

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

Калашніков Олександр Борисович

Гриф

Прим. № \_\_\_\_\_

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**СТІЙКІСТЬ ТА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ**  
**ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

05.23.17 – будівельна механіка

19 Архітектура та будівництво

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

 О.Б. Калашніков

Науковий керівник Лізунов Петро Петрович, д.т.н., професор

## АНОТАЦІЯ

*Калашніков О.Б.* Стійкість та власні коливання пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка. Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена розробці методу комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних багат шарових оболонок, які мають складну форму та геометричні особливості за товщиною і знаходяться під дією статичного термомеханічного навантаження, та розробці методології моделювання термопружних характеристик односпрямованого композитного волокнистого матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки. Методи дослідження стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури ґрунтуються на ефективному підході, за яким тонкі оболонки розглядаються як тривимірні тіла, а їхня поведінка описується співвідношеннями геометрично нелінійної тривимірної теорії термопружності. Уточнена розрахункова модель оболонок побудована на базі використання універсального тривимірного скінченного елемента та залученні моментної схеми скінченних елементів. Прийнятий уніфікований підхід надає можливість досліджувати деформування та власні коливання пружних оболонок різних класів (сталої, гладко- та ступінчасто-змінної товщини, з отворами, з багат шаровою структурою матеріалу тощо) у рамках єдиної методології. Даний підхід дозволяє аналізувати поведінку пружних оболонок, що знаходяться під дією складного (комбінованого) термомеханічного навантаження.

У рамках скінченноелементної моделі багат шарової оболонки розроблено методику моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу та розроблено нову модифікацію універсального тривимірного багат шарового СЕ, матеріалом шарів якого є КМ, армований

паралельними безперервними волокнами. Новий СЕ побудовано на основі просторового ізопараметричного 8-ми вузлового багат шарового СЕ з полілінійними функціями форми, матеріалами шарів якого є традиційні матеріали. Визначення ефективних характеристик КМ здійснюється за структурними мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування термопружних сталей для даної моделі композиту. Це дало змогу поширити метод аналізу поведінки пружних оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, на задачі дослідження стійкості та власних коливань багат шарових волокнистих композитних оболонок.

Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах, коли процес деформування подається як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках термомеханічного навантаження. Використано модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Метод комплексного аналізу стійкості та власних коливань оболонок побудовано як двохетапний алгоритм, що реалізується на кожному кроці приросту навантаження і дає змогу виконувати модальний аналіз конструкції з урахуванням переднапруженого стану. За таким підходом момент втрати стійкості конструкції може бути визначений одночасно за статичним і динамічним критеріями.

Обґрунтовано ефективність і достовірність розробленого методу шляхом проведення чисельних досліджень збіжності та точності розв'язків, а також порівняльного аналізу результатів з даними інших авторів і з результатами розрахунку із залученням програмних комплексів ЛІРА-САПР, SCAD, NASTRAN. Досліджено вплив геометричних параметрів конструктивних елементів оболонок і параметрів термомеханічного навантаження на нелінійне деформування, стійкість та власні коливання пружних оболонок. Можливості

методу продемонстровано на прикладі розв'язання задачі щодо власних коливань складеної композитної оболонки – обтічника літального апарату.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, ступінчасто-змінна товщина, геометрично нелінійне деформування, стійкість, власні коливання, термомеханічне навантаження, універсальний тривимірний скінченний елемент, моментна схема скінченних елементів, волокнистий односпрямований композитний матеріал.

## ABSTRACT

*Kalashnikov O.B.* Buckling and natural vibrations of elastic heterogeneous shells under thermomechanical loads. – Manuscript.

The thesis is monograph submitted for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 05.23.17 – Structural Mechanics. – Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the development of the method for complex studying geometrically nonlinear deformation, buckling and natural vibrations of shells with a complex shape of the middle surface, geometric features throughout the thickness, and a multilayer material structure under the action of static thermomechanical loading. The research methods are based on an the effective approach in which thin shells are considered as three-dimensional bodies. Their behavior is described by the relations of three-dimensional geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the moment finite element scheme. Within a single methodology the adopted unified approach allows us for the investigation of the deformation and natural vibrations of elastic shells of various classes such as constant, linear and stepwise-varying thickness, with holes, and multilayer material structures, etc. This approach enables the analysis of the behavior of elastic shells under complex (combined) thermomechanical load. Within the framework of the finite element model of the multilayer shell, a method of modeling the properties of unidirectional fibrous composite material has been developed. A new modification of the universal

isoparametric eight-node multilayer 3D finite element with multilinear shape functions has been developed, intended for studying thin elastic shells made of both traditional and composite materials. Determination of the effective characteristics of the composite material is implemented by the structural micromechanical parameters of its components based on known methods for predicting thermoelastic constants for a given model of the composite. To determine the effect of the prestressed state of the shell on the frequencies and forms of natural vibrations, a two-stage algorithm was developed, which is implemented at each step of increasing the thermomechanical load. The substantiation of the effectiveness and reliability of the proposed method was confirmed by conducting numerical studies of convergence of solutions and accuracy of solutions on tests. The effect of various geometrical parameters of structural elements of shells and parameters of thermomechanical load on nonlinear deformation, stability and natural vibrations of elastic shells has been investigated.

**Key words:** thin elastic shell, stepped-variable thickness, geometrically nonlinear deformation, buckling, natural vibration, thermomechanical loading, universal 3D finite element, moment finite element scheme, fibrous unidirectional composite material.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Наукові публікації, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації**

1. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Калашніков О.Б. Універсальний тривимірний скінченний елемент для розрахунку пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях. Опір матеріалів і теорія споруд. 2024. №112. С. 93-107. (Web of Science, Q4)

2. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б. Моделювання процесів нелінійного деформування, втрати стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури. *Прикладна механіка*. 2024. Т.60, № 4. С. 91-107. (Scopus, Q4)

3. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., **Kalashnikov O.B.** A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and Technical collected articles*. 2023. №110. P. 131-149 (**Web of Science, Q4**)

4. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V.; Kalashnikov O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. No 111. P. 49-64. (Web of Science, Q4)

5. Krivenko O., Lizunov P., **Kalashnikov O.** The influence of geometrical shape on the buckling of thin-walled axisymmetric shells. *Management of Development of Complex Systems*, 2024 №57, P. 102-106. (**Фахове видання**)

6.Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Моделювання термопружних властивостей композитного матеріалу в задачах стійкості багатошарових оболонок. *Управління розвитком складних систем*. 2023. № 54. С. 77-89. (**Фахове видання**)

7.Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Використання моментної схеми скінчених елементів при дослідженні тонких пружних оболонок. *Управління розвитком складних систем*. 2023. №53. С. 52-62. (**Фахове видання**)

8.Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.** Вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пологих оболонок при дії тиску. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. № 90. С. 143-157. (**Фахове видання**)

9.Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., **Калашніков О.Б.** Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. № 89. С. 172-180. (**Web of Science, Q4**)

10.Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.**, Тамілко О.А. Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 84. С. 89-96. (**Web of Science, Q4**)

11. Соловей М.О., Кривенко О.П., **Калашніков О.Б.** Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 83. С. 63-73. (Фахове видання)

### **Наукові публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

12. **Калашніков О.Б.**, Кривенко О.П., Лізунов П.П. Дослідження стійкості та власних коливань пружних оболонкових конструкцій при дії статичних термомеханічних навантажень. *Актуальні проблеми інженерної механіки: матеріали X Міжнародної науково-практичної конференції Одеса: ОДАБА, 2024, С. 144-147.*

13. **Kalashnikov, O.**, Krivenko, O., & Lizunov, P. (2024). Comprehensive investigation of the buckling and natural vibrations of thin elastic shells under the action of thermomechanical loads. *Scientific Collection «InterConf», 4th ISPC «Science in the Environment of Rapid Changes» (Brussels, Belgium) (195), 407–410.*

14. **Kalashnikov, O.**, Krivenko, O., & Lizunov, P. (2024). Modification of a universal three-dimensional finite element for modeling multilayer composite shells. *Scientific Collection «InterConf», 4th ISPC «Diversity and inclusion in scientific area» (Warsaw, Poland) (194), 461–463.*

15. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., **Калашніков О.Б.** Скінченно-елементний аналіз коливань і стійкості пружних оболонок при дії термосилових навантажень. *Проблеми будівельного та транспортного комплексів: матеріали міжн. науково-технічної on-line конф. Кропивницький: ЦНТУ, 2023. С. 82-85.*

16. **Калашніков О.Б.**, Кривенко О.П. Врахування термопружних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Енергоощадні машини і технології: матеріали міжн. науково-практичної конф. Київ, КНУБА. 2023. С. 153-156.*

17. **Калашніков О.Б.**, Верюжська Т.Ю. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок, послаблених каналами, виїмками та отворами. 74-

та Науково-практична конференція КНУБА: матеріали конф., Київ, 2013. С. 122.

18. **Калашніков О.Б.** Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану і стійкості пружних оболонок з каналами та ребрами. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2012. С. 44.

19. **Калашніков О.Б.,** Солоденко А.Д. Стійкість пружних пологих оболонок ступінчасто-змінної товщини. *73-тя Науково-практична конференція КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2012. С. 102.

20. **Калашніков О.Б.,** Гусар П.П. Аналіз задач нелінійного деформування та стійкості тонких пружних оболонок, що розв'язані за МССЕ та ПК ЛПРА. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА: матеріали конференції*, Київ, 2010. С. 32.



## ЗМІСТ

ВСТУП .....	12
РОЗДІЛ 1 КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ І ПІДХОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ, СТІЙКОСТІ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ .....	20
1.1 Огляд підходів дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних оболонок .....	20
1.2 Проблеми побудови розрахункових схем для моделювання багатошарових оболонок, виготовлених з композитних матеріалів ..	35
1.3 Вибір напрямку досліджень .....	39
РОЗДІЛ 2 ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ, СТІЙКІСТЬ ТА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК УСКЛАДНЕНОЇ СТРУКТУРИ ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ .....	41
2.1 Вихідні положення та гіпотези дослідження багатошарових композитних оболонок ступінчасто-змінної товщини при термомеханічних навантаженнях .....	41
2.2 Універсальний тривимірний скінченний елемент та моментна схема скінченних елементів у задачах термомеханічного деформування тонких пружних оболонок неоднорідної структури ..	49
2.3 Співвідношення методу скінченних елементів у задачах геометрично нелінійного термопружного деформування композитних багатошарових оболонок ступінчасто-змінної товщини	60
2.4 Корегування співвідношень методу скінченних елементів для оболонок ступінчасто-змінної товщини .....	68
2.5 Комбінований алгоритм розв'язування задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях .....	73

2.6 Двохетапний алгоритм комплексного розв'язування задач стійкості та власних коливань багат шарових оболонок при термомеханічних навантаженнях .....	77
2.7 Основні висновки по розділу .....	88
<b>РОЗДІЛ 3 ВРАХУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТРАДИЦІЙНОГО ТА КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК .....</b>	<b>91</b>
3.1 Моделювання фізико-механічних характеристик матеріалів шарів у скінченноелементній моделі оболонки .....	92
3.2 Визначення фізико-механічних характеристик традиційних матеріалів оболонки. ....	94
3.3 Особливості моделювання термопружних властивостей волокнистих композитних матеріалів у скінченноелементній моделі оболонки .....	98
3.4 Модифікація універсального тривимірного скінченного елемента для моделювання багат шарових композитних оболонок .....	104
3.5 Аналіз НДС композитних оболонок на основі нової модифікації універсального тривимірного багат шарового СЕ та визначення меж його застосування .....	110
3.6 Основні висновки по розділу .....	116
<b>РОЗДІЛ 4 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ, СТІЙКОСТІ, ЗАКРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ .....</b>	<b>118</b>
4.1 Вплив термомеханічного навантаження на стійкість, закритичну поведінку і власні коливання оболонки .....	119
4.2 Порівняльний аналіз стійкості та власних коливань пологих панелей сталої та змінної товщини .....	123

4.3 Вплив форми на стійкість нагрітих осесиметричних панелей при дії тиску . . . . .	145
4.4 Оцінка впливу кривизни на стійкість, закритичну поведінку та власні коливання гладких і ребристих оболонок при термомеханічних навантаженнях . . . . .	151
4.5 Аналіз стійкості оболонок послаблених каналами при експлуатаційних режимах термомеханічного навантаження . . . . .	160
4.6 Вплив способу закріплення контуру на втрату стійкості сферичної осесиметричної оболонки при термомеханічних навантаженнях . . . . .	166
4.7 Власні коливання складеної композитної оболонки головного обтічника ракети-носія . . . . .	173
4.8 Основні висновки по розділу . . . . .	176
ВИСНОВКИ . . . . .	178
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . .	181
ДОДАТОК . . . . .	201

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Удосконалення існуючих та створення нових методів і засобів аналізу поведінки пружних оболонкових конструкцій має важливе значення для їх ефективного використання в різних галузях техніки та промисловості. Оболонки через своє функціональне призначення можуть мати різні конструктивні неоднорідності: ребра, канали, виїмки, отвори, місцеві потовщення та стоншення, лінійно- та ступінчасто-змінну товщину, злами серединної поверхні, багат шарову структуру матеріалу тощо. Оболонки такого виду будемо називати неоднорідними. При експлуатації оболонкові конструкції часто піддаються впливу не лише механічних навантажень, а і теплових. При цьому наявність температурного поля може викликати значні деформації та впливати на форму прогину і величину критичного навантаження оболонки. Дія на оболонкову систему термомеханічного навантаження, яке викликає зміну її напружено-деформованого стану (НДС), звичайно позначається і на динамічних характеристиках конструкції, таких як власні коливання. Визначення характеру нелінійного деформування та власних коливань оболонок при дії складного (комбінованого) термомеханічного навантаження є важливим елементом аналізу поведінки оболонкових систем складної форми. Знання цих характеристик є важливою інформацією при проектуванні конструкцій з урахуванням експлуатаційних термомеханічних впливів.

Розвиток сучасної техніки супроводжується стабільним зростанням використання у відповідальних елементах оболонкових конструкцій композитних матеріалів (КМ). За своїми властивостями КМ значно відрізняються від традиційних матеріалів (ТМ). Однією з головних переваг композитів є можливість виготовлення матеріалу з наперед заданим комплексом властивостей заради підвищення надійності і економічності конструкції, що проектується. Поряд з високими механічними характеристиками, КМ мають і унікальні теплофізичні властивості, через що вони знаходять широке застосування в перспективних технологіях створення нових оболонкових

конструкцій. Варіюючи структуру КМ, можна отримати низькі (навіть нульові і, більш того, від'ємні) значення компонентів тензора теплового розширення всього композиту, що важливо для збереження сталості розмірів і форми оболонки за високої температури. В першу чергу це стосується односпрямованих волокнистих багат шарових КМ. Таке спрямування роботи на розгляд КМ є актуальним, оскільки більшість конструкцій сучасної техніки (наприклад, літаючі апарати) виготовлені з композитів і знаходяться в складних умовах термомеханічного навантаження.

