2 + (z+h)^2]. \quad (38)$$

Для визначення потенціалу φ_2 , скористаємося нелінійною умовою (5) вигляду

$$\varphi_x = \frac{\varepsilon g}{\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z \right) \cos \omega t + \frac{\varepsilon g}{h\omega} \varphi_z \sin \omega t. \quad (39)$$

Звідси маємо, утримуючи члени $O(\varepsilon)$:

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \frac{\varepsilon g}{\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z \right) \cos \omega t. \quad (40)$$

Причому φ_2 не повинно залежати від y , тому

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \sum_j \Phi_{0j}(t) \cos \frac{j\pi}{h} z \frac{\alpha_{0j} sh \alpha_{0j}(-L)}{ch \alpha_{0j} L} = - \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{0j}(t) \cos \frac{j\pi}{h} z \alpha_{0j} th \alpha_{0j} L, \quad (41)$$

Звідки

$$\Phi_{0j}(t) = \frac{-\varepsilon g \cos \omega t}{\omega \alpha_{0j} th \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z \right) \cos \frac{j\pi}{h} z dz.$$

Тому

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \\ &= -\frac{\varepsilon g}{\omega} \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\alpha_{0j} sh \alpha_{0j}(x-L)}{ch \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \left(1 + \frac{1}{h} z \right) \cos \frac{j\pi}{h} z dz + \\ &+ O(\varepsilon^{4/3}). \end{aligned} \quad (42)$$

Розклад в ряд Тейлора в $z=0$ нелінійних граничних умов (5) і (3) приводить до наступних рівнянь (обмежуючись тут членами) $O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &(\varphi_1)_z + (\varphi_0)_z + \xi(\varphi_1)_{zz} + \xi^2(\varphi_1)_{zzz} = \\ &= \xi_t + (\varphi_1)_x \xi_x + (\varphi_1)_y \xi_y + \xi \cdot \xi_x \cdot (\varphi_1)_x z + (\varphi_1)_y z \cdot \xi \cdot \xi_y \quad \text{при } z=0 \end{aligned} \quad (43)$$

i

$$\begin{aligned}
& (\varphi_1)_t + \xi(\varphi_1)_{tz} + \xi^2(\varphi_1)_{tzz} + (\varphi_0)_t + (\varphi_2)_t + g\xi + \frac{1}{2} \left[(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_y^2 + (\varphi_1)_z^2 \right] + \\
& + (\varphi_1)_z \xi(\varphi_1)_{zz} + (\varphi_1)_x \xi(\varphi_1)_{xz} + (\varphi_1)_y \xi(\varphi_1)_{yz} = F_0(t) \text{ при } z = 0 \quad (44)
\end{aligned}$$

$F_0(t)$ - довільна функція [12], яку покладемо рівною нулю. При цьому враховувалась умова (19) і порядок амплітуд φ_2 (42). Спочатку застосуємо граничну умову (43). Помножимо праву і ліву її частини на $\cos(n\pi x/L)$ і проінтегруємо по всій довжині басейну. В результаті отримаємо наступне співвідношення.

$$\begin{aligned}
& \varphi_{n0}(t)(k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h) \frac{1}{2} + (k_{n0})^3 \xi_{n0}^2(t) \operatorname{th}k_{n0}h \frac{1}{4} = \\
& = \dot{\xi}_{n0}(t) \frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h) \xi_{n0}^2(t) \varphi_{n0}(t) \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Тому, враховуючі в нелінійних членах вигляду $\xi_{n0}^2 \varphi_{n0}$ тільки наближення, $\varphi_{n0}(t) \approx \dot{\xi}_{n0}(k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h)^{-1}$, отримаємо

$$\varphi_{n0}(t)k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h = \dot{\xi}_{n0} - \left(\frac{k_{n0}}{2} \right)^2 \xi_{n0}^2 \dot{\xi}_{n0} + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{2} \xi_{n0}^2 \dot{\xi}_{n0} = 0,$$

що призводить до співвідношення

$$\varphi_{n0}(t) = \gamma_0 \dot{\xi}_{n0}, \quad (45)$$

Де $\gamma_0 = (k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h)^{-1}$.

Після підстановки (45) в динамічну умову (44), множення на $\cos \frac{n\pi x}{L}$ і інтегрування по всій довжині басейну (так як від y власна форма не залежить) отримаємо

$$\begin{aligned}
& \gamma_0 \ddot{\xi}_{n0}(t) \frac{1}{2} + \xi_{n0}^2 \gamma_0 \dot{\xi}_{n0} (k_{n0})^2 \frac{1}{4} + a_{0n} \frac{1}{8} \frac{\varepsilon g}{L} \sin \omega t + \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} b_{0jn} \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon g}{\omega} \omega \sin \omega t \right) \frac{1}{\alpha_{0j} \operatorname{sh} \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z \right) \cos \frac{j\pi z}{h} dz + \frac{1}{2} g \xi_{n0}(t) + \quad (46) \\
& + \frac{1}{4} \xi_{n0} \gamma_0^2 (\dot{\xi}_{n0})^2 (k_{n0})^2 \operatorname{th}k_{n0}h + \frac{1}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 (k_{n0} \operatorname{th}k_{n0}h) \varphi_{n0} (\dot{\varphi}_{n0})^2 \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Розділимо на $\frac{1}{2}\gamma_0$ рівняння (46), тоді маємо

$$\ddot{\xi}_{n0} + \omega_{n0}^2 \xi_{n0} + \gamma_1 \xi_{n0} \dot{\xi}_{n0}^2 + \gamma_2 \xi_{n0}^2 \dot{\xi}_{n0} = \gamma \sin \omega t, \quad (47)$$

де

$$\gamma_1 = \gamma_0^2 k_{n0}^2; \quad \gamma_2 = \frac{k_{n0}^2}{2}; \quad (48)$$

$$\gamma = -\varepsilon g \left[\frac{a_{0n}}{4L} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_{0jn}}{\alpha_{0j} \operatorname{sh} \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z \right) \cos \frac{j\pi z}{h} dz \right].$$

Підставляючи заданий вигляд шуканої функції (35) в рівняння (47) і усереднюючи по ωt , остаточно отримаємо наступні еволюційні рівняння для амплітуд p і q

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= - \left[\beta + \frac{A}{2}(p^2 + q^2) \right] q; \\ \frac{dq}{d\tau} &= \left[\beta + \frac{A}{2}(p^2 + q^2) \right] p + \gamma_b \end{aligned} \quad (49)$$

та амплітуди вторинних гармонік

$$A_0 = \frac{\lambda}{6} \gamma_3 (p^2 + q^2); \quad B_0 = \frac{\lambda}{3} \gamma_3 p q; \quad C_0 = \frac{\lambda}{2} \gamma_4 (p^2 + q^2), \quad (50)$$

$$\text{де } \beta = \frac{\omega^2 - \omega_{n0}^2}{\varepsilon^{1/3} \omega}; \quad \gamma_b = \frac{\gamma}{\varepsilon^{1/3} \omega}.$$

На цьому етапі можна ввести мале лінійне демпфірування шляхом заміни d/dt на $(d/dt + \alpha)$ в рівняннях (49), де

$$\alpha = \frac{\delta_{n0}^*}{\varepsilon^{2/3}}, \quad (51)$$

і δ_{n0}^* є відношенням фактичного демпфірування до критичного демпфірування (див. [24,25]) для вільних коливань на резонансній моді. $2\pi\delta_{n0}^*$ — логарифмічний декремент згасання коливань вільної поверхні на власній моді, що має частоту ω_{n0} . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\tau} &= -\alpha p - \left[\beta + \frac{A}{2}(p^2 + q^2) \right] q; \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\alpha q + \left[\beta + \frac{A}{2}(p^2 + q^2) \right] p + \gamma_b.\end{aligned}\tag{52}$$

Наявність ненульової амплітуди збудження $\gamma_b \neq 0$ дозволяє вести постійну амплітуду резонансної хвилі вигляду

$$p^2 + q^2 = \frac{\gamma_b^2}{\alpha^2 + \left[\beta + A(p^2 + q^2) / 2 \right]^2}.\tag{53}$$

Таким чином, амплітуда резонансної моди $\xi_{n_0}(t)$ має порядок $\varepsilon^{1/3}$ (що випливає з (35)) при виконанні резонансної умови.

$$\omega - \omega_{n_0} = \varepsilon^{2/3} \omega \beta / 2\tag{54}$$

з ненульовими компонентами p і q . Окремі форми мають амплітуди порядку $O(\varepsilon)$, оскільки амплітуди нерезонансних форм пропорційні амплітуді впливу. Отже, в даному пункті ми показали, що коливання хвилепродуктора (1) при виконанні резонансної умови (54) по моді з частотою ω_{n_0} збуджують поздовжню хвилю з ненульовою амплітудою (53). [29-32].

3 Хрестоподібні резонансні хвилі

Нехай частота коливань хвилепродуктора ω (1) буде в два рази більше значення однієї з власних частот ω_{nm} коливань вільної поверхні рідини

$$\omega \approx 2\omega_{nm}.\tag{55}$$

При цьому коливання вільної поверхні рідини апроксимуються власною формою, що має частоту ω_{nm}

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{00}.\tag{56}$$

Шукати амплітуду резонансної форми, функція $\xi_{nm}(t)$, ми будемо в наступному вигляді

$$\xi_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right],\tag{57}$$

де $\lambda_1 = k_{nm}^{-1} \text{th}(k_{nm} h)$; $\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}$ – новий малий параметр; τ_1 – безрозмірний

повільний час

$$\tau_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 \omega t. \quad (58)$$

Гаррет [10] першим показав, що хрестоподібні хвилі виникають від наявності коливань середнього рівня рідини, тобто якби не було коливань середнього рівня, не було б хрестоподібних хвиль. Однак він все ж вказав на те, що для збудження хрестоподібних хвиль коливань середнього рівня може бути недостатньо для існування таких хвиль. Хрестоподібні хвилі повинні отримувати енергію безпосередньо від коливань хвилепродуктора, але математично довести це він не зміг. Коливання середнього рівня Рідини $\xi_{00}(t)$ мають вигляд (15), а саме

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah}{2L} \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{2\omega_{nm}^2} \frac{h}{L} \sin \omega t. \quad (59)$$

Якщо довжина басейну, $L \gg h$ то $\frac{h}{L} = \varepsilon_1 \gamma_7$ і тоді $\xi_{00}(t)$ є величиною $O(\varepsilon_1^2)$, тобто нехтовно мала. Ми розглянемо саме такий випадок, коли $\frac{h}{L} = 0.05$, такі параметри геометрії басейну в ІГМ НАНУ. При цьому, однак, вплив потенціалу φ_0

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{a\omega}{4L} \cos \omega t \left[-(L-x)^2 + (z+h)^2 \right] = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm} L} \left[(z+h)^2 - (L-x)^2 \right] = \\ &= \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}} \left[\frac{1}{L} (z+h)^2 - \frac{1}{L} (L-x)^2 \right] \end{aligned} \quad (60)$$

будує врахований при використанні нелінійних граничних умов (3), (5) і (6).