Ускладнення геометричних форм оболонкових конструкцій, їх структури, умов експлуатації, широке впровадження КМ та наявність термомеханічного навантаження визначають актуальність побудови нового скінченноелементного методу комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження. При цьому, важливим елементом методу є розробка нової розширеної версії універсального тривимірного скінченного елемента (СЕ), який призначений для опису багат шарового КМ (односпрямованого волокнистого, як найпоширенішого композиту) в рамках скінченноелементної моделі оболонки, яка застосовується.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відповідності до загального плану наукових досліджень кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки (НДІБМ) КНУБА. Дослідження проведені в межах науково-дослідних робіт, що виконувались за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України: «Теоретичні основи аналізу нелінійного деформування та стійкості пружних неоднорідних оболонок складної структури при дії навантажень різної природи» (№ ДР 0111U002219), «Нелінійне деформування, стійкість, закритична поведінка та коливання оболонкових

конструкцій спеціальної техніки в екстремальних термосилових умовах експлуатації» (№ ДР 0121U001004). Автор брав участь у виконанні цих науково-дослідних робіт як співвиконавець.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи полягає в розробці скінченноелементного методу комплексного аналізу геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань складних оболонкових конструкцій неоднорідної структури при дії статичних термомеханічних навантажень, а також у розробці методології моделювання термопружних характеристик композитного односпрямованого волокнистого матеріалу та побудові на цій основі нової модифікації універсального тривимірного багатосферного скінченного елемента,

**Мета роботи досягається вирішенням наступних завдань:**

- вивчення проблеми використання розрахункових моделей оболонок неоднорідної жорсткості, що побудовані на основі теорії термопружності, для аналізу проблем стійкості та власних коливань конструкцій, які при експлуатації знаходяться в полі дії термомеханічних навантажень;
- розробка методу комплексного розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних неоднорідних оболонок при дії термомеханічних навантажень;
- побудова двохетапного алгоритму розв'язування, на кроці навантаження, задач нелінійного деформування та власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану;
- розробка нової модифікації універсального тривимірного багатосферного скінченного елемента, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити;
- отримання на основі рівнянь тривимірної теорії термопружності співвідношень методу скінченних елементів (МСЕ) для проведення модального аналізу неоднорідних оболонок з урахуванням переднапруженого стану;

- розробка програмного забезпечення і вдосконалення алгоритму автоматизованого розв'язування задач втрати стійкості та власних коливань оболонок при дії термомеханічних навантажень;
- адаптація програмних комплексів (ПК) ЛПА-САПР і SCAD до розв'язування задач стійкості та власних коливань пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини з метою використання, коли це можливо, цих комплексів як засобу проведення порівняльного аналізу;
- розв'язання низки тестових задач для доведення достовірності результатів, що отримуються, та підтвердження ефективності методу;
- дослідження впливу різних геометричних параметрів конструктивних елементів оболонок і параметрів термомеханічного навантаження на геометрично нелінійне деформування, втрату стійкості та власні коливання пружних оболонок.

**Об'єктом дослідження** є процеси геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних оболонок ускладненої форми і багатошарової структури, в тому числі композитної, що знаходяться під дією статичного термомеханічного навантаження.

**Предметом дослідження** є чисельні методи та алгоритми розв'язування задач геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та власних коливань оболонок з геометричними і фізико-механічними неоднорідностями при дії термомеханічних навантажень.

**Методи дослідження.** Дослідження нелінійного деформування неоднорідних оболонок виконуються методом скінченних елементів у формі моментної схеми. Ефективні характеристики односпрямованого волокнистого композитного матеріалу визначаються за структурними параметрами його компонентів на основі відомих мікромеханічних моделей прогнозування фізико-механічних сталей. Розв'язування задач нелінійного термопружного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань оболонок виконується за комбінованим алгоритмом, який спирається на кроковий метод продовження розв'язку за параметром, уточнюючу ітераційну процедуру

Ньютона-Канторовича та самокорегування параметрів алгоритму на кроці навантаження. Для визначення власних частот і форм коливань застосовано метод ітерацій у підпросторі.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у наступному:

- розроблено новий метод комплексного дослідження стійкості та власних коливань пружних оболонок неоднорідної за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження;

- побудовано новий двохетапний алгоритм розв'язування на кроці навантаження задач геометрично нелінійного деформування та власних коливань оболонок з урахуванням попередньо напруженого та деформованого станів;

- розроблено нову модифікацію універсального тривимірною багатощарового СЕ, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити;

- набув подальшого розвитку алгоритм автоматизованого розв'язування задач нелінійного деформування та стійкості пружних оболонок при дії термомеханічних навантажень, який розвинений на виконання модального аналізу конструкції на кроці навантаження з урахуванням переднапруженого та деформованого станів;

- розв'язані нові задачі дослідження особливостей впливу на деформування, втрату стійкості та власні коливання оболонок різних геометричних параметрів оболонкових конструкцій та параметрів складного термомеханічного навантаження.

**Достовірність результатів** забезпечується строгістю постановки задач; використанням обґрунтованих і раніше апробованих методів, що побудовані на основі положень моментної схеми скінченних елементів (МССЕ); збіжністю розв'язків у кожній задачі; хорошим узгодженням результатів для широкого класу неоднорідних оболонок з результатами інших авторів, а також з даними,



одержаними за допомогою програмних комплексів ЛІРА-САПР, SCAD, NASTRAN.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у створенні методу розв'язання актуальної науково-технічної задачі будівельної механіки з комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань оболонок, які знаходяться в умовах статичної дії експлуатаційних термомеханічних навантажень. Метод дає можливість прогнозувати безпечну поведінку пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою. Метод і програмне забезпечення впроваджені у НДІБМ КНУБА при виконанні робіт за держбюджетною тематикою та застосовані на кафедрі будівельної механіки КНУБА в учбовому процесі при виконанні дипломних проектів і магістерських робіт. Отримані результати можуть бути використані в науково-дослідних і проектних закладах, які займаються проектуванням оболонкових конструкцій, а розроблені метод та універсальний тривимірний багатосаровий SE можуть бути включені до існуючих програмних комплексів.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати та положення, які становлять сутність і зміст дисертації, отримані автором самостійно. Науковим керівникам Солов'ю М.О. та Лізунову П.П. належать загальна постановка задач, загальний задум і вибір методів проведення досліджень, інші співавтори статей брали участь в обговоренні та аналізі отриманих результатів. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. Методичні положення, практична реалізація, розрахунки та огляд літератури містяться в роботах [1-11], в тому числі побудова алгоритму комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок при термомеханічних навантаженнях [4, 7], розробка методики моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу та розробка на цій основі нової модифікації універсального тривимірного багатосарового SE [6, 9]. У публікаціях [1-11] здобувачу належить: розв'язання низки лінійних і нелінійних задач, проведення досліджень збіжності та достовірності одержаних результатів

шляхом виконання порівняльного аналізу з розв'язками інших авторів і з результатами розрахунків, які отримані здобувачем з використанням сучасних програмних комплексів. В цих публікаціях надані результати розв'язання нових задач і відображені дослідження впливу на НДС, втрату стійкості та власні коливання різноманітних структурних параметрів гнучких оболонок при складних режимах термомеханічного навантаження.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи та отримані результати доповідались та обговорювались на вітчизняних і міжнародних наукових конференціях: X Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2024); IV Міжнародна науково-практична конференція «Science in the environment of rapid changes» (Бельгія, Брюсель, 2024); IV Міжнародна науково-практична конференція «Diversity and inclusion in scientific area» (Польща, Варшава, 2024); Міжнародна науково-технічна on-line конференція «Проблеми будівельного та транспортного комплексів» (Кропивницький, ЦНТУ, 2023); IV Міжнародна науково-практична конференція «Енергоощадні машини і технології» у складі Міжнародного науково-технічного форуму «Енергоощадні машини і технології відновлення інфраструктури України» (Київ, КНУБА, 2023); «Наукові конференції молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА» (Київ, 2010-2013). У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась на міжкафедральному семінарі КНУБА (м. Київ, 2024).

**Публікації.** Результати дисертаційної роботи опубліковані в 20 наукових праць, серед яких: 4 статті у виданнях, що включені до міжнародних науково-метричних баз, 7 статей у наукових фахових виданнях України категорії Б, 9 публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка. Повний обсяг дисертації становить 201 сторінка, з них: основний текст на 169 сторінках,

65 рисунків і 24 таблиці на 10 окремих сторінках і по тексту, список використаних джерел із 196 найменувань на 20 сторінках.

**Подяки.** Автор вважає за необхідне виразити глибоку подяку д.т.н., професору Солов'ю Миколі Олександровичу, науковому керівнику д.т.н., професору, Лізунову Петру Петровичу та к.т.н., провідному науковому співробітнику НДІ будівельної механіки КНУБА Кривенко Ользі Петрівні.

# РОЗДІЛ 1

## КОРОТКИЙ ОГЛЯД МЕТОДІВ І ПІДХОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ, СТІЙКОСТІ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

### 1.1 Огляд підходів дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних оболонок

Сучасний стан розвитку авіаційної, космічної техніки, будівництва, судно- та приладобудування і багатьох інших високотехнологічних галузей промисловості потребує використання оболонок як надзвичайно ефективних конструктивних елементів. Широке застосування конструкцій з оболонок пояснюється насамперед їх відносною простотою виготовлення, високою міцністю при мінімальній вазі та необхідною гнучкістю.

Особливістю оболонок є схильність до різкої втрати стійкості, що обов'язково необхідно враховувати при проектуванні конструкцій. Під дією навантаження з часом настає момент, коли порушується вихідна форма рівноваги оболонки і відбувається її раптова зміна. При цьому навантаження, яке призводить до втрати стійкості конструкції, зазвичай, виявляється суттєво меншим за навантаження, при якому вичерпується запас її міцності у разі збереження вихідної форми рівноваги.

Для тонких оболонок характерною є поява достатньо великих прогинів навіть при навантаженнях, значно менших від критичних значень. Втрата стійкості вихідної форми рівноваги під впливом зовнішніх сил, механічного або теплового походження, може бути основною причиною аварійного стану оболонкової конструкції. Втрата стійкості при цьому відбувається раптово та реалізується практично миттєво. Для підвищення жорсткості та забезпечення більшої стійкості оболонки можуть підкріплюватися ребрами, накладками,

потовщеннями. Виходячи з різних вимог до конструкції, в тому числі технологічних, архітектурних або конструктивних, оболонки можуть мати послаблення у вигляді виїмок, каналів, отворів.

Таким чином реальні оболонки мають складну форму серединної поверхні, з неоднорідностями як в плані, так і за товщиною, та знаходяться під дією механічних, температурних, термомеханічних навантажень. Наявність подібних особливостей в оболонкових конструкціях значно ускладнює визначення їх напружено-деформованого стану та оцінку несучої спроможності, в якій провідне місце займає аналіз стійкості.

Дослідження в області аналізу стійкості оболонок інтенсивно розвиваються протягом останніх двох століть. Детальний історичний опис розвитку теорії та практики розрахунків оболонок можна знайти у книгах Е.І. Григолюка, В.В. Кабанова [44] та А.С. Вольміра [35].

Задачу стійкості традиційно розглядають у двох постановках – лінійній та геометрично нелінійній [35]. Втрату стійкості стержня, як найпростішого конструктивного елемента було виявлено теоретично Л. Ейлером ще у 1744 р. Згодом в роботах С.П. Тимошенка та інших авторів були розроблені фундаментальні дослідження теорії стійкості оболонок. Для перших робіт з теорії стійкості оболонок, характерне використання лінійного підходу та ідеалізованої розрахункової схеми. Оболонка вважалася геометрично досконалою та ідеально пружною. Розглядався безмоментний напружений стан. Для розв'язання задачі використовувалися лінеаризовані рівняння стійкості, одержувані на основі статичного критерію Л. Ейлера, відповідно до якого критичне навантаження, що викликає втрату стійкості, визначається як найменше навантаження, при якому поряд з вихідною формою рівноваги є статично можливою суміжна нескінченно близька до неї форма рівноваги. Критичне навантаження, визначене в цій постановці, є верхнім значенням критичного навантаження [44]. Невідповідність експериментальних і теоретичних значень критичного навантаження спонукала до подальшого розвитку теорії стійкості. Це привело до розробки нелінійної теорії оболонок та

методів розв'язання задачі стійкості [35]. Процес деформування при втраті стійкості оболонкою є нелінійним за своєю природою, тому величина та характер розподілу прогину оболонки відрізняється від розрахунків за лінійною теорією. Для узгодження з експериментальними даними та підвищення точності передбачалося, що класична теорія повинна бути переглянута з урахуванням різних факторів, як-от: початкові конструктивні недоліки, збурення, неоднорідність структури матеріалу і форми оболонки, моментність тощо [35, 75]. Використання нелінійного підходу забезпечує точність і достовірність розв'язків, дає можливість досліджувати закритичну поведінку оболонки, виявляти суміжні форми деформування.

На базі лінійної теорії оболонок на початку 20 ст. в працях І.Г. Бубнова, Теодора фон Кармана, С.П. Тимошенка були сформульовані основні принципи та підходи з врахування геометрично нелінійного деформування оболонок. В фундаментальних працях Х.М. Муштарі та К.З. Галімова [101] була представлена загальна нелінійна теорія пружних оболонок, в якій використовувалися уточнені нелінійні співвідношення, засновані на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Загальний підхід до деформування оболонок та рівняння тонких оболонок в ортогональних координатах був наданий в роботах В.В. Новожилова [104]. В подальшому розвивалися варіаційні методи аналізу деформування оболонок [123].