Якщо коливання вільної поверхні апроксимуються функцією вигляду (56), то

$$\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y \operatorname{ch}[k_{nm}(z+h)]}{b \operatorname{ch}(k_{nm}h)}. \quad (61)$$

Застосуємо нелінійну граничну умову (6) для потенціалу , $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$ використовуючи розклад в околі $x = 0$, і зберігаючи члени $O(\varepsilon_1^{3/2})$, в результаті маємо вираз для φ_2 .

Отже, кінематична умова на коливаючійся границі хвилепродуктора при $x = F(z) \sin \omega t$, незалежному від y , має вигляд

$$(\varphi_0)_x + (\varphi_1)_x + (\varphi_2)_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) [(\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + (\varphi_2)_z] \quad (62)$$

$$\text{при } x = F(z) \sin \omega t = a \left(1 + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t. \quad (\varphi_1)_x = 0 \text{ при}$$

$x = 0$, тому $(\varphi_1)_x$ буде $O(\varepsilon_1^{3/2})$ при $x = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t$. Оскільки $(\varphi_1)_x$ ми

розкладаємо в ряд Тейлора, в результаті маємо

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_x &\approx -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y \operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{b \operatorname{ch} k_{nm} h} \times \\ &\times \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t = O(\varepsilon_1^{3/2}), \end{aligned} \quad (63)$$

оскільки $\varphi_{nm}(t)$ має порядок як $\xi_{nm}(t)$ (57).

$$(\varphi_0)_x = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{2\omega_{nm}^2} \left(2 - \frac{2x}{L}\right) = \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm}^2} + O(\varepsilon_1^2). \quad (64)$$

Тому з (62) отримаємо

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_x &= \frac{2\varepsilon_1 g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z\right) \cos \omega t + \\ &+ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y \operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{b \operatorname{ch} k_{nm} h} + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g \sin \omega t}{\omega_{nm}^2 h} (\varphi_1)_z = \frac{2\varepsilon_1 g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z\right) \cos \omega t + \\ &+ \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h} z\right) \sin \omega t \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y \operatorname{ch} k_{nm}(z+h)}{b \operatorname{ch} k_{nm} h} + \end{aligned} \quad (65)$$

$$+\varepsilon_1 \frac{g \sin \omega t}{\omega_{nm}^2 h} k_{nm} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{m\pi y \operatorname{sh} k_{nm} (z+h)}{b \operatorname{ch} k_{nm} h} + O(\varepsilon_1^2).$$

Оскільки з (26) маємо

$$\begin{aligned} (\varphi_2)_x \Big|_{x=0} &= -\sum_{j=0}^{\infty} \dot{\Phi}_{0j}(t) \left(\cos \frac{j\pi z}{h} \right) \alpha_{0j} \operatorname{tanh} \alpha_{0j} L - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[-\sum_{j=0}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj}(t) \alpha_{mj} \operatorname{tanh} \alpha_{mj} L \cos \frac{j\pi z}{h} \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Підставляючи (66) в (65) і застосовуючи процедуру Бубнова, інтегруючи по поверхні хвилепродуктора, отримаємо з урахуванням (25)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \dot{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} + \\ &+ \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj} \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{mj} (x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{mj}}, \end{aligned}$$

Де

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{0j} &= \frac{-4g}{\omega_{nm} \alpha_{0j} \operatorname{th} \alpha_{0j} L} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz; \\ \dot{\Phi}_{ij}(t) &= 0 \quad \text{при } i \neq 0 \quad i \neq m; \\ \dot{\Phi}_{mj} &= -\frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}{\omega_{nm}^2 \alpha_{mj} \operatorname{th} \alpha_{mj} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)} \int_{-h}^0 z h \cos \frac{j\pi z}{h} dz, \quad j \neq 0; \\ \dot{\Phi}_{m0} &= \frac{-g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{m0} \operatorname{th} \alpha_{m0} L (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)}, \quad j = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Отже, φ_2 має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varepsilon_1 \cos \omega t \dot{\Phi}_{00} + \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\Phi}_{0j} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{\operatorname{ch} \alpha_{0j}} + \\ &+ \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \dot{\Phi}_{m0} \cos \frac{n\pi y \operatorname{ch} \alpha_{m0} (x-L)}{b \operatorname{ch} \alpha_{m0}} + \end{aligned} \quad (68)$$

$$+\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj} \cos \frac{n\pi y \operatorname{ch} \alpha_{mj} (x-L)}{b \operatorname{ch} \alpha_{mj}}.$$

Зауважимо, що члени розкладу φ_2 , що мають множник $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$, мають порядок $O(\varepsilon_1^{3/2})$, оскільки виконується співвідношення (47). Щоб знайти амплітуду хрестоподібних хвиль $\xi_{nm}(t)$, необхідно використовувати динамічну граничну умову (3) і кінематичну (5). Для цього ми розкладаємо ці умови в ряд Тейлора, знаючи, що $\varphi_1 - O(\varepsilon_1^{1/2})$, φ_0 і $\varphi_2 - O(\varepsilon_1)$. При утриманні членів порядку $O(\varepsilon_1^{3/2})$, умова (5) має вигляд

$$\begin{aligned} & (\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + \xi(\varphi_0)_{zz} + \xi(\varphi_1)_{zz} + \xi^2(\varphi_1)_{zzz} + \xi(\varphi_2)_{zz} = \\ & = \xi_t + (\varphi_1)_x \xi_x + (\varphi_1)_y \xi_y + (\varphi_0)_x \xi_x + (\varphi_2)_y \xi_y + (\varphi_1)_{xz} \xi \xi_x + \\ & \quad + (\varphi_1)_{yz} \xi \xi_y \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Підставляючи (60), (61), (68) в (69), множачи на $\cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi x}{L}$ і інтегруючи по всій вільній поверхні рідини при $z = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \varphi_{nm}(t) k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm} L} \xi_{nm} - \\ & - (\varepsilon_1 \cos \omega t) \xi_{nm}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \dot{\Phi}_{0j} 2 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x \operatorname{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{L \operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx = \\ & = \dot{\xi}_{nm}(t) + \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t \xi_{nm}}{\omega_{nm} L} 2 \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (L-x) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\varphi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t, \quad (70)$$

Де

$$D = \frac{1}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} \left[\frac{g}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \dot{\Phi}_{0j} 2 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x \operatorname{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{L \operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \right.$$

$$+ \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \Big].$$

Доданок $\varepsilon_1 D \xi_{nm}(t) \cos \omega t$ виражає вплив потенціалів φ_0 і φ_2 на величину $\varphi_{nm}(t)$ амплітуди φ_1 . Цей член приведе, як ми побачимо пізніше, до параметричного резонансу, як доданки з множниками $\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t$ в (68).

Розкладемо динамічну умову (3) в ряд Тейлора, залишивши члени $O(\varepsilon^{3/2})$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} & (\varphi_0)_t + (\varphi_1)_t + \xi (\varphi_1)_{tz} + \xi^2 (\varphi_1)_{tzz} + (\varphi_2)_t + g\xi + \frac{1}{2} \left[(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_y^2 + (\varphi_1)_z^2 \right] + \\ & + (\varphi_1)_x (\varphi_2)_x + (\varphi_1)_y (\varphi_2)_y + (\varphi_1)_z (\varphi_2)_z + (\varphi_1)_x (\varphi_0)_x + \\ & + (\varphi_1)_z (\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z \xi (\varphi_1)_{zz} + (\varphi_1)_x \xi (\varphi_1)_{xz} + (\varphi_1)_y \xi (\varphi_1)_{yz} = \\ & = F_0(t) \text{ при } z = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Підставимо (60), (61), (68) (69) і (70) в (71) і помножимо на $\cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi x}{L}$. Проінтегруємо по всій вільній поверхні рідини при $z = 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t \right) + \frac{9}{16} \xi_{nm}^2 \frac{\ddot{\xi}_{nm} k_{nm}^2}{k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h} + \\ & + \frac{d}{dt} \left[\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \left(\dot{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj} b_{mjn} \right) \right] + g \xi_{nm} + \\ & + \frac{9}{16} \xi_{nm} k_{nm}^3 \operatorname{th} k_{nm} h \frac{\dot{\xi}_{nm}^2}{k_{nm}^2 \operatorname{th}^2 k_{nm} h} + \\ & + \frac{3}{16} [k_{nm}^2] k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \xi_{nm} \frac{\dot{\xi}_{nm}^2}{k_{nm}^2 \operatorname{th}^2 k_{nm} h} = 0. \\ & \ddot{\xi}_{nm} - \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \dot{\xi}_{nm} D \cos \omega t + \varepsilon_1 (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h) \xi_{nm} D \omega \sin \omega t + \\ & + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{9}{16} \xi_{nm}^2 k_{nm}^2 \ddot{\xi}_{nm} + \frac{3}{4} \xi_{nm} k_{nm}^2 \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ & + \varepsilon_1 \ddot{\xi}_{nm} D_1 \sin \omega t + \varepsilon_1 \omega D_1 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (72)$$

Де

$$D_1 = \dot{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj} b_{mjn}.$$

Враховуючи, що $\ddot{\xi}_{nm} \approx -\omega_{nm}^2 \xi_{nm} + O(\varepsilon_1)$, маємо

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^2 \xi_{nm} + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t (\omega D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D) - \\ - \varepsilon_1 \xi_{nm} \sin \omega t (\omega_{nm}^2 D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D) = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

Отже, для визначення амплітуди резонансних хрестоподібних хвиль отримаємо рівняння лінійних коливань з двома коефіцієнтами, періодично змінюючимися в часі, тобто рівняння типу Матьє:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 D_2 \xi_{nm} \sin \omega t + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (74)$$

Де

$$\begin{aligned} D_2 &= k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h \omega D - \omega_{nm}^2 D_1; \\ D_3 &= -k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D + 2\omega_{nm} D_1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $D_1 < 0$, оскільки згідно з (67) $\dot{\Phi}_{mj} < 0$.