На теперішній час існує велика кількість класичних робіт, присвячених нелінійній теорії пружних оболонок, значний внесок в яку зробили М.О. Алумяє [2], М.О. Алфутів [3], С.О. Амбарцумян [4], І.Я. Аміро [6], В.А. Баженов [13, 14], В.В. Болотін [24], Д. Бушнелл [153, 26], Н.В. Валішвілі [27], А.С. Вольмір [35, 34], І.І. Ворович [36], Г.Д. Гавриленко [39], В.В. Гайдайчук [113], К.З. Галімов [101], О.І. Голованов [41], Є.О. Гоцуляк [52], Е.І. Григолюк [44], Я.М. Григоренко [49], О.Я. Григоренко [48], О.М. Гузь [51, 50], В.І. Гуляєв [52], В.О. Заруцький [6], Б.Я. Кантор [63], В.Т. Койтер [75], П.П. Лізунов [17], П.З. Луговий [42], Х.М. Муштарі [101], В.В. Новожилов [104], Дж. Оден [105], В.Г. Піскунов [108], О.В. Погорєлов [109],

О.С. Сахаров [69, 98, 14], М.О. Соловей [69, 13], С.П. Тимошенко [134], В.М. Трач [15], В.І. Феодосьєв [137], Л.П. Хорошун [138] та багато інших вітчизняних і закордонних вчених.

Огляд сучасного стану питання нелінійного деформування циліндричних оболонок можна знайти у роботах А. Маневича [96], О.В. Погорелова [110], Г.Д. Гавриленка [87], J.R. MacKay [173], A.D. Muradova [176] та інших. Сучасні експериментальні дослідження стійкості тонких оболонок надані в роботах [8, 174, 162, 54].

Загалом, виділяють два основні напрямки розвитку досліджень оболонкових конструкцій. Один з них зосереджений на оболонках простої канонічної форми: сферичних, циліндричних, конічних тощо [38], інший – сфокусований на широкий клас оболонок і відзначається універсальністю підходу [13].

Теорії та методам аналізу стійкості циліндричних оболонок присвячено значну кількість публікацій, так детальний огляд щодо дослідження закритичної поведінки циліндричних оболонок при однорідних навантаженнях наведено в книгах А.С. Вольміра [35], Е.І. Григолюка, В.В. Кабанова [44]. Відносно невелика кількість робіт присвячена впливу на стійкість циліндричних оболонок наявності отворів [9, 100, 111] та ребер [6, 38]. Як зазначається в роботі [9] складність розв'язання задачі стійкості оболонок з отворами полягає у виникненні зон концентрації напружень в околі отвору та локальна втрата стійкості в районі отворів, яка супроводжується утворенням великих деформацій та істотною зміною поля напруження. У цих умовах важливими є експериментальні методи дослідження, які втім не набули широкого поширення, оскільки їх проведення пов'язане зі значними труднощами технічного характеру. В низці робіт приведені експериментальні дослідження впливу на стійкість циліндричних оболонок розмірів, кількості і розташування отворів різної форми: прямокутної [156] та кругової [20]. Ще менша кількість робіт присвячена експериментальним дослідженням впливу термомеханічного навантаження на циліндричні оболонки [40].

Дослідження стійкості конічних оболонок на основі осесиметричної теорії надано у роботі Н.В. Валішвілі [27]. Зазвичай задачу стійкості конічної оболонки зводили до розрахунку еквівалентної, циліндричної оболонки. Радіус циліндричної оболонки приймався як середнє між великим і малим радіусами конічної оболонки. Дана методика добре себе показала при розрахунку оболонок з малим кутом конусності. Проте при його збільшенні, геометрія конічної оболонки починає сильніше позначатися на її стійкості, і такий підхід стає неприйнятним [112]. Монографія І.О. Преображенського і В.З. Грищака [112] присвячена глибокому теоретичному та експериментальному аналізу стійкості та коливань конічних оболонок, головним чином неоднорідної структури, яка обумовлена змінністю товщини, наявністю ребер жорсткості та отворів. Застосовуються як чисельні, так і наближені аналітичні методи. Дослідження стійкості, НДС і власних коливань пологих конічних оболонок при різних видах навантаження та умов закріплення контуру із застосуванням чисельних методів надані в роботах [30, 159]. Завдяки відносній простоті виготовлення малогабаритних зразків, вітчизняними науковцями була виконана низка експериментальних досліджень та випробувань пологих конічних тонкостінних оболонок [166]. Експериментальні дослідження великої серії ортотропних конічних оболонок з круговими отворами надані в роботі [113].

Переважає більшість досліджень стосується стійкості оболонок при дії механічних навантажень. Проте, наявність температурного поля може значно впливати на поведінку оболонки, змінюючи її жорсткість, що потребує врахування цього факту при розрахунках. При цьому аналіз впливу температурних та термомеханічних навантажень на стійкість оболонок значно менше представлений в науковій літературі [193, 163, 13]. Експериментальні дослідження стійкості оболонок при наявності дії температурного поля висвітлено у відносно невеликій кількості робіт [40, 88]. В роботі [40] показано, що при дії температурного навантаження, наявні початкові недосконалості форми можуть як зменшувати, так і збільшувати величину критичної температури.



Незважаючи на розповсюдженість у практиці будівництва пружних оболонок складних неканонічних обрисів серединної поверхні та спряжених оболонок різної форми, відносно незначна кількість робіт присвячена дослідженням поведінки таких конструкцій. Оболонкові конструкції, що складені з елементів циліндричної і конічної форм, були розглянуті в роботах [191, 194, 135, 21].

Основні ідеї теорії досліджень ребристих оболонок були закладені ще наприкінці 40-х років минулого століття в роботах В.З. Власова [32] та А.І. Лур'є [94]. За обома підходами ребриста оболонка розглядається як конструкція, що складається з обшивки і пружних одновимірних елементів, які її підкріплюють. Вважається, що ребра взаємодіють з обшивкою (оболонкою) по лінії. Інший підхід до розрахунку ребристої оболонки ґрунтується на конструктивно-ортотропній моделі оболонки, коли жорсткості ребер рівномірно розподіляються («розмазуванні») по обшивці. Проте, врахування дискретного розміщення ребер дозволяє більш точно описати НДС конструкції [7]. В роботах В.В. Карпова [65] була розроблена теорія пологих оболонок ступінчасто-змінної товщини, що побудована з використанням узагальнених (розривних) функцій. Розрахункова модель враховує дискретне розташування ребер і вирізів, їх ширину тощо. Методика обмежена розглядом прямокутних за планом пологих панелей та замкнених циліндричних оболонок. В роботах М.О. Солов'я зі співавторами [69, 13] був запропонований та розроблений тривимірний підхід до розрахунку неоднорідних пружних оболонок, за яким тонка оболонка з ребрами, каналами, отворами та іншими особливостями за товщиною розглядається як тривимірне тіло ступінчасто-змінної товщини. Метод ґрунтується на геометрично нелінійних співвідношеннях термопружності та застосуванні моментної схеми скінченних елементів. За товщиною оболонка апроксимується одним універсальним просторовим скінченним елементом. Метод виявився ефективним при розв'язуванні статичних задач геометрично нелінійного деформування та стійкості тонких пружних неоднорідних оболонок, що знаходяться в умовах термомеханічного навантаження.

Важливим елементом аналізу поведінки оболонкових конструкцій є проведення модального аналізу. Задача визначення форм та частот власних коливань, як головних динамічних характеристик пружної системи, займає важливе місце у дослідженнях тонких оболонок. Особливості власних коливань тонких оболонок були розглянуті в багатьох роботах. Проте відомо, що дія навантажень на оболонку значно впливає на частоти та форми власних коливань конструкції [34, 39, 22, 148]. Факт рівності нулю найнижчої частоти власних коливань оболонки при критичному навантаженні надає можливість фіксувати втрату стійкості конструкції не тільки за статичним, а і за динамічним критеріями.

Основні методи та прийоми розрахунку коливань оболонок канонічних форм описані в роботі [22]. Вільні коливання гладких і ребристих оболонок вивчалися в роботах [243, 64, 144]. Експериментальні дослідження власних коливань оболонок з використанням методу голографічної інтерферометрії досліджено в роботах [152, 57].

Більшість наданих в літературі методик і підходів дослідження стійкості та власних коливань оболонок обмежені спрощеними лінійними підходами або орієнтовані на прості канонічні форми конструкції. Спрощення полягає у зведенні тривимірних задач до двовимірних [66] за рахунок використання класичних гіпотез теорії тонких оболонок, що не завжди дає змогу докладно і достовірно дослідити процес нелінійного деформування та момент втрати стійкості оболонок складної форми та структури. Використання тривимірного підходу дозволяє досліджувати оболонкову конструкцію на основі її реальних параметрів. При формуванні розрахункової моделі вводяться гіпотези загального характеру, наприклад, про пружність матеріалу, його анізотропні властивості тощо. Уточнена постановка задачі за рахунок врахування усіх нелінійних членів є важливою перевагою тривимірного підходу. Використання тривимірної теорії дає змогу розширити коло задач на нові класи оболонок складної форми. Різним аспектам застосування такого підходу присвячені роботи [13, 98, 56, 66].

Відновлення останнім часом інтересу до досліджень стійкості оболонкових конструкцій обумовлено не тільки появою нових перспективних матеріалів, а і з удосконаленням та розвитком обчислювальної техніки. До появи чисельних методів і масового використання ЕОМ, теорія стійкості оболонок розвивалася шляхом дослідження тонкостінних конструкцій на різні види навантажень за стандартною методикою [44]. За основу бралися рівняння пологих оболонок. Функція прогину оболонки апроксимувалась тригонометричним рядом, в якому втримувалася незначна кількість членів ряду. Розглядалася оболонка з малим числом ступенів свободи. Поява ЕОМ дала змогу уточнити отримані раніше розв'язки, збільшуючи кількість членів ряду. Розвиток обчислювальної техніки сприяє створенню нових уточнених методів аналізу поведінки оболонкових конструкцій. Важливе значення набуває розробка програмних комплексів (ПК), які є засобом практичного розв'язання поставленої проблеми. Метод скінчених елементів (МСЕ) є визнаним провідним методом дискретизації конструкції, який широко використовується для чисельного аналізу НДС, стійкості та коливань складних оболонкових систем. Використання МСЕ дозволяє із достатньою точністю наближати розрахункову дискретну модель до реального об'єкту, надаючи можливість для проведення розрахунку оболонкових систем відносно довільної форми при різних граничних умовах і зовнішніх навантаженнях. Цей метод виявився зручним інструментом для алгоритмізації та реалізації на ЕОМ. За використання МСЕ можуть розраховуватися різні об'єкти: стержневі, пластинчасті, оболонкові та комбіновані системи. Незважаючи на очевидні переваги МСЕ, основною складністю залишається вибір адекватної скінченно-елементної моделі, яка може точно описати не тільки геометрію, умови закріплення та навантаження, а і нелінійну поведінку конструкції.

Розділяють три основні форми МСЕ: метод сил, метод переміщень та змішаний метод. МСЕ у формі методу переміщень, який базується на використанні принципу Лагранжа, набув найбільшого розповсюдження. У методі переміщень основними невідомими є переміщення вузлів скінченних

елементів (СЕ). До переваг даного методу можна віднести досить простий алгоритм реалізації, прийнятна точність обчислень і стійкість розв'язків з гарантованою збіжністю. До недоліків відносять нижчу точність визначення напружень і переміщень. У методі сил основними невідомими виступають напруження. У цьому методі використовується принцип Кастиліано. Основним недоліком методу сил є відсутність простих і стійких алгоритмів, які забезпечують збіжність для низки задач. Змішаний метод ґрунтується на використанні функціоналу Рейсснера. За невідомі приймаються і напруження, і переміщення. Основні етапи розв'язання задачі згідно з МСЕ є: побудова матриць жорсткості; формування системи канонічних рівнянь, які відображають кінематичну сумісність розрахункової системи; розв'язання системи рівнянь і визначення значень вузлових навантажень; визначення компонентів НДС системи за знайденими вузловими переміщеннями. Зазвичай в сучасних комплексах, які реалізують схему МСЕ, усі етапи розв'язання задачі автоматизовані. Одним із стримуючих факторів розвитку МСЕ була необхідність розв'язування систем лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих. Ця проблема поступово вирішувалася розвитком методів розрахунку та за рахунок зростанням обчислювальних можливостей комп'ютерів. Сучасний розвиток МСЕ зосереджений на розробці нових уточнених СЕ, для зниження розмірності задач та використання скінченноелементних методик до розв'язання складних задач динаміки, стійкості з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності тощо [43].

Дослідженню нелінійного деформування, втрати стійкості неоднорідних оболонок складної форми та структури на основі МСЕ присвячено велику кількість робіт [13, 98, 41, 148, 18, 166, 132, 19, 93 та ін.].

На даний час для розрахунку конструкцій оболонкового типу в лінійній та нелінійній постановці використовуються СЕ різної конфігурації (плоскі, тривимірні), що різняться між собою геометрією, кількістю ступенів свободи у вузлах, інтерполяційними функціями серединної поверхні. Залишається певною мірою невирішеною проблема врахування деформації зсуву СЕ тонких оболонок

як жорсткого цілого [56, 41]. Для проведення досліджень нелінійного деформування, стійкості та власних коливань в роботі В.А. Баженова, О.П. Кривенко, М.О. Солов'я [13] був розроблений універсальний ізопараметричний просторовий СЕ, побудований на основі моментної схеми скінченних елементів (МССЕ), яка в свою чергу була розроблена, теоретично обґрунтована та підтверджена в роботах О.С. Сахарова [14, 98]. Використання МССЕ забезпечує вірне врахування жорстких зміщень для СЕ. Апроксимація оболонки за товщиною одним просторовим ізопараметричним скінченним елементом виявилася достатньою та дозволила уникнути помилкового завищення жорсткості, яке виникає при використанні декількох СЕ за товщиною оболонки.

Питанням реалізації МСЕ у вигляді обчислювальних комплексів, а також методикам та прийомам моделювання, оцінки збіжності розв'язків при розрахунку оболонкових систем з урахуванням їх нелінійної поведінки присвячена обмежена кількість робіт [13, 43, 107]. На теперішній час відомо не менше сотні різних ПК, які реалізують МСЕ у формі переміщень, але лише незначна частина з них можуть розраховувати задачі стійкості в геометрично нелінійній постановці. Умовно ПК поділяють на промислові, тобто широкого вжитку, які головним чином призначені для розрахунків інженерних задач практичного характеру, і на більш вузькоспеціалізовані, які вирішують питання науково-практичного характеру. Для масових ПК характерно використання розгалуженої бібліотеки СЕ для розв'язання широкого класу задач стержневих, пластинчастих, комбінованих систем, солід тіл та ін. При цьому СЕ, що використовуються, зазвичай розроблені на основі різних теорій (тонких оболонок, тонких і товстих пластин, стержнів тощо). Так, наприклад, у бібліотеках промислових розрахункових комплексах вітчизняних ПК ЛІРА-САПР [92] та SCAD [184] та зарубіжних NASTRAN [120], ANSYS [145] містяться велика кількість СЕ: стержневі; чотирикутні та трикутні елементи плити, мембрани, оболонки; просторові елементи у вигляді тетраєдрів, паралелепіпедів, восьмикутника загального вигляду; спеціальні елементи для

модельовання в'язей скінченої жорсткості, пружної піддатливості між вузлами, абсолютно жорсткі тіла тощо. Інший підхід демонструють комплекси наукового спрямування, які використовують, зазвичай, один або декілька універсальних СЕ з розробленою на його основі загальною методикою дослідження НДС просторових систем у фізично й геометрично нелінійних постановках, що перебувають під впливом статичного та динамічного навантаження. До них відносяться, наприклад, вітчизняна автоматизована система наукових досліджень (АСНД) «VESNA» [124], ПК «АПРОКС» [122] та «Мірела+» [68].

Загалом, дискретизація системи на скінченні елементи є задачею, яка за змістом близька до нанесення розрахункової сітки в методі кінцевих різниць або в варіаційно-різницевому методі. Виникає необхідність задовольнити дві вимоги: точність розрахунку, яка вимагає більшої густоти розрахункової сітки і практичне розв'язання задачі, яке накладає обмеження на кількість розв'язувальних рівнянь та відповідно кількість вузлів розрахункової моделі. Канонічні рівняння розв'язуються відомими методами розв'язання лінійних алгебраїчних рівнянь. Кількість вузлових невідомих при розв'язанні складних задач може досягати багатьох сотень тисяч, це і є однією з основних проблем МСЕ, втім, як і для будь-якого чисельного методу.

Для дослідження явища втрати стійкості, зазвичай, розглядають дві можливі моделі: біфуркаційну та модель стійкості деформованої схеми. Для першої підходу досліджується недеформована схема та розв'язується лінійна задача стійкості. Визначається критичне навантаження та форма втрати стійкості. Використання МСЕ приводить диференційну задачу до задачі на власні значення для матриць жорсткості. Другий підхід передбачає розв'язання статичної геометрично нелінійної задачі при послідовному збільшенні навантаження та побудові графіків «навантаження-прогин», за якими визначаються критичне навантаження та форма втрати стійкості.

В рамках сучасних чисельних методів для дослідження нелінійного деформування та стійкості набули розвитку крокові алгоритми, огляд яких міститься в монографії Е.І. Григолюка, В.І. Шалашиліна [47].

Ідея крокових методів ґрунтується на відстеженні поведінки системи при відносно малих приростах навантаження. Відповідно до крокового методу процес деформування подається, як послідовність рівноважних станів, і перехід з поточного стану в подальший встановлюється збільшенням навантаження, зміною граничних умов або розрахункової області тощо. Збіжність і точність результату визначається величиною кроку. Для підвищення ефективності крокових алгоритмів використовується метод продовження розв'язку за параметром [47, 140], який дозволяє проходити криву «навантаження-прогин», враховуючи її складну траєкторію в закритичній області і включаючи «петлі» та суміжні гілки розв'язку [13]. Для розв'язання систем нелінійних рівнянь використовують ітераційні процедури, найбільш вживаними серед яких є метод Ньютона–Рафсона та модифікований метод Ньютона–Канторовича. Дослідники визначають наявність недоліків методу Ньютона–Рафсона при розв'язанні окремих нелінійних статичних задач через погану визначеність лінеаризованих матриць жорсткості, коли окремі елементи матриць наближались до нескінченності, викликаючи проблеми зі збіжністю [106, 43]. Приведений в роботі [123] огляд існуючих алгоритмів розв'язування нелінійних задач показав, що найбільшу ефективність мають комбіновані алгоритми, які базуються на сполученні крокових та ітераційних процедур [13].

При розв'язанні задач нелінійного деформування пластин та оболонок у ПК ЛІРА-САПР [92] та SCAD [184] застосовуються два типи плоских оболонкових скінченних елементів – трикутний геометрично нелінійний універсальний 3-х вузловий СЕ оболонки № 342 та чотирикутний 4-х вузловий № 344. За допомогою цих елементів можна розраховувати тонкостінну конструкцію як: оболонку – застосовуються рівняння Кармана; мембрану – переміщення сталі за товщиною; оболонку з сильним згином – використовуються співвідношення теорії тонких оболонок. Варіант СЕ «оболонка із сильним згином» дає можливість досліджувати оболонки при переміщеннях незрівнянних з товщиною і підходить для дослідження стійкості тонких пружних оболонок при геометрично нелінійному деформуванні. Проте,

СЕ ПК ЛІРА-САПР та SCAD є плоскими елементами сталої товщини, які моделюють тривимірне тіло. Площина елемента апроксимує серединну поверхню оболонки або пластини. Апроксимація неоднорідних за товщиною та в плані оболонок плоскими СЕ № 342 та 344 потребує застосування спеціальних СЕ та прийомів моделювання. Для моделювання геометричних неоднорідностей за товщиною оболонки (наявність ребер або каналів), а також для ексцентричного з'єднання СЕ застосовуються, так звані, жорсткі вставки та пластини (ПК ЛІРА-САПР) та тверді тіла (ПК SCAD). Жорстка вставка задає кінематичний зв'язок між переміщеннями на ділянках ступінчасто-змінної товщини та поєднує пружну (деформівну) частину СЕ оболонки з вузлами цього ж СЕ, які є рівновіддаленими від СЕ на довжину жорсткої вставки.

З'єднання ексцентрично розташованих СЕ оболонки за допомогою введення пластин з дуже великою, але скінченою жорсткістю призводить до різкої втрати точності розрахунків через погіршення числа обумовленості матриці жорсткості. Використання жорстких вставок пластин дозволяє обійти ці обчислювальні труднощі. У цьому випадку матриця жорсткості оболонкового СЕ множиться на коефіцієнти, що враховують жорстку вставку, і таким чином отримуємо матрицю жорсткості СЕ з врахуванням ексцентриситету.

Жорстке (тверде) тіло в ПК SCAD – це СЕ спеціального типу, що має набір вузлів, відстані між якими для будь-якої пари вузлів залишаються незмінними. Абсолютно жорстке (тверде) тіло може розглядатися як граничний випадок деякого СЕ при наближенні жорсткісних характеристик цього елемента до нескінченності. Жорстке тіло наочно можна представити у вигляді «павука», який складається з одного ведучого вузла і багатьох ведених вузлів. Кожна пара вузлів (ведучий і ведений) може повністю чи частково зв'язуватися. При повному зв'язуванні всі переміщення ведених вузлів виражаються через переміщення ведучого вузла на основі теорем кінематики абсолютно твердого тіла. Використання в моделях жорстких тіл дозволяє змоделювати ексцентричне з'єднання СЕ оболонки, змоделювати виїмки та канали.



В ПК ЛІРА-САПР та SCAD система нелінійних рівнянь розв'язується за рекурентною послідовністю лінеаризованих рівнянь. Використовуються три крокові методи розрахунку нелінійних рівнянь: простий кроковий метод, простий кроковий метод з автоматичним вибором кроку, метод послідовних навантажень з врахуванням нев'язок за навантаженням, які реалізують модифіковані процедури Ньютонa. Особливість розрахунку на стійкість в геометрично нелінійній постановці полягає у зупинці крокової процедури при виродженні матриці жорсткості, внаслідок чого виникає неоднозначність при визначенні критичної точки і точки біфуркації. В останніх версіях ПК ЛІРА-САПР процес розрахунку був модифікований шляхом введення умовної в'язі у вузли для продовження розрахунку після втрати стійкості, що свідчить про продовження робіт по удосконаленню алгоритмів розрахунку геометрично нелінійних задач стійкості. Незважаючи на існуючі обмеження, шляхом проведення численних тестів автором була підтверджена можливість адаптації ПК ЛІРА-САПР та ПК SCAD для виконання порівняльного аналізу (звичайно у певних межах) задач нелінійного деформування, втрати стійкості та власних коливань тонких пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях.

В ПК ANSYS [145] для розв'язання геометрично нелінійних задач широко використовуються осесиметричний 2-х вузловий SE SHELL-208 та тривимірний 8-ми вузловий SE SHELL-281. Особливістю останнього є наявність 4-х вузлів на середині бокових гранях SE. Розв'язання задачі стійкості базується на використанні нелінійних рівнянь теорії оболонок Міндліна-Рейснера, що враховує зсувні деформації. В ПК NASTRAN [120] для дослідження геометрично нелінійного деформування тонких оболонок використовуються SE типу Plate, які враховують зсувні, мембранні, поперечні та згинальні зусилля. Чотирьох-вузловий SE Plate може мати змінну товщину сторін, що дозволяє моделювати неоднорідності геометрії оболонки. SE типу Laminate надає змогу моделювати багатошарову структуру матеріалу та його анізотропні властивості.

Для розв'язання нелінійних задач в ПК ANSYS та NASTRAN використовується методи Ньютона-Рафсона та метод оптимальної довжини дуги (Arc-length-метод). Метод Arc-length є досить поширеним методом продовження розв'язку за параметром, який дає змогу аналізувати докритичну та закритичну поведінку тонкостінних оболонок. Як параметр продовження розв'язку використовується довжина вздовж кривої «навантаження-прогин». У процесі розв'язування задачі з використанням методу Arc-Length відбувається автоматична зміна зовнішнього навантаження для отримання переміщення на кожному кроці ітерації. Кроки щодо збільшення деформації є адаптивними, з метою забезпечення збіжності розв'язку при різкій зміні характеру нелінійного деформування. Як результат розрахунку при поетапному навантаженні оболонки будуються залежності «навантаження-прогин», на основі аналізу яких визначається значення критичного тиску. Для графіків характерним є «проклацування» оболонки до закритичного рівноважного стану.

Відносна доступність та висока практичність зарекомендували зазначені ПК як ефективні інструменти для дослідження наукових задач нелінійного деформування конструкцій. Значна частина сучасних робіт вітчизняних дослідників присвячена аналізу нелінійної поведінки оболонкових систем із використанням промислових ПК [19, 177, 146]. Незважаючи на очевидні переваги: повноту бібліотеки SE, використання потужного математичного апарату, широкі обчислювальні можливості та автоматизацію процесів моделювання та розрахунку, промислові ПК не дають змогу достатньо повно використовувати їх для глибокого наукового аналізу нелінійної поведінки тонких пружних неоднорідних оболонок. При наявності спеціалізованих SE та кроково-ітераційних алгоритмів розрахунку нелінійної задачі стійкості більшість сучасних ПК, зазвичай, одночасно не враховують важливі специфічні аспекти аналізу нелінійної поведінки оболонки: анізотропну структуру матеріалу оболонки, особливості неоднорідності геометрії оболонки, закритичну поведінку, точки біфуркації, переднапружений стан при модальному аналізі та інше. Тому саме для проведення комплексних наукових досліджень нелінійного

деформування, стійкості та власних коливань серед чисельних підходів переважним є використання універсальних просторових СЕ та побудованих на їх основі загальних методик розрахунку [13].

## **1.2 Проблеми побудови розрахункових схем для моделювання багат шарових оболонок, виготовлених з композитних матеріалів**

Останніми десятиліттями в різних галузях техніки та промисловості невпинно зростає частка використання багат шарових пластин і оболонок, виготовлених із композитних матеріалів (КМ). Широке використання композитів пов'язано з низкою ефективних властивостей, які вигідно відрізняють їх від класичних традиційних матеріалів. Основною особливістю композитів є можливість їх моделювання із наперед визначеними корисними властивостями. Завдяки цим властивостям саме використання композитів дає можливість створювати оболонкові конструкції, які у більшості випадків можуть забезпечити їх жорсткість, міцність, стійкість до агресивних зовнішніх впливів, низьку питому вагу, вартість тощо. В першу чергу це стосується оболонок, шари яких виготовлені з волокнистих композитних матеріалів. Композитні матеріали в сучасному розумінні це неоднорідні системи з двох або більше компонентів, які поєднані у єдину сполуку із матеріалів з різними характеристиками окремих компонентів [85]. В загальному випадку одну з цих компонент називають матрицею, а інші – включеннями або армуючим. Найбільш поширеними типами армуючих є волокна, пасма, гранули, тканини тощо. В першу чергу класифікація КМ відбувається за типом структурних компонентів: волокнисті, шаруваті, дисперсно-зміцнені [142].

Односпрямовані волокнисті матеріали мають широке застосування і характеризуються винятковою жорсткістю та міцністю у напрямку волокон. Проте у поперечному напрямку ці характеристики є значно гіршими. Найчастіше використовуються скляні, металеві, борні та вуглецеві волокна діаметром від декількох мкм [76].

На практиці значного поширення набули вуглецеві волокна – полікристалічні речовини з високим ступенем орієнтації структури [118]. Важливою особливістю вуглецевих волокон є достатня сполучність волокон з матрицею. Основними перевагами вуглецевих волокон є їхня вища, порівняно зі скляними волокнами, жорсткість і висока теплостійкість. Так, коефіцієнт лінійного розширення односпрямованих вуглепластиків у поздовжньому напрямку близький до нуля, або навіть є від'ємним, тому конструкції з вуглепластику зберігають свої розміри при температурному впливі.

Матриця, її ще називають в'язучим чи заповнювачем, заповнює простір між волокнами та забезпечує монолітність композиту, фіксує форму виробу і взаємне розташування армуючих волокон, розподіляє напруження, що діють, за об'ємом матеріалу, перерозподіляє рівномірне навантаження на волокно при руйнуванні частини волокон. Для односпрямованих КМ матеріалом матриці найчастіше є полімерні смоли з епоксидної та поліамідної груп.

Властивості та характеристики композиту визначаються чотирма основними параметрами: міцністю волокон, жорсткістю матриці та міцністю зв'язку матриці і волокна, концентрацією волокон в матриці. Співвідношення цих параметрів характеризує весь комплекс механічних властивостей матеріалу при умові міцного зв'язку між компонентами. При побудові та отриманні штучно створюваного односпрямованого волокнистого КМ його пружні характеристики можна передбачити виходячи з властивостей складових компонентів [77, 76]. За рахунок оптимального підбору характеристик компонентів (матеріалу матриці, розмірами, напрямком, схемою укладки волокон та їх частотою) можливе керування механічними властивостями всього композиту з метою створення матеріалу із наперед визначеними необхідними характеристиками.