Основний резонанс рівнянь вигляду (74) реалізується при $\omega \approx 2\omega_{nm}$ (55), тому ми вибрали представлення вигляду(57), коли

$$\xi_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right]; \quad \lambda_1 = \frac{\operatorname{th}(k_{nm} h)}{k_{nm}}.$$

Отже, маємо рівняння резонансної амплітуди

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 D_3 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t - \varepsilon_1 D_4 \xi_{nm} \sin \omega t = 0, \end{aligned} \quad (75)$$

Де

$$D_4 = \omega_{nm}^2 D_1 - k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h D \omega.$$

В даному випадку припускаємо виконання резонансної умови близькості частот ω і $2\omega_{nm}$, тобто нехай

$$\omega^2 - 4\omega_{nm} = \frac{\varepsilon_1}{2}\omega^2\beta_1.$$

Крім того, ми представимо амплітуду ξ_{nm} у вигляді (57), (58).

Застосовуючи метод усереднення Боголюбова-Митропольського, запишемо, що

$$\dot{\xi}_{nm}(t) = \varepsilon_1^{1/2}\lambda_1\frac{\omega}{2}\left[q_1\cos\frac{\omega t}{2} - p_1\sin\frac{\omega t}{2}\right], \quad (76)$$

звідки отримаємо диференціацією

$$\ddot{\xi}_{nm}(t) = -\frac{\omega^2}{4}\xi_{nm} + \varepsilon_1^{1/2}\lambda_1\frac{\omega}{2}\left[\frac{dq_1}{dt}\cos\frac{\omega t}{2} - \frac{dp_1}{dt}\sin\frac{\omega t}{2}\right]. \quad (77)$$

А диференціюючи (65) і порівнюючи з (76), можна написати

$$\frac{dq_1}{d\tau_1}\cos\frac{\omega t}{2} + \frac{dp_1}{d\tau_1}\sin\frac{\omega t}{2} = 0. \quad (78)$$

Використовуючи 75) і підставляючи в (65) і (76), отримаємо друге рівняння, яке з (78) становить систему визначення $\frac{dp_1}{d\tau_1}$, $\frac{dq_1}{d\tau_1}$, а саме

$$\begin{aligned} & \frac{dp_1}{d\tau_1}\sin\frac{\omega t}{2} - \frac{dq_1}{d\tau_1}\cos\frac{\omega t}{2} = \\ & = -\beta_1\left(p_1\cos\frac{\omega t}{2} + q_1\sin\frac{\omega t}{2}\right) - \frac{9}{8}k_{nm}^2\lambda_1^2\left(p_1\cos\frac{\omega t}{2} + q_1\sin\frac{\omega t}{2}\right)^3 + \\ & + \frac{3}{2}k_{nm}^2\lambda_1^2\left(q_1\cos\frac{\omega t}{2} - p_1\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2\left(p_1\cos\frac{\omega t}{2} + q_1\sin\frac{\omega t}{2}\right) + \\ & + 4\frac{D_3}{\omega}\left(q_1\cos\frac{\omega t}{2} - p_1\sin\frac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t - \\ & - 8\frac{D_4}{\omega^2}\left(p_1\cos\frac{\omega t}{2} + q_1\sin\frac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t. \end{aligned} \quad (79)$$

В результаті з системи (78) – (79) отримаємо, що

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{d\tau_1} = & \left[-\beta_1 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) - \frac{9}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^3 + \right. \\
& + \frac{3}{2} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^2 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) + \\
& + 4 \frac{D_3}{\omega} \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \cos \omega t - \\
& \left. - 8 \frac{D_4}{\omega^2} \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \omega t \right] \sin \frac{\omega t}{2}. \tag{80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{d\tau_1} = & \left[\beta_1 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) + \frac{9}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^3 - \right. \\
& - \frac{3}{2} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right)^2 \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) - \\
& - 4 \frac{D_3}{\omega} \left(q_1 \cos \frac{\omega t}{2} - p_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \cos \omega t + \\
& \left. + 8 \frac{D_4}{\omega^2} \left(p_1 \cos \frac{\omega t}{2} + q_1 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \sin \omega t \right] \cos \frac{\omega t}{2}.
\end{aligned}$$

Після усереднення по швидкому часу $\frac{\omega}{2}t$, остаточно записуємо

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\beta_1 q_1 - \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = \beta_1 p_1 + \frac{A_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) p_1 - \beta_3 q_1, \end{cases} \tag{81}$$

Де

$$\frac{A_1}{2} = \frac{27}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^2 - \frac{3}{24} k_{nm}^2 \lambda_1^2 = \frac{3}{8} k_{nm}^2 \lambda_1^2 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{15}{32} k_{nm}^2 \lambda_1^2 = \frac{15}{32 th k_{nm} h};$$

$$\beta_3 = \frac{2D_3}{\omega} - \frac{4D_4}{\omega^2} = D_1 + \frac{D(k_{nm} th k_{nm} h)^{1/2}}{g^{1/2}} =$$

$$= \dot{\Phi}_{m0} b_{m0n} + \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\Phi}_{mj} b_{mjn} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{1/2}} \left[\frac{2g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi}{h} \right)^2 \Phi_{0j} \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x \operatorname{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{L \operatorname{ch} \alpha_{0j}} dx + \right. \\
& \left. + \frac{g^{1/2}}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \quad (82)
\end{aligned}$$

Додамо демпфірування

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\alpha p_1 - \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] q_1 + \beta_3 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = -\alpha q_1 + \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 - \beta_3 q_1. \end{cases} \quad (83)$$

Положення рівноваги, відмінне від , $p_1 = q_1 = 0$ отримаємо з умов

$$\frac{dp_1}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dq_1}{d\tau_1} = 0:$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha(p_1^2 + q_1^2) + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) = 0; \\
& 2 \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 q_1 - 2\beta_3 p_1 q_1 = 0, \quad (84)
\end{aligned}$$

звідки маємо

$$\begin{aligned}
& p_1^2 + q_1^2 = \frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1}; \\
& -\frac{2(\beta_3 - \beta_1)}{A_1} \alpha + \beta_3(p_1^2 - q_1^2) = 0; \quad (85)
\end{aligned}$$

В результаті можна зафіксувати, що регулярні усталені хрестоподібні хвилі характеризуються співвідношенням

$$q_1^2 = p_1^2 - \frac{\alpha \beta_3 - \beta_1}{A_1 \beta_3}, \quad (86)$$

звідки остаточно отримаємо амплітуди хрестоподібних хвиль

$$p_1^2 = \chi(1 + \chi_1); \quad q_1^2 = \chi(1 - \chi_1), \quad (87)$$

Де

$$\chi = \frac{\beta_3 - \beta_1}{A_1}; \quad \chi_1 = \frac{\alpha}{2\beta_3}.$$

Після усереднення за швидким часом $\frac{\omega}{2}t$, остаточно запишемо

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2)\right]q_1 - \beta_2 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2)\right]p_1 + \beta_2 q_1, \end{cases} \quad (88)$$

$$\text{Де } \frac{A_1}{2} = \frac{15}{32}k_{nm}^2 \lambda_1^2, \quad \lambda_1 = k_{nm}^{-1} \text{th}(k_{nm} h), \quad \beta_2 = -D_1 - \frac{D\sqrt{k_{nm} \text{th}k_{nm} h}}{\sqrt{g}}.$$

Зауважимо, що $D_1 < 0$, тобто $\beta_2 > 0$. Якщо це не так, то заміна $F(z)$ на $-F(z)$, рівноцінна заміні ωt на $\omega t + \frac{1}{2}\pi$, дозволяє мати $\beta_2 > 0$.

Стационарний розв'язок системи, коли $\dot{p}_1 = \dot{q}_1 = 0$ виглядає так

$$p_1 = q_1 = 0; \quad (89)$$

$$p_1 = -q_1 = \pm \left[\frac{\beta_2 - \beta_1}{A_1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (90)$$

коли $\beta_1 < \beta_2$

$$p_1 = q_1 = \pm \left[\frac{-(\beta_2 + \beta_1)}{A_1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (91)$$

коли $\beta_1 < -\beta_2$.

Характеристичні рівняння при невеликих варіаціях вигляду $\exp(\lambda t)$ стаціонарних розв'язків (89)–(91)

$$\lambda^2 = \beta_2^2 - \beta_1^2; \quad (92)$$

$$\lambda^2 = 4\beta_2(\beta_1 - \beta_2) \text{ при } \beta_1 < \beta_2; \quad (93)$$

$$\lambda^2 = 4\beta_2(-\beta_1 - \beta_2) \text{ при } \beta_1 < -\beta_2. \quad (94)$$

З (92) випливає, що стаціонарний розв'язок $p_1 = q_1 = 0$ буде стійким, якщо $\beta_1^2 > \beta_2^2$ і нестійким при $\beta_1^2 < \beta_2^2$. З (93) випливає, що розв'язок (90) буде стійким, якщо $\beta_1 < -\beta_2$.

Стаціонарні розв'язки (89)–(91) можна класифікувати наступним чином [24,25]

$$\text{при } \beta_1 < \beta_2 \text{ розв'язок } p_1 = q_1 = 0 \quad (95)$$

представлятиме особливий центр;

$$\text{ящо } \beta_2 < \beta_1 < \beta_2 \text{ розв'язок } p_1 = q_1 = 0 \quad (96)$$

буде сідловою точкою, а розв'язок

$$p_1 = -q_1 = \pm \left[\frac{\beta_1 - \beta_2}{A_1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

відповідає двом центрам.