Фундаментальним питанням механіки композитів є розробка методів гомогенізації та континуалізації, які дозволяють проводити аналіз механічної поведінки композитів на мікро- та макрорівнях. Під гомогенізацією розуміється заміна реальної мікроструктури композиту на еквівалентний матеріал з так

званими ефективними пружними характеристиками. Тобто неоднорідний КМ подається моделлю однорідного анізотропного матеріалу, характеристики якого залежать від характеристик компонентів. Принцип гомогенізації широко використовується в механіці композитів при дослідженні різноманітних задач статички, динаміки, стійкості та руйнування КМ і детально описаний в 12-ти томному виданні під ред. О.М. Гузя [99]. На теперішній час розроблена значна кількість мікромеханічних моделей КМ, які враховують особливості їх структурних елементів. Детальний історичний огляд розвитку механіки композитів наданий в статті С.Т. Herakovich [161].

Через складність математичних постановок аналітичних підходів, серед наближених методів визначення ефективних механічних характеристик КМ поширення набули асимптотичні варіаційні підходи та чисельні методики із використанням тривимірних скінченноелементних моделей для побудови, так званого, представницького елемента матеріалу. Детальний огляд цих методів міститься в монографії [71]. В теперішній час продовжуються інтенсивні розробки методик прогнозування ефективних характеристик КМ, серед яких виділяються роботи з визначення ефективних коефіцієнтів термічного розширення [95, 156, 72]. Ці задачі є складнішими за задачі щодо визначення пружних характеристик.

Для зручності проектування, основні перевірені практикою мікромеханічні методики для різноманітних волокнистих матеріалів зведені у вигляді довідників під редакцією Д.М. Карпиноса [77], В.В. Васильєва та Ю.М. Тарнопольського [76] та узагальнюючих праць М. Річардсона [118], В.Д. Agarwal [143].

Методи розрахунку багатошарових композитних конструкцій є значно складнішими ніж об'єктів однорідної структури. Проблема розв'язання основних задач механіки оболонок, виготовлених із КМ, спонукає на розвиток досліджень, спрямованих на створення нових і вдосконалення існуючих методів дослідження оболонок неоднорідної структури. Вагомий внесок у розвиток КМ, у теорію і методи розрахунку оболонок неоднорідної багатошарової структури

зробили М.О. Алфутов [3], С.О. Амбарцумян [4], В.А. Баженов [14, 116] В.В. Болотін [25], Г.А. Ванін [29, 28], В.В. Васильєв [76], В.В. Гайдайчук [133] Е.І. Григолюк [46, 45], Я.М. Григоренко [49], О.М. Гузь [99], В.І. Гуляєв [133], С.Г. Лехницький [90], В.Г. Пискунов [108], О.О. Рассказов [115], Р.Б. Рикардс [117], О.С. Сахаров [14], В.М. Трач [15], J.N. Reddy [181] та багато інших вчених.

Загально прийнятим для вітчизняних дослідників є поділ основних підходів до розрахунку багатошарових конструкцій на теорії, що побудовані на використанні методу гіпотез, та теорії, що спираються на аналітичні методи приведення тривимірної задачі пружності до задачі теорії оболонок [14]. В свою чергу в методі гіпотез використовують також два підходи, перший з яких використовує певні гіпотези для одного шару (дискретно-структурний підхід) [46, 116, 31], а другий – полягає у використанні єдиних статичних та кінематичних гіпотез вже для всього пакету шарів (структурно-безперервний) [4, 108, 115]. Дискретно-структурний підхід часто застосовується при розрахунках багатошарових конструкцій з міжшаровими дефектами (розшаруваннями). Підхід, заснований на використанні гіпотез для всього пакету шарів, не залежить від кількості шарів, вважається, що структурно-безперервний підхід коректно використовувати для тонких оболонок із слабкою анізотропією матеріалу та шарами одного порядку жорсткості.

Значного розвитку у вітчизняних наукових дослідженнях задач механіки багатошарових оболонок отримали методики, які реалізують моментну схему скінченних елементів. Так, в монографії [14] викладена ітераційно-аналітична теорія багатошарових оболонок, побудовані алгоритми дослідження процесів руйнування та нелінійного деформування оболонок під дією статичних і динамічних навантажень. У роботах [13, 11] на основі співвідношень тривимірної теорії термопружності та із використанням МСЕ у формі моментної схеми надано метод дослідження задач геометрично нелінійного термопружного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок з геометричними особливостями за товщиною.

Значна увага приділяється дослідженню стійкості композитних оболонок [15, 126]. Так в монографії [15] викладена чисельно-аналітична методика дослідження задач стійкості анізотропних багатошарових оболонок обертання нульової, додатної та від'ємної гаусової кривизни. Розглядаються процеси нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки циліндричних, конічних та торосферичних оболонок. Розв'язок задачі нелінійної теорії анізотропних оболонок ґрунтується на чисельному методі дискретної ортогоналізації та методі Бубнова-Гальоркіна.

Зростає кількість праць з дослідження теплового впливу на НДС у шаруватих композитних конструкціях. В роботі [73] запропонована скінченноелементна методика розв'язання задач теплопровідності для конструкцій з анізотропних матеріалів із урахуванням впливу теплофізичних характеристик на розподіл температури поля по товщині пакета. В роботах [149, 74, 192] представлена розроблена на основі мометної схеми скінченних елементів методика розрахунку зв'язаної задачі термопружності конструкцій з еластомерних композитів. Різним аспектам дослідження впливу температурного поля на поведінку багатошарових композитних оболонок, а саме виявлення концентраторів внутрішньоструктурних термонапружень та термопошкоджень в оболонкових конструкціях через їх структурну неоднорідність і несумісність термомеханічних параметрів їх фаз КМ присвячена низка робіт [141, 53, 33].

### **1.3 Вибір напрямку досліджень**

Наведений короткий огляд сучасного стану досліджень оболонкових конструкцій показав наявність значного наукового інтересу до тематики аналізу стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури при дії термомеханічних навантажень. Можна зробити висновок, що ускладнення геометричних форм оболонкових конструкцій, їх багатошарової структури, широкого впровадження КМ, наявність термомеханічного навантаження визначають як актуальність, так і незавершеність розглядуваної задачі.

Найбільш ефективним у дослідженні різних аспектів поведінки оболонок є використання нелінійної тривимірної теорії термопружності із застосуванням співвідношень МССЕ. Це дає можливість створювати уточнені моделі розрахунку на базі використання універсальних тривимірних скінченних елементів. Ставиться завдання розробки скінченноелементного методу комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження. При цьому, важливим є розробка в рамках скінченноелементної моделі оболонки, яка застосовується, нової розширеної версії універсального тривимірного скінченного елемента, який призначений для опису багат шарового односпрямованого волокнистого КМ. Разом з цим зростає важливість визначення динамічних характеристик оболонок, таких як власні частоти і форми коливань, з урахуванням переднапруженого стану, особливо для визначення точок біфуркації та моменту втрати стійкості конструкції за статичним і динамічним критеріями.



## РОЗДІЛ 2

### ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ, СТІЙКІСТЬ ТА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК УСКЛАДНЕНОЇ СТРУКТУРИ ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

#### 2.1 Вихідні положення та гіпотези дослідження багат шарових композитних оболонок ступінчасто-змінної товщини при термомеханічних навантаженнях

Методика розв'язання задач статки та динаміки складних тонкостінних оболонкових конструкцій базується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності [23, 103] та методі скінченних елементів у формі моментної схеми [11, 13, 80, 81, 98, 169]. Відповідно до прийнятого підходу, побудова на основі співвідношень теорії термопружності розв'язувальних рівнянь з визначення поведінки неоднорідної оболонки, здійснюється з використанням апарата тензорного числення [23]. Приймається, що індексам латинського алфавіту приписується значення  $i = \overline{1, 3}$ ; індексам грецького алфавіту – значення  $\alpha = \overline{2, 3}$ ; індекси, що відносяться до декартової системи координат, мають штрих ( $k' = \overline{1, 3}$ ); за індексами, що повторюються, виконується підсумовування, а для індексів у дужках воно не проводиться.

Розглядаються тонкі та середньої товщини пружні оболонки, які мають складну форму серединної поверхні та геометричні і фізичні особливості за товщиною (рис. 2.1). Вони знаходяться під дією статичного механічного (силового), температурного і спільного термомеханічного навантаження. Такі оболонки будемо називати неоднорідними або ускладненої структури [80].

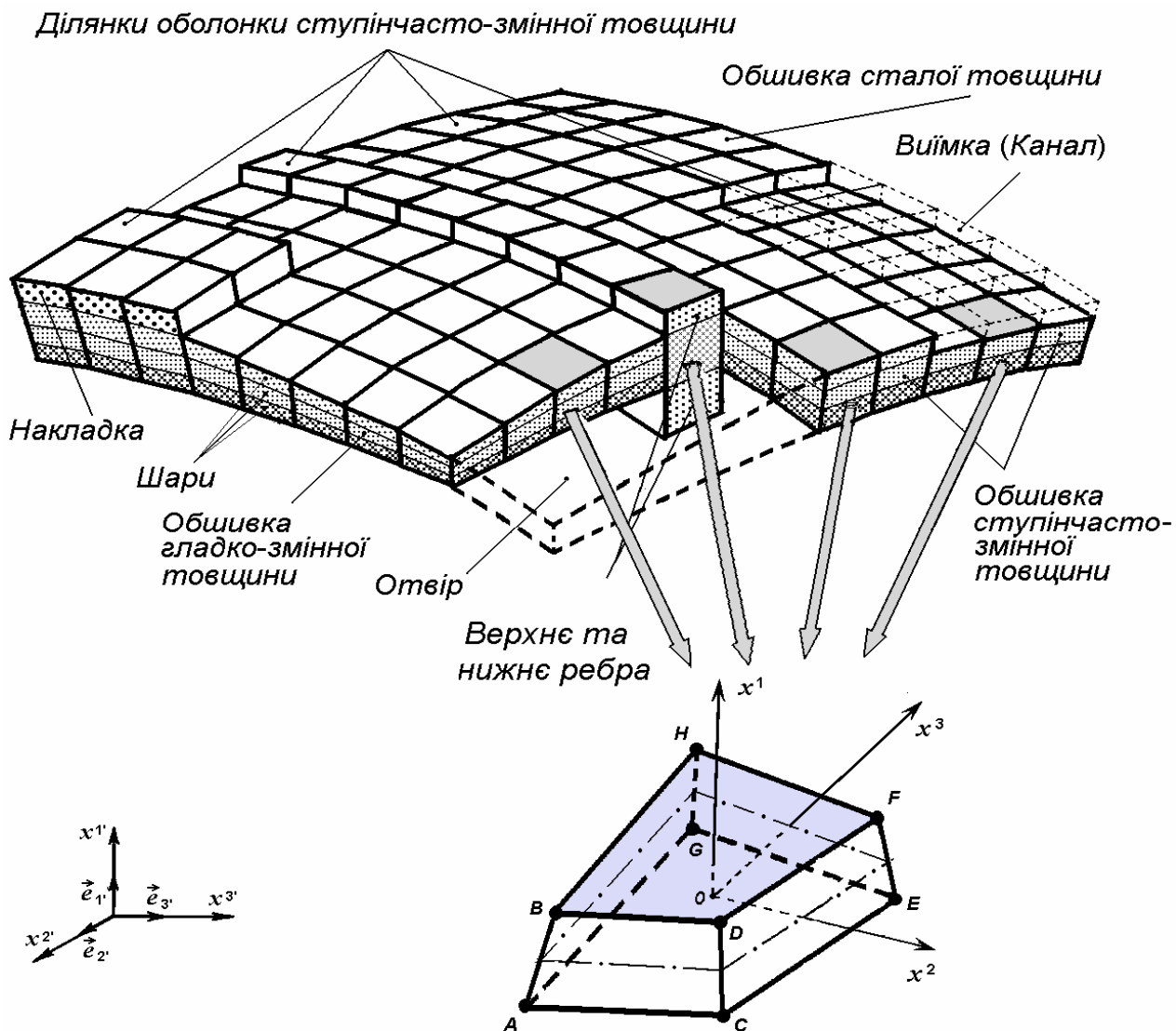


Рис. 2.1. Апроксимація оболонки неоднорідної структури універсальним скінченним елементом

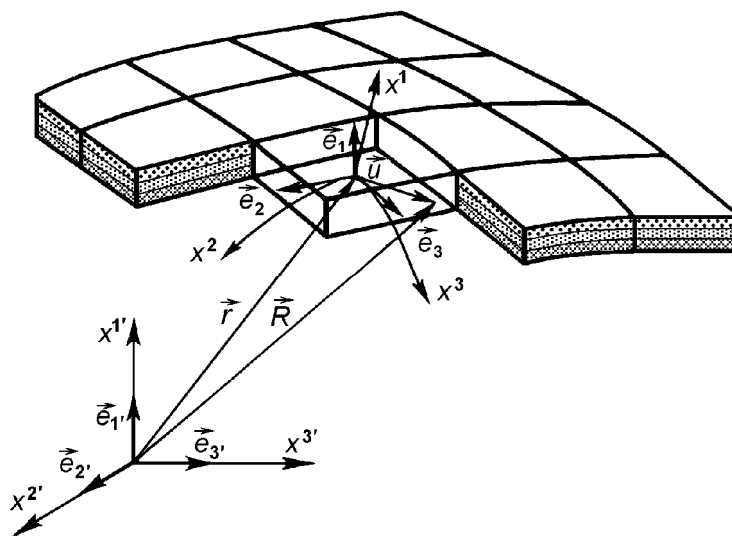


Рис. 2.2. Глобальна декартова і місцева криволінійна системи координат

Отже, до класу оболонок, які досліджуються, відносяться тонкі гнучкі оболонки складної форми серединної поверхні (необов'язково канонічної), яка в цілому може мати зламами. Оболонки можуть бути сталої, гладко-змінної та ступінчасто-змінної товщини, з отворами, багат шаровими тощо. Ділянки оболонки ступінчасто-змінної товщини складаються з обшивки, ребер, накладок, каналів, виїмок, отворів. «Обшивка» – це тіло оболонки без урахування геометричних особливостей в напрямку товщини.

Методика аналізу процесів нелінійного деформування оболонок базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах [13, 98]. Такий підхід надає можливість ще на початку побудови методики виконати дискретизацію континуальної оболонки, застосувавши метод скінченних елементів (МСЕ).

Для побудови співвідношень, що визначають напружено-деформований стан (НДС) конструкції, відповідно до положень МСЕ використовується дві системи координат: фіксована (глобальна) і місцева (локальна) криволінійна (рис. 2.2), де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки тіла оболонки,  $\vec{u}$  – вектор переміщення точки в процесі деформування,  $\vec{R}$  – радіус-вектор, що характеризує її нове положення.