При $\beta_1 < -\beta_2$ існує три центри:

$$p_1 = q_1 = 0 \text{ і } p_1 = -q_1 \pm \left[\frac{\beta_2 - \beta_1}{A_1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (97)$$

А ще існують сідлові точки – розв'язки $p_1 = -q_1 = \pm \left[\frac{-(\beta_2 + \beta_1)}{A_1} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Додамо в рівняння лінійне демпфірування з урахуванням сил в'язкого демпфірування $\varepsilon_1 \delta \dot{\xi}_{nm}(t)$ додатково до тих, що входять в рівняння, тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{d\tau_1} = -\alpha p_1 - \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] q_1 - \beta_2 p_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} = -\alpha q_1 + \left[\beta_1 + \frac{A_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right] p_1 + \beta_3 q_1. \end{cases} \quad (98)$$

Такого роду мале демпфірування призведе до того, що траєкторії розв'язків будуть закручуватись по спіралям в центри, які відповідають розв'язкам (95) і хрестоподібним хвилям з амплітудами p_1 і q_1 , що відповідають розв'язкам (96), а якщо $\beta_1 < -\beta_2$ то розв'язкам (97).

Введемо в розгляд величину

$$\gamma = (\beta_2^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (99)$$

Тоді стаціонарні розв'язки можна класифікувати наступним чином: якщо $\alpha < \beta_2$,

$$\text{при } \beta_1 < \gamma \text{ сток, якщо } p_1 = q_1 = 0; \quad (100)$$

$$\text{при } -\gamma < \beta_1 < \gamma \text{ сідловаточка, якщо } p_1 = q_1 = 0, \quad (101)$$

і два стоки, якщо

$$p_1 + iq_1 = \pm \frac{1}{A_1} \exp \left[i \left(\frac{3}{4} \pi - \tilde{\Phi} \right) \right] (\gamma - \beta_1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos 2\tilde{\Phi} = \frac{\gamma}{\beta_2} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{При } \beta_1 < -\gamma \text{ реалізується три стоки,} \quad (102)$$

з них: $p_1 = q_1 = 0$ і два стоки, відповідні (101) і дві сідлові точки при

$$p_1 + iq_1 = \pm \frac{1}{A_1} \exp \left[i \left(\frac{1}{4} \pi + \Phi \right) \right] (-\gamma - \beta_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Коли $\alpha > \beta_2$ є тільки один розв'язок типу сток, а саме $p_1 = q_1 = 0$.

Всі розв'язки для хрестоподібних хвиль будуть стихаючими, тобто не будуть реалізовані.

Таким чином, стаціонарні розв'язки для ненульових амплітуд хрестоподібних хвиль будуть реалізовані тільки при $\beta_2 > \alpha$, тобто коли β_2 перевищить порог $\beta_2 = \delta / \varepsilon$.

Таким чином встановлено умови існування хрестоподібних хвиль. [29-32].

3.6. ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ

Експериментальні спостереження за поведінкою хрестоподібних хвиль у прямокутному басейні Інституту гідромеханіки НАН України показують, що на поверхні рідини добре видно, як мінімум, два типи поверхневих хвиль. Перш за все, це хрестоподібні хвилі біля хвилепродуктора і безпосередньо збуджені хвилі (вимушені резонансні) в напрямку коливань хвилепродуктора, тобто по каналу. З порівняння амплітуд цих двох типів хвиль випливає, що перші набагато більші за другі (зазвичай більш ніж в 5 разів). Тому ми наближаємо хвилі на вільній поверхні в басейні, коли реалізуються резонансні умови для збудження хрестоподібних хвиль.

$$\omega \approx 2\omega_{nm} \quad (1)$$

у вигляді

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{lo}(t) \cos \frac{l\pi x}{L} + \xi_{00}. \quad (2)$$

При цьому ми вважаємо, що амплітуда хрестоподібних резонансних хвиль $\xi_{nm}(t) = O(\varepsilon_1^{1/2})$, і амплітуда вимушених резонансних хвиль набагато менше, тобто амплітуда вимушених резонансних хвиль. $\xi_{lo} = O(\varepsilon_1)$. Також вважаємо, що $\xi_{00} = O(\varepsilon_1^2)$ (формула (59) з попереднього пункту) коли

$$\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}. \quad (3)$$

Тоді потенціал φ_1 має наступний вигляд, відповідний (2)

$$\varphi_1 = \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y [k_{nm}(z+h)]}{b (k_{nm}h)} + \varphi_{lo} \cos \frac{l\pi x [k_{lo}(z+h)]}{L (k_{lo}h)}. \quad (4)$$

Використаємо кінематичну умову на хвилепродукторі

$$(\varphi_0)_x + (\varphi_1)_x + (\varphi_2)_x = \omega F(z) \cos \omega t + F'(z) [(\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + (\varphi_2)_z] \quad (5)$$

при

$$x = F(z)\sin \omega t = a \left(1 + \frac{1}{h}z \right) \sin \omega t = \varepsilon_1 \frac{g}{\omega_{nm}^2} \left(1 + \frac{1}{h}z \right) \sin \omega t.$$

Враховуючи члени $O(\varepsilon_1^{3/2})$, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_2 = & -\varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4gh[1-(-1)^j]}{\omega_{nm} \alpha_{0j} ch(\alpha_{0j}L)(j\pi)^2} \cos \frac{j\pi z ch\alpha_{0j}(x-L)}{h ch\alpha_{0j}} - \\ & -\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} \sin \omega t \frac{g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{nm} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{0j} \alpha_{m0} th\alpha_{m0} L(k_{nm} thk_{nm} h)} \cos \frac{m\pi y ch\alpha_{m0}(x-L)}{b ch\alpha_{m0}} - \\ & -\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 [1-(-1)^j]}{\omega_{nm}^2 \alpha_{mj} (j\pi)^2 th\alpha_{mj} L(k_{nm} thk_{nm} h)} \times \\ & \times \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z ch\alpha_{mj}(x-L)}{h ch\alpha_{mj}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Другу кінематичну умову використовуємо для визначення амплітуд потенціалу φ_1 (4). У той же час ми вважаємо, що $\varphi_{nm}(t) = O(\varepsilon_1^{1/2})$ а $\varphi_{l0} = O(\varepsilon_1)$.

При утриманні в кінематичному стані членів порядку $O(\varepsilon_1^{3/2})$ умова має вигляд

$$\begin{aligned} (\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z + \xi(\varphi_0)_{zz} + \xi(\varphi_1)_{zz} + \xi^2(\varphi_1)_{zzz} + \xi(\varphi_2)_{zz} = \\ = \xi_t + (\varphi_1)_x \xi_x + (\varphi_1)_y \xi_y + (\varphi_0)_x \xi_x + (\varphi_2)_y \xi_y + \\ + (\varphi_1)_{xz} \xi \xi_x + (\varphi_1)_{yz} \xi \xi_y \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В результаті для $\varphi_{nm}(t)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}(t) k_{nm} thk_{nm} h \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t}{\omega_{nm} L} \xi_{nm} + \\ + (\varepsilon_1 \cos \omega t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8g[1-(-1)^j]}{\omega_{nm} h \alpha_{0j} (th\alpha_{0j}L)} \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x ch\alpha_{0j}(x-L)}{L ch\alpha_{0j}} dx = \\ = \dot{\xi}_{nm}(t) - \frac{\varepsilon_1 g \cos \omega t \xi_{nm}}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (L-x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Звідси

$$\xi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} thk_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t; \quad (8)$$

$$D = \frac{1}{k_{nm} thk_{nm} h} \left[\sum_j \frac{8g[1 - (-1)^j]}{\omega_{nm} h^2 \alpha_{0j} (th\alpha_{0j} L)} \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{ch\alpha_{0j}(x-L)}{ch\alpha_{0j} L} dx + \frac{g}{\omega_{nm} L} - \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \quad (9)$$

В результаті (за допомогою співвідношення вигляду

$$\frac{\alpha x}{\alpha L} = \frac{1}{\alpha L} + \frac{2\alpha}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(\alpha_i^2 + \alpha^2)} \cos \alpha_i x; \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{L}) \text{ записуємо}$$

$$D = \frac{g^2}{\omega_{nm}^3 L} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} + 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^j]}{th\alpha_0 h \left(\frac{4n^2 \pi^2 h^2}{L^2} + j^2 \pi^2 \right)} \right\} = \frac{g^2}{\omega_{nm}^3 L} \left[\frac{3}{2} + \frac{24}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \right], \quad (10)$$

враховуючи, що $\frac{h}{L} = 0,05$ і $th\alpha_{0j} h \rightarrow 1$.

Для амплітуди $\varphi_{lo}(t)$ аналогічно отримуємо $\varphi_{lo}(k_{lo} thk_{lo} h) = \dot{\xi}_{lo}(t)$, тобто

$$\varphi_{lo} = \frac{\dot{\xi}_{lo}}{k_{lo} thk_{lo} h}. \quad (11)$$

Застосуємо динамічну граничну умову на вільній поверхні

$$\begin{aligned} & (\varphi_0)_t + (\varphi_1)_t + \xi(\varphi_1)_{tz} + \xi^2(\varphi_1)_{tzz} + (\varphi_2)_t + g\xi + \\ & + [(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_y^2 + (\varphi_1)_z^2] + (\varphi_1)_x(\varphi_2)_x + (\varphi_1)_y(\varphi_2)_y + (\varphi_1)_z(\varphi_2)_z + \\ & + (\varphi_1)_x(\varphi_0)_x + (\varphi_1)_z(\varphi_0)_z + (\varphi_1)_z \xi(\varphi_1)_{zz} + \\ & + (\varphi_1)_x \xi(\varphi_1)_{xz} + (\varphi_1)_y \xi(\varphi_1)_{yz} = F_0(t) \quad \text{при } z = 0. \end{aligned}$$

Для амплітуди резонансної хрестоподібної хвилі отримуємо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, яке не залежить від

динаміки вимушеної резонансної хвилі $\xi_{lo}(t)\cos\frac{l\pi x}{L}$. Отримане рівняння має

ВИГЛЯД:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + \varepsilon_1 D_2 \xi_{nm} \sin \omega t - \varepsilon_1 D_5 \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

При цьому постійні коефіцієнти дорівнюють

$$D_2 > 0; \quad D_5 > 0; \quad D_2 = (k_{nm} thk_{nm} h)\omega D - \omega_{nm}^2 D_1; \quad D_1 < 0,$$

оскільки

$$\begin{aligned} D_1 = -\frac{g \left[\frac{3 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_{nm} thk_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{m0} th \alpha_{m0} L (k_{nm} thk_{nm} h)} b_{m0n} - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 [1 - (-1)^j]}{\omega_{nm}^2 (j\pi)^2 \alpha_{mj} th \alpha_{mj} L (k_{nm} thk_{nm} h)} b_{mjn}; \end{aligned}$$

Тоді

$$D_5 = -D_3 = [(k_{nm} thk_{nm} h)D - 2\omega_{nm} D_1] > 0.$$

Нагадаємо, що b_{m0n} і b_{mjn} – коефіцієнти розкладу функцій, (24) з попереднього пункту

$$\frac{ch\alpha_{m0}(x-L)}{ch(\alpha_{m0}L)} i \frac{ch\alpha_{mj}(x-L)}{ch(\alpha_{mj}L)}$$

в ряди Фур'є по $\cos\frac{n\pi x}{L}$, наприклад,

$$\frac{ch\alpha_{mj}(x-L)}{ch(\alpha_{mj}L)} = b_{mj0} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{mji} \cos\frac{i\pi}{L}x,$$

при цьому $\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{b^2} + \frac{j^2 \pi^2}{h^2}}$.

Використаємо відомі представлення для $ch\alpha x$ [33, 34]

$$\frac{ch\alpha x}{sh\alpha L} = \frac{1}{\alpha L} + \frac{2\alpha}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(\alpha_i^2 + \alpha^2)} \cos \alpha_i x$$

при $\alpha_i = \frac{i\pi}{L}$ для $-L \leq x \leq L$. Тоді

$$\frac{ch[\alpha_{mj}(x-L)]}{ch(\alpha_{mj}L)} = \frac{sh\alpha_{mj}L}{ch\alpha_{mj}L} \left\{ \frac{1}{(\alpha_{mj}L)} + \frac{2\alpha_{mj}}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\left[\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + \alpha_{mj}^2\right]} \cos \frac{i\pi}{L}x \right\}.$$

Таким чином

$$b_{mj0} = \frac{sh\alpha_{mj}L}{(\alpha_{mj}L)ch(\alpha_{mj}L)}; \quad b_{m0n} = \frac{2\alpha_{m0}th(\alpha_{m0}L)(-1)^n}{L \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]};$$

$$b_{mjn} = \frac{2(\alpha_{mj})sh(\alpha_{mj}L)(-1)^n}{Lch(\alpha_{mj}L) \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{h}\right)^2 \right]}.$$

Звідси

$$D_1 = - \frac{2g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_{nm}thk_{nm}h}{h} \right] (-1)^n}{\omega_{nm}^2 hL(k_{nm}thk_{nm}h) \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2g(-1)^n [1 - (-1)^j] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{\omega_{nm}^2 (j\pi)^2 L(k_{nm}thk_{nm}h) \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{h}\right)^2 \right]}.$$

Оцінюючи коефіцієнти, отримаємо рівняння для амплітуди резонансної хрестоподібної хвилі, рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + \\ + 0,0478 \omega_{nm}^2 \xi_{nm} \sin \omega t - 0,299 \omega_{nm} \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Коли $k_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$; $L = 50$ м; $b = 6,8$ м; $n = 40$; $m = 10$;

$\omega_{nm} = 2\pi 1,143\text{с}^{-1}$; $\omega = 2\pi 2,27\text{с}^{-1}$. [29-32].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 3

1. Ганиев Р. Ф. О нелинейных резонансных колебаниях тел с жидкостью / Р. Ф. Ганиев // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, 10. – С. 23–29.
2. Ганиев Р. Ф. Проблемы механики в космической технологии : Монографія / Р. Ф. Ганиев, В. Ф. Лапчинский. – М. : Машиностроение, 1979. – 120 с.
3. Ганиев Р. Ф. Динамика частиц при воздействии вибраций : Монографія / Р. Ф. Ганиев, Л. Е. Украинский. – К. : Наукова думка, 1975. – 168 с.
4. Григолюк Э. И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью : Монографія / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л. : Судостроение, 1976. – 200 с.
5. Гузь А. Н. Динамика тел, взаимодействующих со средой : Монографія / А. Н. Гузь, Ш. Маркуш, Л. Пуст и др. ; Отв. ред. Гузь А. Н. : АН Украины, Ин-т механики. – К. : Наукова думка, 1991. – 392 с.
6. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ : Монографія / М. А. Ильгамов. – М. : Наука, 1969. – 182 с.
7. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость : Монографія / М. А. Ильгамов. – М. : Наука, 1991. – 200 с.
8. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью : Монографія / О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский. – К. : Национальный технический ун-т Украины “КПИ”, 1997. – 338 с.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа./ Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1987. – 840 с.
10. Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объёма жидкости : Монографія / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко. – К. : Наукова думка, 1984. – 232 с.
11. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость : Монографія / И. А. Луковский. – К. : Наукова думка, 1990. – 296 с.
12. Lamb H. Hydrodynamics / H. Lamb, - Dover, New-York. – 1945. – P. 760.

13. Нариманов Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью : Монография / Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. – М. : Машиностроение, 1977. – 206 с.
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1./ Л. И. Седов, – М. : Наука, 1970. – 492 с.
15. Garrett C. J. R. Cross waves / C. J. R. Garrett / / J. Fluid Mech. – 1970. – Vol. 41. – P. 837–849.
16. Mahony J. J. Cross-waves. Part 1. Theory / J. J. Mahony / // J. Fluid Mech. - 55, 2. - P. 229-244.
17. Jones A. F. The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance / A. F. Jones / / J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 138. – P. 53-74.
18. Lichter S. Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves / S. Lichter, J. Chen – J. Fluid Mech. – 1987. – 183. – P. 451.
19. Lichter S. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves / S. Lichter, W. B. Underhill. – Phys. Rev. – 1987. – A35. – P. 5282–5284.
20. Lichter S. Stability of steady cross-waves: theory and experiment / S. Lichter, A. J. Bernoff. – Phys. Rev. – 1988. – A37. – P. 1883–1667.
21. Ayanle H. Spanwise modal competition in cross-waves / H. Ayanle, A. J. Bernoff, S. Lichter / / Physica D – 1990. – Vol. 43, – P. 87-104.
22. Shemer L. Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency / L. Shemer, S. Lichter. – Phys. Fluids. – 1987. – 30. – P. 3427–3433.
23. Shemer L. The mode number dependence of neutral stability of cross-waves / L. Shemer, S. Lichter. – Exps Fluids. – 1990. – 9. – P. 148–152.
24. Miles J. W. Parametrically excited, standing cross-waves / J. W. Miles / / J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 186. – P. 119-127.
25. Miles J. W. Parametrically forced surface waves / J. W. Miles, D. Henderson / / Annu. Rev. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 22. – P. 143–165.
26. Barnard B. J. S. Cross-waves. Part 2. Experiments / B. J. S. Barnard, W. G. Pritchard / / J. Fluid Mech. – 1976. – Vol. 55, 2. – P. 245-255.

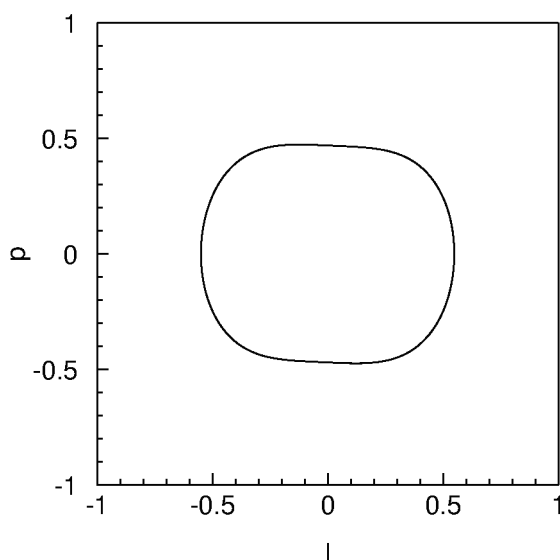
27. Краснопольська Т. С. Експериментальні дослідження збудження хрестоподібних хвиль / Т. С. Краснопольська, В. М. Спектор / / Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія “Фізико - математичні науки”. – 2013. – Вип. 2, 4. – С. 55–58.
28. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / G. Lamé. – Paris : Bachelier, 1852. – 335 p.
29. Краснопольська Т. С. Поверхневі хвилі у прямокутному басейні з хвилепродуктором / Т. С. Краснопольська, В. М. Спектор / / Вісник Дніпропетровського університету, серія “Механіка”. – 2011. – Вип. 15, т. 2, 5. – С. 132–139.
30. Краснопольская Т. С. Перекачка энергии в крестовидные волны в длинных каналах / Т. С. Краснопольская, В. М. Спектор / / XV International Conference Dynamical System Modeling and Stability Investigation : Abstracts of Conference reports. – Kyiv, 2011.
31. Краснопольська Т. С. Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів / Т. С. Краснопольська, В. М. Спектор / / Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія “Фізико - математичні науки”. – 2012. – Вип. 1, 4. – С. 93–100.
32. Краснопольская Т. С. Крестовидные волны в прямоугольных конечномерных каналах / Т. С. Краснопольская, В. М. Спектор / / Труды симпозиума “Консонанс-2011”, Ин. гидромех. НАН Украины. – Киев, 2013. – С. 160–169.
33. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity / V. V. Meleshko / / Proc. R. Soc. London. – 1996. – Vol. A452. – P. 1999–2022.
34. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a finite cylinder / V. V. Meleshko, V. S. Malyuga, A. M. Gomilko / / Proc. R. Soc. London. – 2000. – Vol. A456. – P. 1741–1758.

РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

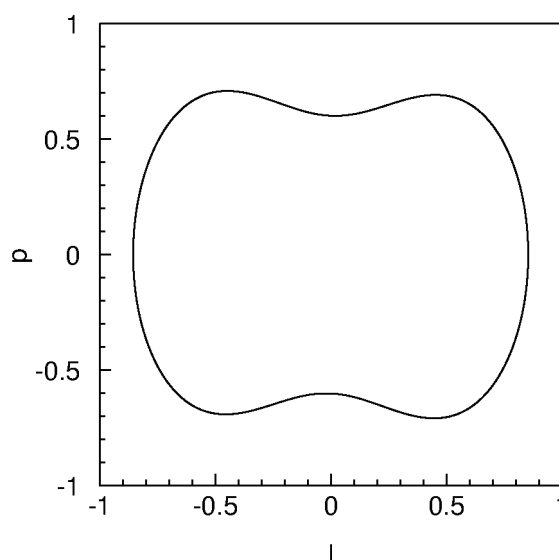
4.1. ОДНОМОДОВЕ НАБЛИЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ В ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ

Оскільки отримане в пункті 3.6. рівняння (13) є нелінійним, будемо шукати його розв'язок чисельно. Перш за все, ми введемо безрозмірний час $\tau = \omega_{nm}t$ коли $n = 40$; $m = 10$. Крім того, введемо безрозмірний аналог коливань вільної поверхні рідини l , помноживши який на розмірний коефіцієнт $k = 0,26$ метра ми отримаємо $\xi_{nm} = kl$. Тоді це диференціальне рівняння буде мати вигляд відносно нової змінної l

$$\ddot{l} + l + \alpha \dot{l} - k_1 l^3 + k_2 l \dot{l}^2 + k_3 A l \sin(2\tau - \beta\tau) - k_4 A \dot{l} \cos(2\tau - \beta\tau) = 0.$$



(a) A=12



(б) A=27

Рис. 1: Фазові портрети розв'язку при різних значеннях A.

Рівняння відносно l вже включає в себе демпфірування рідини при коливаннях по резонансній моді ξ_{nm} . В результаті чого враховується член $\alpha \dot{l}$.

Графіки отриманого розв'язку, коли $\dot{l} = p$ при $\alpha = 0.01$ $\beta = 0.014$, $k_1 = 1.0504$, $k_2 = 1.4003$, $k_3 = 0.0478$ і $k_4 = 0.299$ $A = 12$ $A = 27$ наведені на рисунках 1 (а) і (б).

Оскільки графік фазового портрету на площині lp є замкнутою кривою, то розв'язок для p і l є граничним циклом, про що свідчать графіки спектральної щільності розв'язків на рисунку 1, які є дискретними, що характерно тільки для регулярних режимів.

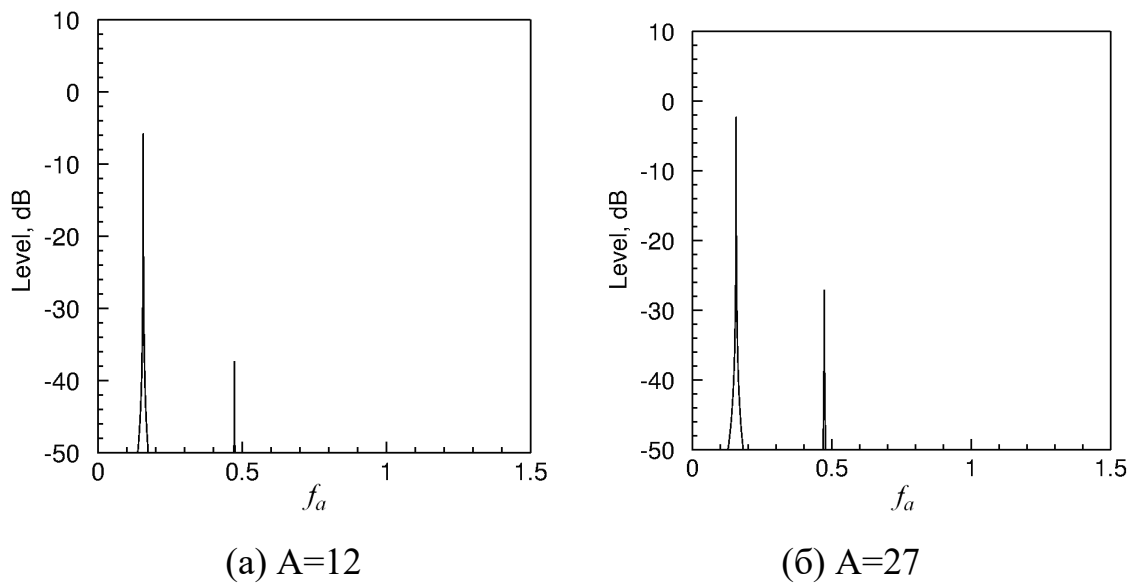


Рис. 2: Частотні спектри при різних значеннях A .

Таким чином, при одномодовому наближенні (2) з пункту 3.6. хвиль на вільній поверхні рідини в басейні, коли амплітуда хрестоподібних резонансних хвиль $\xi_{nm}(t) = O(\varepsilon_1^{1/2})$, амплітуда вимушених резонансних хвиль має менший порядок $\xi_{lo} = O(\varepsilon_1)$, а коливання середнього рівня нехтовно малі $\xi_{00} = O(\varepsilon_1^2)$ (що обумовлено, скажімо, геометрією прямокутного басейну Інституту гідромеханіки НАН України, де проводилися дослідження), динаміка хрестоподібних і вимушених хвиль незалежна один від одної (при розгляді задач з утриманням величин до $O(\varepsilon_1^{3/2})$). В результаті динаміка хрестоподібних хвиль регулярна. Це пов'язано ще і з тим, що власні форми вільних хвиль в прямокутному басейні ортогональні і їх добутки (квадратичні члени рівнянь) після застосування процедури Бубнова дають ненульовий внесок в рівняння тільки в тому випадку,

якщо їх хвильові параметри співвідносяться як 1 до 2. Ми же розглядаємо взаємодію власних форм з параметрами $n = 40$, $m = 10$ і $n = 175$, $m = 0$. Їх квадратичний добуток після процедури Бубнова дає нульовий внесок в рівняння.

Якщо розглядати взаємодію двох хрестоподібних хвиль з різними параметрами хвиль n і m , то, як вказують теоретичні та експериментальні дослідження хрестоподібних хвиль в прямокутному басейні (на основі розв'язку для напівнескінченного басейну) С. Ліхтером і його учнями [1-6], такого роду розв'язок може привести до хаотизації хрестоподібних хвиль. Рівняння для амплітуд хрестоподібних хвиль записується як наближення нелінійного рівняння Гінзбурга без детального виведення такого роду рівнянь (що прийнято в нелінійній фізиці)[7].

4.2. ПОРІВНЯННЯ АЛГОРИТМІВ ПІДРАХУНКУ СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА

Знову розглянемо коливання вільної поверхні рідини в прямокутному басейні скінчених розмірів з хвилепродуктором (рис. 1).

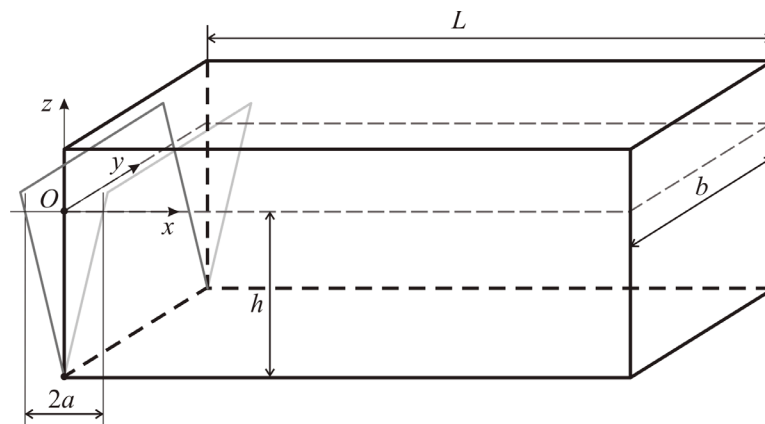


Рис. 1: Басейн з хвилепродуктором

Басейн має розміри: довжина $L = 50$ м , ширина $b = 6,8$ м і глибина 3,5 м. Басейн наповнений на глибину 2,5 м. Схематично басейн з хвилепродуктором представлений на рис. 1. Введемо декартову систему

координат з початком в точці 0 на незбуреній поверхні рідини. Хвилепродуктор розташовується в одному кінці басейну, при $x = 0$ рухи хвилепродуктора в напрямку осі \bar{x} описуються функцією

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{az}{h} \right) \sin \omega t,$$

Де $2a$ - діапазон коливань хвилепродуктора на поверхні рідини, ω - частота $\omega = 2\pi f_e$

Система рівнянь у формі Коші для амплітуди резонансної моди коливань має вигляд [8]

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{d\tau} &= p, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{1}{1+1.0504\ell^2} \left(\ell + \alpha p + 1.4003\ell p^2 + \right. \\ &\left. + 4.78A\ell \sin((2-\beta)\tau) - 2.99Ap \cos((2-\beta)\tau) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $\ell = \xi_{nm}(t) / \mu$, $\tau = \omega_{nm}t$, $\xi_{nm}(t)$ - амплітуда резонансної моди коливань $\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos(n\pi x/L) \cos(m\pi y/b) + \xi_{00}$, ω_{nm} - власна частота прямокутного басейну $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq b$ глибини $h = 2,5$, $\mu = 0.26$ м - коефіцієнт обезрозмірювання, A - безрозмірна амплітуда коливань, α - коефіцієнт опору рідини, p - похідна від амплітуди резонансної моди коливань $\omega = 2\pi \cdot 2,27$, $\omega \approx 2\omega_{nm}$. З початковими умовами $l(0) = 0,3456$, $p(0) = 1,104$. У системі (1) виявлено регулярну (рис. 3) і хаотичну (рис. 4) динаміку [8].

1. Порівняння класичного алгоритму Бенеттіна і його модифікації.

До визначення описаних динамічних режимів було застосовано класичний алгоритм Бенеттіна та запропоновану модернізацію. Результати обчислень наведено у табл. 1. За класичним алгоритмом Бенеттіна отримано від'ємні значення СПЛ для стійких граничних циклів (випадки 1 та 2). Модифікований алгоритм виявляє додатні значення СПЛ, які є меншими за абсолютною величиною, що вказує на кращу точність оцінки (тому що для граничного циклу показник має бути нульовим). При цьому видно, що у випадку 1 значення СПЛ, отримане при $\varepsilon = 0.1$, є меншим ніж отримане при $\varepsilon = 0.5$, а у випадку 2 - навпаки,

більшим, що пояснюється більшими розмірами граничного циклу у фазовому просторі. Для хаотичних режимів усіма методами отримано додатні значення СПЛ, які є більшими при $\varepsilon = 0.1$. Найбільше значення отримано з використанням модифікованого алгоритму при $\varepsilon = 0.1$. Таким чином, у цій моделі використання модифікованого алгоритму з малим значенням ε відкриває можливість точнішої характеристики поведінки фазової траєкторії на атракторі, як у випадку граничного циклу, так і для хаосу.