Як глобальна (ейлерова) застосовується декартова система координат  $x^{k'}$  з базисом  $\vec{e}_{k'} = \partial \vec{r} / \partial x^{k'}$ , яка є незмінною у процесі деформування і тому є системою відліку. Звичайно, в декартовій системі координат  $x^{k'}$  спрощується опис геометрії, граничних і початкових умов, задавання навантаження, фізико-механічних властивостей матеріалів; полегшується побудова розв'язувальних рівнянь і реалізація алгоритмів; природним шляхом здійснюється поєднання пластин і оболонок у пластинково-оболонкову систему.

Місцева криволінійна (лагранжева) система координат  $x^i$  з базисом  $\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial x^i$ , пов'язана з тілом оболонки і змінюється разом із оболонкою в процесі деформування. Прийнято, що вісь  $x^1$  місцевої системи координат спрямована за її товщиною. В цій системі координат  $x^i$  спрощується опис НДС

оболонки та зручно і компактно подаються співвідношення теорії термопружності. Вибір місцевої системи координат виконується окремо для кожної скінченно-елементної моделі оболонки і безпосередньо пов'язаний з розбиттям її на скінченні елементи, тобто з лініями сітки поділу оболонки на скінченні елементи.

У будь-який момент часу (у будь-який момент крокового навантаження), положення матеріальної точки тіла оболонки визначається за допомогою радіус-вектора  $\vec{r}$  у глобальній декартовій та локальній лагранжевій системах координат, відповідно, [23]:

$$\vec{r} = \vec{r}(x^{k'}) = \vec{r}(x^i). \quad (2.1)$$

Отже, передбачається, що під час деформування в будь-який момент у кожній точці оболонки існує взаємно однозначна відповідність між глобальною і місцевою системами координат. Ця відповідність встановлюється за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$C_{k'}^i = C^{ik'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad C_i^{k'} = C_{k'i} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}. \quad (2.2)$$

Для цього необхідно і достатньо, щоб якобіан, який складений для цих функцій, тотожно не дорівнював нулю  $J = \left| \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \right| \neq 0$ . Між функціями (2.2)

існують залежності

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{n'}} = \delta_{n'}^{k'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad (2.3)$$

де  $\delta_j^i$  – символи Кронекера:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.4)$$

У результаті деформування оболонки, її довільна точка набуває переміщення  $\vec{u}$  та приймає положення нового радіус-вектора  $\vec{R}$  (рис. 2.2):

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}. \quad (2.5)$$

Розглядається модель пружного суцільного середовища при великих переміщеннях і малих деформаціях. Переміщення довільної точки визначаються компонентами  $u^{k'}$  в декартовій системі координат. Тоді компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат  $\varepsilon_{ij}$  мають лінійні та нелінійні складові відносно переміщень і визначаються тензором скінченних деформацій Коші–Гріна:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{lin} + \varepsilon_{ij}^{nel} = \frac{1}{2} \left( C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j}. \quad (2.6)$$

Для малих переміщень підкреслений доданок  $\varepsilon_{ij}^{nel}$  у (2.6) не враховується.

В цьому випадку розглядається геометрично лінійна задача. Зв'язок компонент деформацій та переміщень визначається тензором нескінченно малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{lin} = \frac{1}{2} \left( C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right). \quad (2.7)$$

У випадку дії термомеханічних навантажень деформації (2.6) складаються з двох компонентів: пружних  $\varepsilon_{kl}^e$  і температурних  $\varepsilon_{kl}^T$ . Вони подаються так:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T. \quad (2.8)$$

Деформації (2.8) називаються повними [5, 103, 114].

Поява в тілі пружних деформацій  $\varepsilon_{kl}^e$  викликана наявністю внутрішніх напружень  $\sigma^{ij}$ . При малих пружних деформаціях зв'язок між компонентами тензорів  $\sigma^{ij}$  та  $\varepsilon_{kl}^e$  визначається узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.9)$$

де  $C^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталей, які є симетричними щодо першої та другої пари індексів, а також щодо сусідніх індексів у середині першої та другої пар відповідно до рівностей [23]:

$$C^{ijkl} = C^{klij} = C^{jikl} = C^{klji} = C^{ijlk} = C^{lkij} = C^{jilk} = C^{lkji}. \quad (2.10)$$

У загальному випадку анізотропного матеріалу є 21 незалежна компонента.

Поява в тілі температурних деформацій  $\varepsilon_{kl}^T$  викликана зміною початкової температури тіла  $T_0$  на величину  $T$ . Температурні деформації визначаються як деформації вільного від внутрішніх напружень елементарного об'єму:

$$\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} T, \quad (2.11)$$

де  $\alpha_{kl}$  – компоненти тензора коефіцієнтів термічного розширення [114] (або компоненти тензора теплового розширення [103]). Розглядається усталений температурний процес. Тому вважається, що температурне поле  $T = T(x^i)$  за об'ємом оболонки є заданою (відомою) та незалежною від НДС функцією координат. Тобто задача є незв'язаною.

Враховуючи (2.8), узагальнений закон Гука (2.9) набуває вигляду узагальненого закону Дюамеля-Неймана [103]:

$$\sigma^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} - \sigma^{ijT} = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T), \quad (2.12)$$

де

$$\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.13)$$

– складова напружень, які залежать від повних деформацій,

$$\sigma^{ijT} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T \quad (2.14)$$

– складова напружень, які залежать від температурних деформацій.

З геометричної точки зору тонка багатошарова оболонка подається як тривимірне тіло. Оболонка складається з довільної кількості  $m$  загалом анізотропних шарів. Шари жорстко з'єднані між собою, утворюючи монолітну структуру (пакет) без проковзування та відшарування. Матеріали шарів вважаються лінійно-пружними, характеристики яких відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана (2.12).

Для моделювання анізотропних властивостей матеріалу оболонки в роботі [13] використовуються моделі ізотропного, трансверсально-ізотропного та

ортотропного матеріалу, які відносяться до традиційних матеріалів. В даній роботі метод поширено на використання в шарах оболонки композитного матеріалу, зокрема безперервного односпрямованого волокнистого [61, 82, 84].

При скінченноелементній дискретизації оболонка, яка розглядається як тонке тривимірне тіло, за товщиною моделюється одним тривимірним скінченним елементом (СЕ) (рис. 2.1) [13]. Використовується 8-ми вузловий тривимірний ізопараметричний СЕ. За невідомі приймаються вузлові переміщення скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО) на обмежувальних поверхнях у глобальній декартовій системі координат. Для тонкої оболонки характерним є лінійний розподіл переміщень за товщиною [104]. Тому апроксимація координат і переміщень в об'ємі СЕ реалізується за полілінійним законом [11, 13, 56, 80, 81, 98, 150, 169].

Прийнятий для тривимірного ізопараметричного СЕ оболонки лінійний розподіл координат і переміщень за товщиною, відповідає неklasичній гіпотезі деформівної прямої, що використовується у роботах [11, 13, 80, 81, 169]. Згідно з гіпотезою пряма, яка до деформування є прямою у напрямку товщини оболонки, залишається прямою і після деформування, при цьому подовжуючись або скорочуючись. Ця пряма напрямлена за товщиною СЕМО. Вона не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні обшивки (рис. 2.2). Прийняті лінійні апроксимації координат і переміщень в об'ємі СЕ оболонки, дають змогу поширити методику розрахунку гладкої оболонки на оболонки з різними геометричними неоднорідностями за товщиною. Це досягається за рахунок лінійного перетворення координат і переміщень вузлів тривимірного СЕ за допомогою двох додаткових геометричних параметрів [13]. Перший додатковий параметр призначений для збільшення або зменшення розмірів СЕ за товщиною, другий – для зсуву в тому ж напрямку його серединної поверхні.

Для врахування особливостей НДС оболонки, застосовується статична гіпотеза щодо сталості напружень обтиснення  $\sigma^{11}$  за товщиною  $n$ -го шару [13, 98, 150]:

$$\partial \sigma_n^{11} / \partial x^1 = 0, \quad (2.15)$$

де  $n \leq m$ ,  $n$  – номер поточного шару;  $m$  – кількість шарів в СЕ; надалі це пояснення буде опускатися. Прийнята гіпотеза (2.15) є слабкішою, ніж класична гіпотеза  $\sigma^{11}=0$ , а її застосування не позбавляє напружений стан оболонки тривимірних властивостей.

Накладена статична гіпотеза (2.15) вимагає корегування узагальненого закону Дюамеля-Неймана (2.12). Для цього в  $n$ -му шарі, компоненти тензора напружень  $\sigma_n^{ij}$  подаються як лінійні функції за місцевою координатою  $x^1$ :

$$\sigma_n^{ij}(x^p) = \sigma_n^{ij}(x^\eta) + \sigma_n^{ij}(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1), \quad (p = \overline{1,3}; \eta = 2,3), \quad (2.16)$$

де  $x_{O_n}^1$  – місцева координата  $x^1$  серединної поверхні шару  $n$ ;

$$\sigma_n^{ij}(x^\eta) = \left( \sigma_n^{ij}(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1} = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^{e0}{}_{kl}(x^\eta), \quad (2.17)$$

$$\sigma_n^{ij}(x^\eta) = \left( \frac{\partial \sigma_n^{ij}(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1} = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^{e1}{}_{kl}(x^\eta), \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_n^{e0}{}_{kl}(x^\eta) = \left( \varepsilon_n^{e}{}_{kl}(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}, \quad \varepsilon_n^{e1}{}_{kl}(x^\eta) = \left( \frac{\partial \varepsilon_n^{e}{}_{kl}(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}; \quad (2.19)$$

$C_n^{ijkl} = \text{const}$  в об'ємі  $n$ -го шару СЕ.

Узагальнений закон Дюамеля-Неймана (2.12) на підставі прийнятої статичної гіпотези (2.15), подання (2.16) та після деяких перетворень зводиться до вигляду [13]:

$$\sigma_n^{ij}(x^p) = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^{e0}{}_{kl}(x^\eta) + B_n^{ijkl} \varepsilon_n^{e1}{}_{kl}(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1), \quad (2.20)$$

де коефіцієнти

$$B_n^{ijkl} = C_n^{ijkl} - C_n^{ij11} C_n^{11kl} / C_n^{1111} \quad (2.21)$$



є відкорегованими в шарі  $n$  компонентами тензора пружних сталих  $C_n^{ijkl}$ .

Звідси отримуються вирази для відкорегованих з урахуванням статичної гіпотези складових напружень  $\bar{\sigma}_n^{ij}$  (2.13), що залежать від повних деформацій та

напружень  $\sigma_n^{Tij}$  (2.14), що залежать від температурних деформацій. Маємо:

$$\bar{\sigma}_n^{ij}(x^p) = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^0(x^\eta) + B_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^1(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1), \quad (2.22)$$

$$\sigma_n^{Tij}(x^p) = C_n^{ijklT} \varepsilon_{kl}^0(x^\eta) + B_n^{ijklT} \varepsilon_{kl}^1(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1), \quad (2.23)$$

де

$$\varepsilon_{kl}^0(x^\eta) = \left( \varepsilon_{kl}(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}, \quad \varepsilon_{kl}^1(x^\eta) = \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}, \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{kl}^0(x^\eta) = \left( \varepsilon_{kl}^T(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}, \quad \varepsilon_{kl}^1(x^\eta) = \left( \frac{\partial \varepsilon_{kl}^T(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}. \quad (2.25)$$

## 2.2 Універсальний тривимірний скінченний елемент та моментна схема скінченних елементів у задачах термомеханічного деформування тонких пружних оболонок неоднорідної структури

На базі прийнятих положень використовується уніфікований підхід, який спирається на ідею використання для моделювання неоднорідних оболонок єдиного універсального тривимірного СЕ та побудові на цій основі єдиної розрахункової моделі оболонки ступінчасто-змінної товщини. Використовується СЕ, який призначений апроксимувати ділянки тонкої оболонки з різними видами конструктивних особливостей (рис. 2.1), а також враховувати можливість виконання обшивки, ребер, накладок тощо, з різних багат шарових матеріалів.

Скінченноелементна модель неоднорідної оболонки приймається у вигляді регулярної топологічної структури, що значно спрощує побудову алгоритму розв'язування задачі [13, 98]. Розглядається оболонка достатньо загального вигляду (рис. 2.1), змінна товщина якої визначається її обмежуючими поверхнями: гладкими, ступінчасто-гладкими та зі зламами. Оболонка, виходячи з прийнятих положень, розглядається як тривимірне тіло. На всіх ділянках оболонка за товщиною апроксимується одним універсальним тривимірним скінченним елементом. Задаючи різні значення геометричних параметрів, СЕ можна: зробити сталої або змінної товщини; збільшити або зменшити його розмір за товщиною для моделювання ділянок з ребрами або каналами; розташовувати ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки. Серединна поверхня обшивки оболонки зазвичай приймається за поверхню відліку, хоч у загальному випадку вона може з нею не збігатися.

Для кожного СЕ запроваджується місцева (локальна) система координат  $x^i$  з такою метрикою, щоб відстані між найближчими вузлами сіткової області за всіма координатними напрямками (у масштабах цих напрямків), дорівнювали одиниці (рис. 2.3; рис. 2.4), а у самих вузлах вони набували значень  $\pm 1/2$ . Початок системи координат  $x^i$  знаходяться в центрі СЕ точці  $O$  зі значеннями  $x^i = 0$ . Отже, введені в такий спосіб місцеві безрозмірні координати  $x^i$  в кожному СЕ є такими, що  $-\frac{1}{2} \leq x^i \leq +\frac{1}{2}$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ). При цьому приймається, що вісь координат  $x^1$  спрямована вздовж товщини оболонки, але відповідно до кінематичної гіпотези не обов'язково вздовж нормалі до її серединної поверхні.

Введену в такий спосіб місцеву систему координат СЕ, можна трактувати як топологічне відображення області, що займає елемент, на куб з одиничними ребрами (рис. 2.3; рис. 2.4, б).

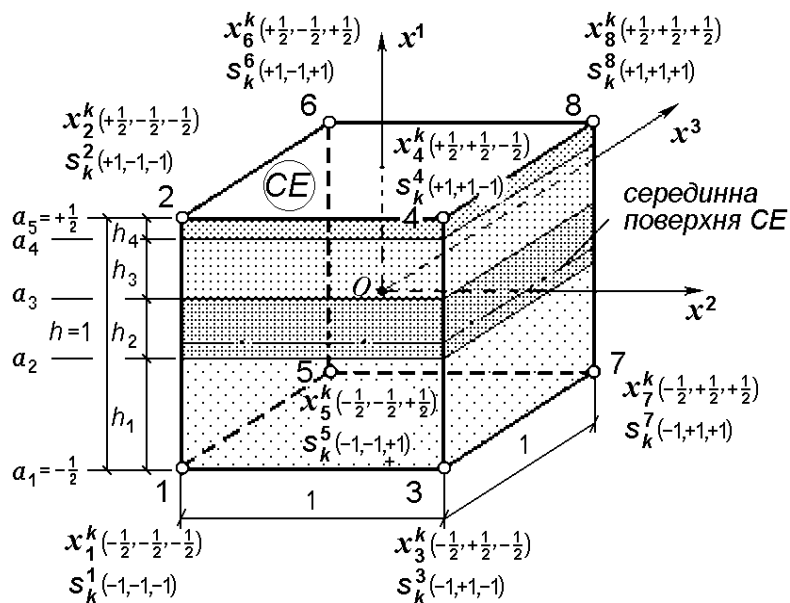


Рис. 2.3. Топологічна модель багатошарового (4-ри шарового) тривимірного CE

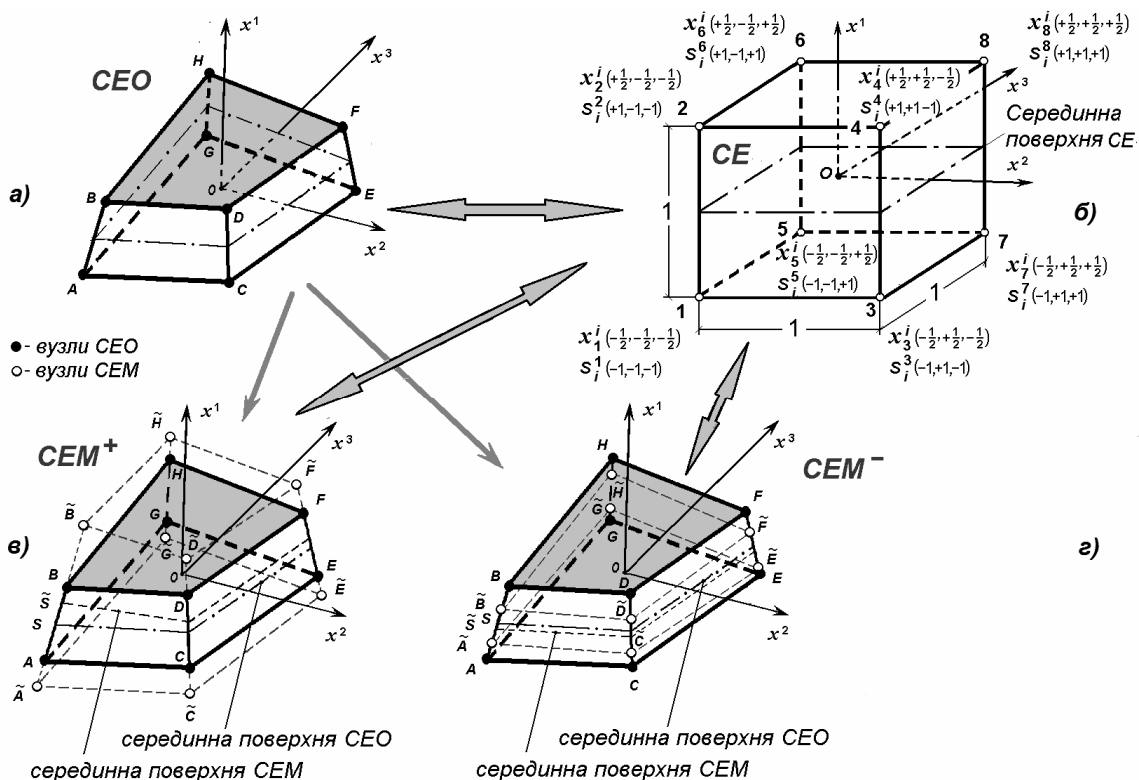


Рис. 2.4. Трансформація універсального тривимірного CE

Прийняте подання місцевої системи координат спрощує обчислення метричних характеристик оболонки при чисельній реалізації. Контакт елементів здійснюється вздовж їх граней у вузлових точках. Це надає можливість природним шляхом моделювати злами серединної поверхні оболонки (рис. 2.5).

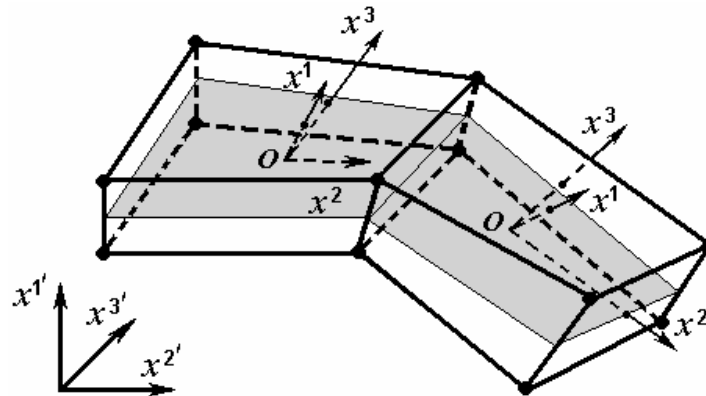


Рис. 2.5. Моделювання зламу серединної поверхні СЕМО

На основі прийнятих положень, застосовується тривимірний ізопараметричний скінченний елемент з полілінійними функціями форми:

$$\{x^{i'}: u^{i'}\}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} F(x^k, s_k) \{x^{i'}: u^{i'}\}_{s_1 s_2 s_3},$$

$$F(x^k, s_k) = \prod_{k=1}^3 \left( s^{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.26)$$

де

$s_i = \text{sign}(x_{s_1 s_2 s_3}^i)$  – умовні (сіткові) лагранжеві координати вузлів СЕ (рис. 2.4, б);

$x_{s_1 s_2 s_3}^i = \pm \frac{1}{2}$  – нормалізовані місцеві координати вузлів СЕ;

$x_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  та  $u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  – відповідно, задані (відомі) значення координат вузлів СЕ

та шукані (невідомі) значення переміщень цих вузлів в декартовій системі координат;

позначення « : » є логічним оператором «або», який вказує на необхідність вибору одного з елементів, зазначених у фігурних дужках.

За цими формулами (2.26) легко обчислити усі похідні в аналітичному вигляді, які необхідні для побудови СЕМО, що створюється.

У загальному випадку, тривимірний СЕ геометрично є восьмикутним шестигранником з криволінійними обмежувальними поверхнями у вигляді косокутних гіпарів. Вузлові точки СЕ розташовуються у вузлах обмежувальної поверхні. Скінченний елемент призначений для моделювання різних частин оболонки: як обшивки, так і областей з конструктивними особливостями за товщиною. Тому він є універсальним. Його універсальність виникає за рахунок наділення відомого класичного 8-ми вузлового ізопараметричного тривимірного СЕ з полілінійними функціями форми [56] додатковими атрибутами – додатковими змінними параметрами: топологічними, геометричними і фізико-механічними. Моделювання неоднорідної оболонки реалізується за рахунок необхідної трансформації класичного («основного») тривимірного СЕ на різних ділянках оболонок. За «основний» СЕ приймається скінченний елемент обшивки (СЕО), який є класичним тривимірним СЕ. Перетворення СЕО (шестигранник  $ABCDEFGH$ ) у скінчений елемент зі зміненими параметрами (шестигранник  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$ ) реалізується в напрямку місцевої осі  $x^1$  за товщиною обшивки (рис. 2.4). Для зручності опису змінений елемент називатимемо скінченний елемент модифікований (СЕМ). Першим типом додаткових змінних параметрів «основного» СЕ є топологічний параметр, який задає ознаку необхідності перебудови СЕО у СЕМ. Другий і третій параметри є геометричними. Вони використовуються для зміни (збільшення або зменшення) розмірів СЕ у напрямку його товщини та для зміщення його серединної поверхні в цьому ж напрямку. Для виконання цих операцій застосовується метод лінійного перетворення координат за віссю  $x^1$  вузлів тривимірного СЕ обшивки у відповідні координати вузлів СЕМ (рис. 2.6). Такий підхід є наслідком прийнятого полілінійного закону розподілу координат у СЕ та сформульованої некласичної кінематичної гіпотези деформівної прямої. На рис. 2.6 цим перетворенням відповідає трансформація ребра  $AB$ , що належить СЕО, в ребро  $\tilde{A}\tilde{B}$  зміненого розміру і зі зсувом на величину  $S\tilde{S}$  для СЕМ.

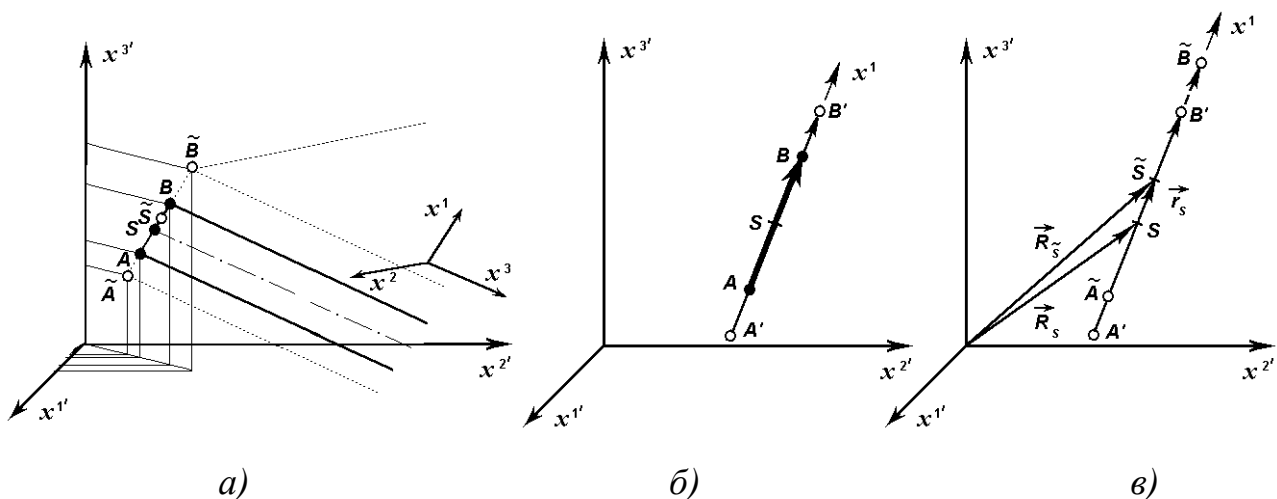


Рис. 2.6. Перетворення CEO в СЕМ

Таким чином, на ділянках оболонки зі ступінчасто-збільшеною товщиною CEO трансформується в СЕМ<sup>+</sup> для моделювання ребер і накладок, а на ділянках зі ступінчасто-зменшеною товщиною – в СЕМ<sup>-</sup> (канали, виїмки). Геометричні залежності, за якими виконуються ці перетворення, мають вигляд [13]:

$$\tilde{x}_{s_2 s_3}^{k'} = x_{s_2 s_3}^{k'} + a_{s_2 s_3} t_{s_2 s_3}^{k'}, \quad \tilde{t}_{s_2 s_3}^{k'} = b_{s_2 s_3} t_{s_2 s_3}^{k'} \quad (2.27)$$

де

$x_{s_2 s_3}^{k'}$  і  $\tilde{x}_{s_2 s_3}^{k'}$  – координати (декартові)  $x^{k'}$  середин ребер CEO і СЕМ з сітковими координатами  $s_2, s_3$  (на рис. 2.3 це точки  $S$  та  $\tilde{S}$ );

$t_{s_2 s_3}^{k'}$  і  $\tilde{t}_{s_2 s_3}^{k'}$  – проєкції на осі  $x^{k'}$  довжин ребер CEO і СЕМ, які направлені за  $x^1$ , тобто вузлові проєкції товщин (проєкції відрізків  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ );

$b_{s_2 s_3} = \tilde{t}_{s_2 s_3} / t_{s_2 s_3}$  – коефіцієнт, що визначає величину зміни довжини ребра, це є відношення відстаней за  $x^1$  між вузлами на обмежувальних поверхнях СЕМ та CEO (тобто відношення відповідних довжин відрізків  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ );

$a_{s_2 s_3} = \pm |\vec{r}_{s_2 s_3}| / t_{s_2 s_3}$  – коефіцієнт зсуву ребра за віссю  $x^1$ , знак зміщення відповідає вектору зсуву  $\vec{r}_{s_2 s_3}$ :  $a_{s_2 s_3} > 0$ , якщо напрямок  $\vec{r}_{s_2 s_3}$  спрямований за  $x^1$ , тобто  $r_{s_2 s_3}$  – це є відстань зі знаком між серединами ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ .

З співвідношень (2.27) слідує, що СЕМ збігається з СЕО, коли коефіцієнтами перетворення є  $b_{s_2s_3} = 1$ ,  $a_{s_2s_3} = 0$ . Зауважимо, що величини  $x_{s_2s_3}^{k'}$  та  $t_{s_2s_3}^{k'}$  обчислюються через координати вузлів  $x_{s_1s_2s_3}^{k'}$  тривимірного СЕО за формулами:

$$x_{s_2s_3}^{k'} = \frac{x_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + x_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad t_{s_2s_3}^{k'} = x_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - x_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}. \quad (2.28)$$

Координати вузлів тривимірного СЕО  $x_{s_1s_2s_3}^{k'}$  задаються як вихідна інформація, а координати вузлів тривимірного СЕМ  $\tilde{x}_{s_1s_2s_3}^{k'}$  знаходяться через обчислені в (2.27) величини:

$$\tilde{x}_{s_1s_2s_3}^{k'} = \tilde{x}_{s_2s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} t_{s_2s_3}^{k'}. \quad (2.29)$$

На прикладі ділянок оболонки з «ребрами» (рис. 2.7, а), тобто ділянки зі ступінчасто-збільшеною товщиною, з «виїмками» (рис. 2.7, б), тобто ділянки зі ступінчасто-зменшеною товщиною та з «видавками» (рис. 2.7, в), тобто тільки зі зміщенням СЕ за товщиною, схематично показано моделювання оболонки ступінчасто-змінної товщини за допомогою універсального тривимірного СЕ [170, 171]. На рисунках надані позначення:  $h$  – товщина обшивки СЕО;  $h_p^e, h_p^h$  – товщини верхнього і нижнього ребер, відповідно;  $h_e^e, h_e^h$  – глибина верхньої та нижньої виїмок, відповідно;  $e$  – ексцентриситет (зміщення) серединної поверхні СЕМ відносно площини приведення оболонки (СЕО),  $e > 0$ , якщо зміщення напрямлено за віссю  $x^1$ .