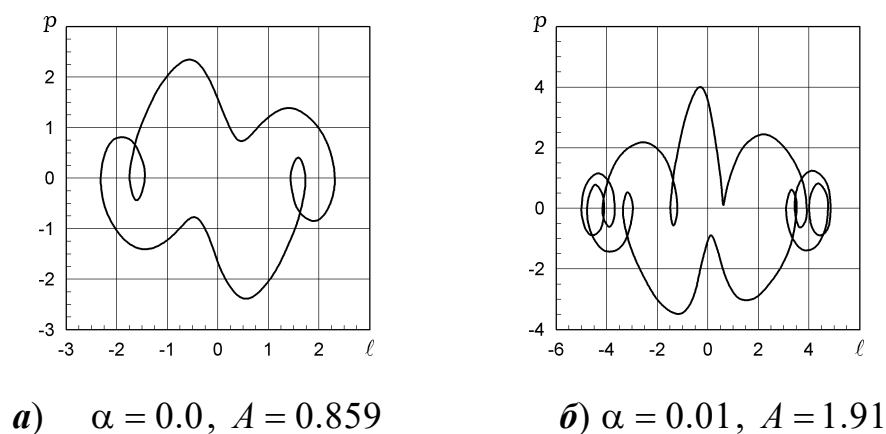


Рис. 3. Регулярні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних за розмірами прямокутних басейнах [8].

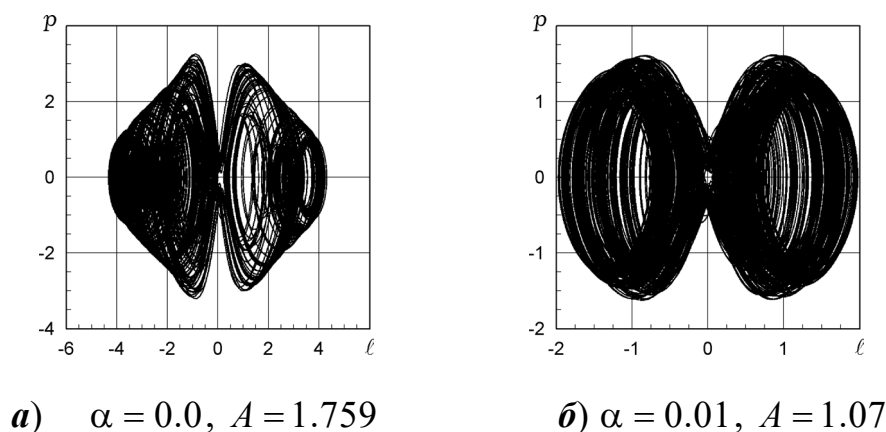


Рис. 4. Хаотичні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних за розмірами прямокутних басейнах [8].

		Регулярний режим		Хаотичний режим	
		1) $\alpha = 0.0$, $A = 0.859$	2) $\alpha = 0.01$, $A = 1.91$	3) $\alpha = 0.0$, $A = 1.759$	4) $\alpha = 0.01$, $A = 1.07$
Алгоритм Бенет-тіна, $\varepsilon = 0.1$		-0.000567	-0.000744	0.014456	0.015759
Модифікований алгоритм	$\varepsilon = 0.1$	0.000046	0.000828	0.030678	0.025555
	$\varepsilon = 0.5$	0.000070	0.000670	0.012995	0.014227

Таблиця 1. Значення СПЛ, отримані різними методами для регулярних та хаотичних режимів у моделі хрестоподібних хвиль.

Отже числовий розрахунок СПЛ із використанням класичного алгоритму Бенеттіна не завжди є задовільним у випадку динамічної системи з дисипацією енергії. Запропонована модифікація цього алгоритму дає змогу підвищити точність розрахунків і розширити область застосування методу. Застосування цієї модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дає змогу точніше ідентифікувати динамічний режим. [9],[10].

2. Порівняння класичного алгоритму Бенеттіна і нового універсального алгоритму.

Результати розрахунку наведено у Табл.2. За класичним алгоритмом Бенеттіна отримано від'ємні значення показника для стійких граничних циклів (випадки **1** та **2**). Універсальний алгоритм демонструє додатні значення, менші по абсолютній величині, що вказує на більшу точність оцінки. Причому видно, що у випадку **1** значення показника менше за отримане у випадку **2**, що пояснюється більшими розмірами граничного циклу у фазовому просторі. Для хаотичних режимів всіма методами отримано додатні значення показників. Найбільше значення отримано універсальним алгоритмом у випадку **3**. Універсальний алгоритм демонструє додатні значення, більші по абсолютній

величині, що знову вказує на більшу точність оцінки. Таким чином, в даній моделі використання універсального алгоритму дозволяє більш точно розрізняти та характеризувати поведіну фазової траєкторії на атракторі, як у випадку граничного циклу, так і для хаосу.

	1 Регулярний режим $\alpha = 0.0 ; A = 0.859$	2 Регулярний режим $\alpha = 0.01,$ $A = 1.91$	3 Хаотичний режим $\alpha = 0.0 ; A = 1.759$	4 Хаотичний режим $\alpha = 0.01, A = 1.07$
Алгоритм Бенеттіна $\epsilon = 0.05$	-0.123058	-0.276340	0,539841	0,921434
Універсальний Алгоритм $\epsilon = 0.05$	0,078490	0,179645	2,118874	1,687826

Табл. 2. Значення старшого показника Ляпунова, отримані різними методами, для регулярних та хаотичних режимів в моделі хрестоподібних хвиль.

Числовий розрахунок старшого показника Ляпунова на основі класичного алгоритма Бенеттіна не враховує збігання та розбігання траєкторій на хаотичному атракторі. В статті запропоновано універсальний алгоритм, точність якого не залежить від цієї та інших особливостей хаотичних атракторів, таких як форма, розмір та структура, їх кількість та розташування у фазовому просторі. Новий алгоритм дозволяє збільшити точність розрахунків та розширити область застосування зазначеного методу. Застосування запропонованої модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дозволяє більш точно ідентифікувати динамічний режим.[11].

4.3. ХАОС В ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ З ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Розглянемо коливання вільної поверхні рідини в прямокутному басейні скінчених розмірів з хвилепродуктором з пункту 4.2, з урахуванням факторів запізнювання.

Система, що описує хрестоподібні хвилі, за даної умови отримана в [8].
Запишемо цю систему з відхиленням аргументу τ .

$$\begin{aligned} \frac{dl(\bar{t})}{d\bar{t}} &= p(\bar{t}); \\ \frac{dp(\bar{t})}{d\bar{t}} &= -\frac{l(\bar{t}) + \alpha p(\bar{t} - \tau) + 1.4003l(\bar{t})p^2(\bar{t} - \tau)}{1 + 1.0504l(\bar{t})^2} + \\ &+ \frac{4.78Al(\bar{t})\sin(2\bar{t} - \beta\bar{t}) - 2.99Ap(\bar{t} - \tau)\cos(2\bar{t} - \beta\bar{t})}{1 + 1.0504l(\bar{t})^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Де $\bar{t} = \omega_{nm}t$, τ - запізнювання аргументу. A - безрозмірна амплітуда коливань.

Розглянемо систему (1) при $\beta = 2 - \frac{\omega}{\omega_{nm}} = 0,014$ і без демпфірування $\alpha = 0,0$ з початковими умовами $l(\bar{t}) = 0,3456$, $p(\bar{t}) = 1,104$, якщо $\bar{t} \leq 0$.

Застосуємо до системи (1) явний гібридний метод Рунге-Кутти п'ятого порядку при $A = 0,859$ і $A = 1,759$. Отримані результати при різних значеннях τ зображені на рис.1-4.

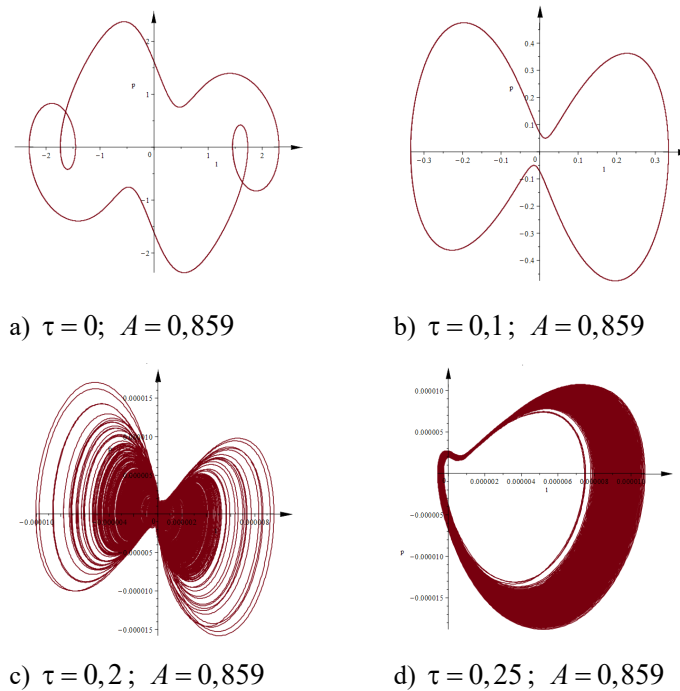
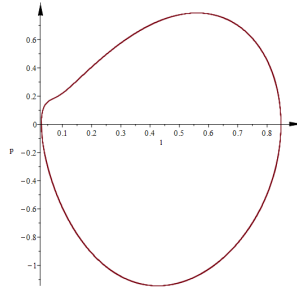


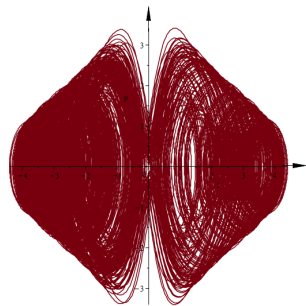
Рис.1.



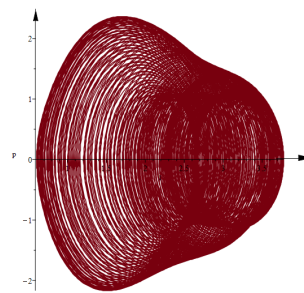
$$\tau = 0,3; A = 0,859$$

Рис.2.

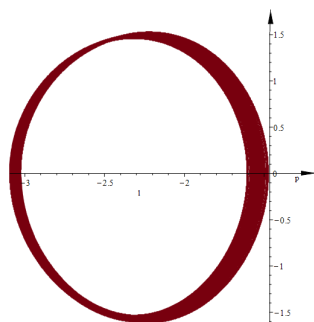
З Рис.1. а), б) видно, що при врахуванні запізнювання порядку 0,1 змінюється регулярний режим системи що описує хрестоподібні хвилі. А при подальшому збільшенні запізнювання маємо перехід до хаосу (Рис.1.с), зміну хаотичного режиму (Рис1.d) і знову встановлення регулярного режиму при $\tau = 0,3$ (Рис.3.).



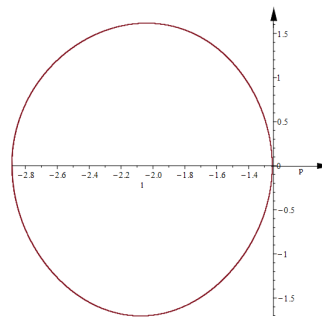
a) $\tau = 0; A = 1,759$



b) $\tau = 0,1; A = 1,759$



c) $\tau = 0,2; A = 1,759$



d) $\tau = 0,3; A = 1,759$

Рис.3.

На Рис.3. бачимо перехід від хаотичного режиму системи до регулярного при збільшенні значення запізнювання.

Таким чином гібридний метод описаний в роботі застосований до вивчення гідродинамічної системи що описує хрестоподібні хвилі з урахуванням запізнювання. Встановлено суттєву зміну динамічних режимів даної системи при врахуванні факторів запізнювання.

Розглянемо детальніше випадок малого відхилення $0 \leq \tau \leq 0,1$, що відповідає запізненню в розмірному часі $0 \leq \frac{\tau}{\omega_{nm}} = \frac{\tau}{\pi \cdot 2,27} \leq 0,014$ секунди.

Нехай $A = 0,859$ (регулярний режим).

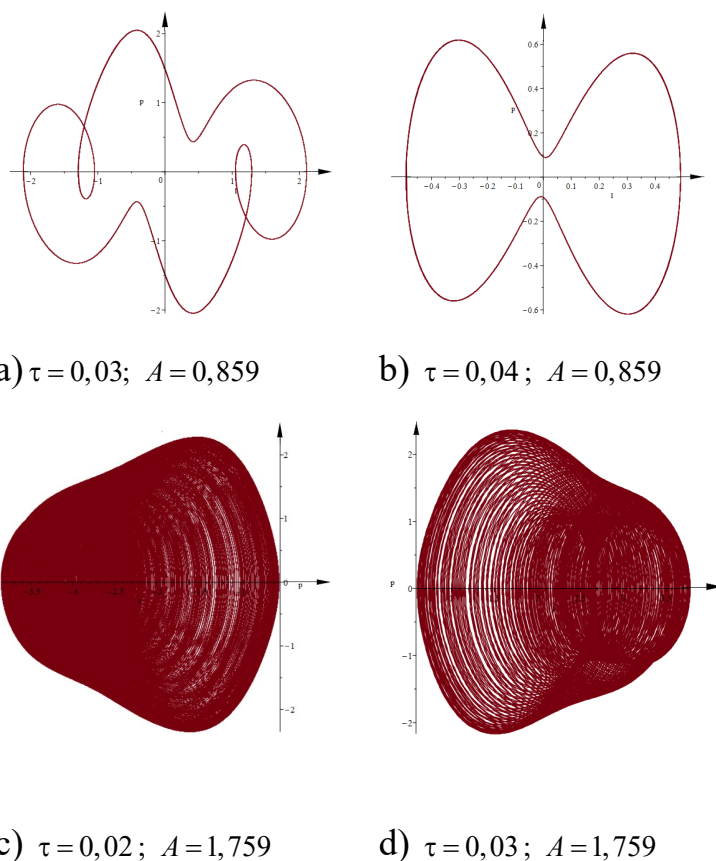


Рис.4.

Якщо $0 \leq \tau \leq 0,03$ атрактор системи майже не змінюється (рис.4.a). При $\tau \approx 0,0355$ маємо біфуркацію в атрактор вигляду рис.4.b, який майже не

змінюється при подальшому збільшенні $0,05 \leq \tau \leq 0,1$.

Нехай $A = 1,759$ (хаотичний режим).

При $0 \leq \tau \leq 0,01$ зміни в фазовому просторі відсутні. А при $\tau = 0,02$ маємо зміну вигляду хаотичного атрактора (рис.4.c). При $\tau = 0,03$ атрактор знову змінюється (рис.4.d). При $\tau = 0,04$ атрактор такий самий як і при $\tau = 0,02$. При $\tau = 0,05$ атрактор такий самий як і при $\tau = 0,03$. Така чуттєвість до значення τ продовжується і до значення $\tau = 0,1$.

Таким чином, маємо чуттєвість до значення τ , більшу ніж в регулярному режимі, що є природним для хаотичного режиму коливаль.

Отже в даному пункті встановлено суттєвість врахування факторів запізнювання при дослідженні на регулярну і хаотичну динаміку системи що описує хрестоподібні хвилі в басейні скінчених розмірів з хвилепродуктором.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ В РОЗДІЛІ 4.

1. Lichten S. Subharmonic resonance of nonlinear cross-waves / S. Lichten, J. Chen – J. Fluid Mech. – 1987. – 183. – P. 451.
2. Lichten S. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves / S. Lichten, W. B. Underhill. – Phys. Rev. – 1987. – A35. – P. 5282–5284.
3. Lichten S. Stability of steady cross-waves: theory and experiment / S. Lichten, A. J. Bernoff. – Phys. Rev. – 1988. – A37. – P. 1883–1667.
4. Ayanle H. Spanwise modal competition in cross-waves /H. Ayanle, A.J. Bernoff, S. Lichten / / Physica D – 1990. – Vol. 43, – P. 87-104.
5. Shemer L. Identification of cross-wave regimes in the vicinity of a cut-off frequency / L. Shemer, S. Lichten. – Phys. Fluids. – 1987. – 30. – P. 3427–3433.
6. Shemer L. The mode number dependence of neutral stability of cross-waves / L. Shemer, S. Lichten. – Exps Fluids. – 1990. – 9. – P. 148–152.
7. Спектор В. М. Хаотичні і регулярні хрестоподібні хвилі на вільній поверхні рідини/ В. М. Спектор, Е. Д. Печук, Т. С. Краснопольська / / Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, серія “Фізико - математичні науки”. – 2014. – Вип. 2. – С. 77–82.
8. Krasnopolskaya T. S. Peculiarities of parametric resonances in cross-waves./ T. S. Krasnopolskaya, E. D. Pechuk // Chaotic Modeling and Simulations. – 2016. – No. 3. – P. 377–385.
9. Печук В.Д. Про оцінку старшого показника Ляпунова моделі хрестоподібних хвиль у прямокутному каналі скінченних розмірів / В.Д. Печук, Т.С. Краснопольська // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2022. - Т. 65, Вип. 1-2. - С. 209-215.
10. Pechuk V.D. Estimation of the largest lyapunov exponent for a model of cross-shaped waves in a rectangular channel of finite size/ V.D. Pechuk, T.S. Krasnopolskaya //Journal of Mathematical Sciences, Springer. - 2024. - Vol. 282, No. 5. - P. 862 – 869.
11. Печук В.Д. Універсальний алгоритм оцінки старшого показника Ляпунова в дисипативній динамічній системі/ В.Д. Печук, Т.С. Краснопольська,

Є.Д. Печук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2023. - Вип. 105. - С. 190-199.

ВИСНОВКИ

1. В даній роботі вперше показана можливість перекачування енергії від хвилепродуктора до хрестоподібних поверхневих хвиль в ідеальній рідині в прямокутному басейні скінченних розмірів з хвилепродуктором. Це показано аналітично на основі застосування методу суперпозиції і перевірено експериментально.

2. Встановлено закономірності регулярних усталених поверхневих хвиль у рідині в прямокутному басейні скінченних розмірів з хвилепродуктором. Показано існування регулярних режимів коливань вільної поверхні рідини при одномодових параметричних резонансах. Наведено параметри, при яких можливі хаотичні стійкі коливання в усередненій динамічній системі, що описує динаміку амплітуд хрестоподібних хвиль.

3. Побудовано новий чисельний алгоритм для систем із запізнюванням. А саме, явний гібридний метод для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням на основі поліномів Ньютона і формули Тейлора для наближення на наступний крок чисельного інтегрування і класичних методів Рунге-Кутти. Отриманий таким чином явний гібридний метод п'ятого порядку для систем диференціальних рівнянь з запізнюванням, наприклад, з коефіцієнтами Кутти-Нюстрема або коефіцієнтами методу Дормана-Принса, з оцінкою похибки чисельного інтегрування, підходить для дослідження актуальних на даний момент систем з запізнюванням на досить великі, порівняно з запізнюванням, проміжки часу.

4. Числовий розрахунок СПЛ із використанням класичного алгоритму Бенеттіна не завжди є задовільним у випадку динамічної системи з дисипацією енергії. Зроблено модифікацію цього алгоритму що дає змогу підвищити точність розрахунків і розширити область застосування методу. Застосування цієї модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дало змогу точніше ідентифікувати динамічні режими.

5. Чисельний розрахунок старшого показника Ляпунова на основі класичного алгоритма Бенеттіна не враховує збігання та розбігання траєкторій на хаотичному аттракторі. В роботі розроблено універсальний алгоритм, точність якого не залежить від цієї та інших особливостей хаотичних аттракторів, таких як форма, розмір та структура, їх кількість та розташування у фазовому просторі. Новий алгоритм дозволяє збільшити точність розрахунків та розширити область застосування зазначеного методу. Застосування запропонованої модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дозволяє більш точно ідентифікувати динамічні режими.

6. Вперше досліджено вплив запізнювання на динаміку хрестоподібних хвиль. Встановлено суттєвість врахування факторів запізнювання при дослідженні на регулярну і хаотичну динаміку системи що описує хрестоподібні хвилі в басейні скінчених розмірів з хвилепродуктором.