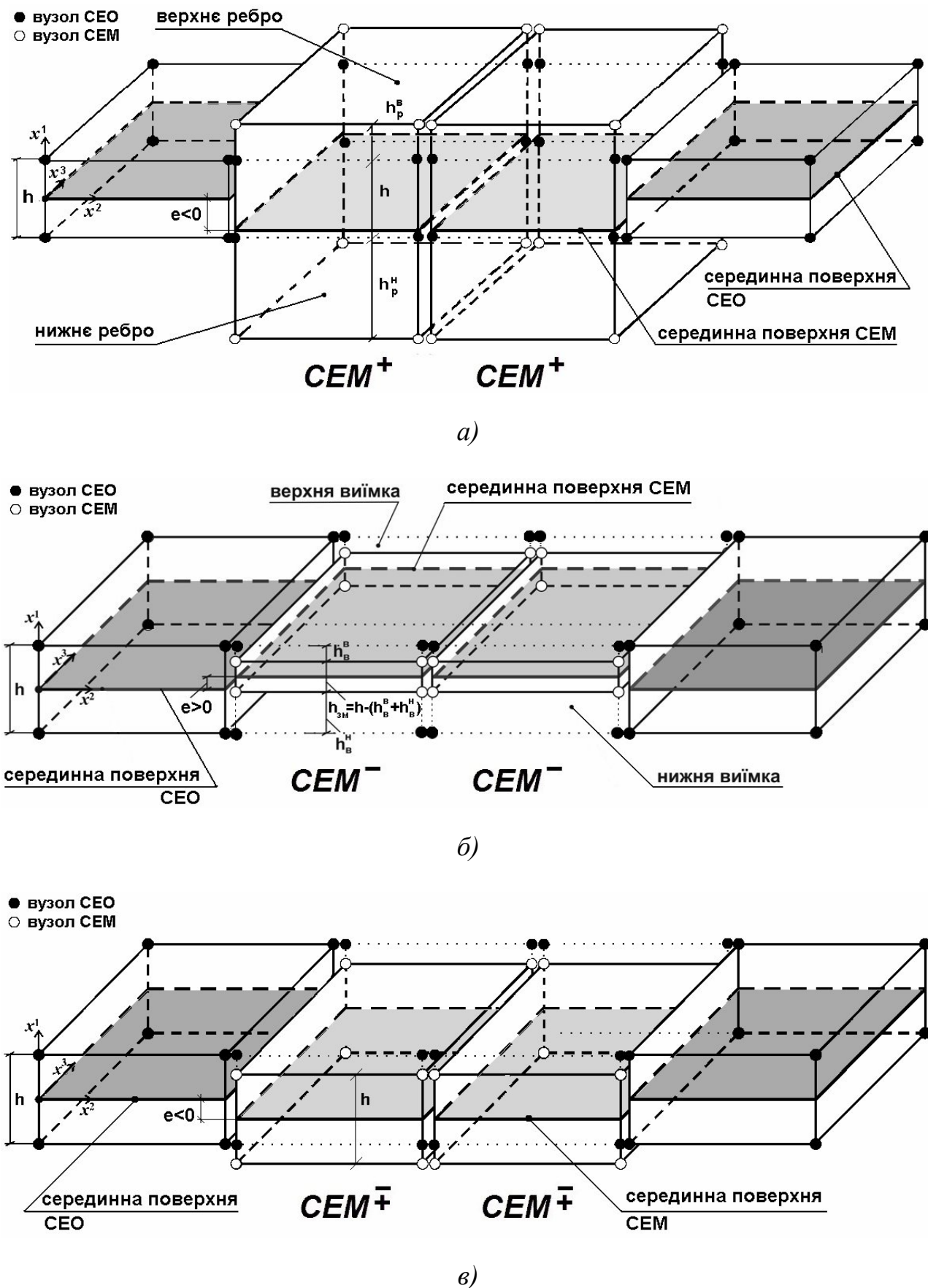


Рис. 2.7. Схематичне зображення процедури моделювання ділянок оболонки з «ребром» (а), з «виїмкою» (б), з «видавкою» (в)



Послідовність моделювання геометрії СЕМО складається з таких етапів:

- задаються вузлові декартові координати граничних поверхонь усієї обшивки, включаючи ділянки ступінчасто-змінної товщини;
- для створеної СЕМО маркуються ті СЕ (а саме СЕО), які необхідно перетворити в СЕМ, тобто, для яких потрібно змінити вузлові координати та за необхідності виконати зсув серединної поверхні, щоб змоделювати ділянки зі ступінчасто-змінною товщиною;
- при наявності в СЕО маркування (спеціальних ознак), реалізується перетворення СЕО у СЕМ зі зміненими розмірами та зміщенням за товщиною обшивки (вздовж місцевої осі  $x^1$ ).

Побудова розв'язувальних співвідношень МСЕ виконується з використанням моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [13, 80, 81, 98]. Відповідні співвідношення МСЕ отримуються у формі метода переміщень: за шукані невідомі приймаються вузлові переміщення СЕМО у декартовій системі координат. Згідно з МССЕ узгоджена апроксимація переміщень і деформацій, забезпечує коректне врахування жорстких зміщень СЕ [69] та підвищує точність і збіжність розв'язків при використанні рідких сіток. Відповідно до МССЕ функції повних деформацій подаються як відрізок ряду Маклорена в центрі СЕ ( $x^i = 0$ ), який відповідає прийнятому полілінійному закону (2.26) зміни координат і переміщень у межах елемента [13, 80, 81]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0f} \omega_{(ij)}^{(ff)} x^f + \varepsilon_{ij}^{0fh} \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ffh)}^{(hii)} x^f x^h, \quad (2.30)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon_{ij})|_{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{0f} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^f} \right) \Big|_{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{0fh} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^f \partial x^h} \right) \Big|_{(0)}, \quad (2.31)$$

$$\omega_{ff\dots}^{hi\dots} = \omega_f^h \omega_f^i \dots, \quad \omega_f^h = \begin{cases} 0, & \text{при } f = h \\ 1, & \text{при } f \neq h \end{cases}.$$

Отже, відповідно до (2.30), компоненти  $\varepsilon_{ij}$  визначаються як лінійні функції від  $x^i$  у межах СЕ.

Розподіл температури в СЕМО задається окремо для кожного СЕ, в залежності від варіанту його конструктивної структури (рис. 2.3, рис. 2.4). В межах кожного конструктивного шару СЕ розподіл температури задається полілінійною функцією  $T_n$ , яка визначається значеннями температури  $T_{s_1 n s_2 s_3}$  у вузлових точках шару з сітковими координатами  $s_1 n s_2 s_3$  [13]. Тому розподіл температури в площині шарів СЕ приймається лінійним, а за товщиною – як відповідна ламана. Враховуючи цей факт, температурні деформації, на відміну від функцій повних деформацій (2.30), приймаються в рамках СЕ як лінійні функції від координат  $x^2, x^3$  і як кусково-лінійні функції координати  $x^1$ . З огляду на це функції температурних деформацій для  $n$ -го шару задаються відрізком ряду Тейлора в центрі шару, в точці  $O_n$  з координатами  $x_{O_n}^1 = d_n, x_{O_n}^2 = x_{O_n}^3 = 0$ , де  $d_n = (a_{n+1} + a_n)/2$  та  $h_n = a_{n+1} - a_n$  – координата  $x^1$  в центрі цього шару та його товщина, відповідно (рис. 2.4):

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0p} (x^p - x_{O_n}^p) \omega_{(ij)}^{(pp)} + \varepsilon_{ij}^{0ph} (x^p - x_{O_n}^p) (x^h - x_{O_n}^h) \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(pph)}^{(hii)}, \quad (2.32)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = \left( \varepsilon_{ij}^T \right)_{(O_n)}, \quad \varepsilon_{ij}^{0p} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p} \right)_{(O_n)}, \quad \varepsilon_{ij}^{0ph} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p \partial x^h} \right)_{(O_n)}. \quad (2.33)$$

При обчисленні коефіцієнтів (2.33) приймається, що матеріал  $n$ -го шару оболонки у загальному випадку є ортотропним. Для цього типу матеріалу, компоненти тензора коефіцієнтів термічного розширення  $\alpha_{ij}$  визначаються через технічні сталі  $\alpha_{a''b''}$  [13] (коефіцієнти термічного розширення  $\alpha_{1''}, \alpha_{2''}, \alpha_{3''}$  ортотропного матеріалу), які задаються у триортонормованій системі координат  $x^{a''}$  (системі координат, у якій виконуються фізичні виміри), тобто:  $\alpha_{1''1''} = \alpha_{1''}, \alpha_{2''2''} = \alpha_{2''}, \alpha_{3''3''} = \alpha_{3''}$ . Маємо:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} T_n = \alpha_{(a''a'')} C_n^{a''} C_n^{a''} T_n, \quad (2.34)$$

де  $\alpha_{(a''a'')}_n$  подається через  $\alpha_{1''}, \alpha_{2''}, \alpha_{3''}$ ; тензор перетворення координат  $C_n^{a''}$  обчислюється за (2.2);  $T_n$  – полілінійна функція, яка визначається значеннями температури  $T_{s_1 n s_2 s_3}$  у вузлових точках шару СЕ з сітковими координатами  $s_{1n} s_{2n} s_{3n}$ . Коефіцієнти  $\varepsilon_{ij}^T, \varepsilon_{ij}^{0p}, \varepsilon_{ij}^{0ph}$  визначаються за розрахунковими скінченно-різницевиими формулами [13], враховуючи надані в (2.32) обмеження.

$$\text{Для функцій напружень } \bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.13) \text{ та } \sigma_T^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T \quad (2.14)$$

припускається, що у межах  $n$ -их шарів СЕ компоненти тензорів  $C_n^{ijkl}$  і  $\alpha_{ij}$  є сталими. Вважається, що у границях СЕ ці функції напружень є лінійними функціями в площині координат  $x^2, x^3$  та кусково-лінійними функціями за товщиною усього пакета (від координати  $x^1$ ). Тому функції  $\bar{\sigma}_n^{ij}$  та  $\sigma_n^{ij}$  подаються як лінійні відрізки відповідних рядів Тейлора в околі центра  $n$ -го шару:

$$\bar{\sigma}_n^{ij} = N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} x^\alpha + 2M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta, \quad (2.35)$$

$$\sigma_n^{ij} = N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} x^\alpha + 2M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta, \quad (2.36)$$

де

$$N_n^{ij} = \left( \bar{\sigma}_n^{ij} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{0f} + x_{O_n}^1 C_n^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{01}, \quad M_n^{ij} = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^1} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{01},$$

$$M_n^{ij}{}_\alpha = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{0\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)} + 2x_{O_n}^1 C_n^{ij(\beta\beta)} \varepsilon_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)}, \quad (2.37)$$

$$M_n^{ij}{}_{1\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^1 \partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij(\beta\beta)} \varepsilon_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)}, \quad M_n^{ij}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ij11} \varepsilon_{11}^{0\alpha\beta};$$

$$\begin{aligned}
\frac{T}{N}_n^{ij} &= \left( \frac{T}{\sigma}_n^{ij} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \frac{T}{\varepsilon}_n^{0kl}, \quad \frac{T}{M}_n^{ij} = \left( \frac{\partial \frac{T}{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^1} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij\alpha\beta} \frac{T}{\varepsilon}_n^{1\alpha\beta}, \\
\frac{T}{M}_n^{ij\alpha} &= \left( \frac{\partial \frac{T}{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \frac{T}{\varepsilon}_n^{0\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)}, \quad \frac{T}{M}_n^{ij1\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \frac{T}{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^1 \partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij(\beta\beta)} \frac{T}{\varepsilon}_n^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)}, \\
\frac{T}{M}_n^{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \frac{T}{\sigma}_n^{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ij11} \frac{T}{\varepsilon}_n^{0\alpha\beta}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Використання статичної гіпотези (2.15) вимагає корегування компонентів тензорів пружних сталей  $C_n^{ijkl}$  відповідно до формули (2.21).

### 2.3 Співвідношення методу скінчених елементів у задачах геометрично нелінійного термопружного деформування композитних багатошарових оболонок ступінчасто-змінної товщини

Дослідження геометрично нелінійного деформування неоднорідної оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах. Тому процес деформування подається як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках термомеханічного навантаження. На поточному кроці, нова геометрія та передісторія НДС оболонки вважаються відомими. Зрівноважений стан оболонки на основі принципу можливих переміщень визначається варіаційним рівнянням Лагранжа, яке при скінченноелементній апроксимації має вигляд [11, 13, 98]:

$$\delta \Pi = \sum_{FE} (\delta W_{FE} - \delta A_{FE}) = 0, \tag{2.39}$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія деформування СЕМО;

$\delta W_{FE}$  та  $\delta A_{FE}$  – віртуальні роботи внутрішніх та зовнішніх сил СЕ, відповідно;

$\sum_{FE}$  – сума за скінченними елементами.

При аналізі напружено-деформованого стану оболонки від дії термомеханічного навантаження, віртуальну роботу внутрішніх сил СЕ, з огляду на закон Дюамеля–Неймана (2.12), подаємо так:

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV = \int_{V_{FE}} C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) \delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) dV = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^T dV = \delta \bar{W}_{FE} - \delta W_{FE}^T. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Співвідношення (2.40) включає два доданки, що мають ідентичну структуру, проте здійснюють різну роботу при розв'язанні задачі термопружності. Перший інтеграл є віртуальною роботою внутрішніх сил СЕ  $\delta \bar{W}_{FE}$  від повних деформацій (2.7), які залежать від шуканих функцій переміщень. На базі цього інтегралу одержується ліва частина нелінійної системи розв'язувальних рівнянь МСЕ в напруженнях. Другий інтеграл є віртуальною роботою  $\delta W_{FE}^T$  внутрішніх сил СЕ від температурних деформацій (2.11), які в свою чергу залежать від заданого поля вузлових температур і тензора коефіцієнтів термічного розширення матеріалу. За допомогою цього інтегралу знаходиться матриця еквівалентних температурних навантажень [13]. В правій частині системи нелінійних розв'язувальних рівнянь вона додається до матриці вузлових механічних (силових) навантажень. Тоді для кожного СЕ маємо:  $\delta P_{FE} = \delta A_{FE} + \delta W_{FE}^T$ .

Інтегрування першого інтегралу з (2.40) у межах СЕ виконується за місцевими координатами  $x^i$  ( $-\frac{1}{2} \leq x^i \leq +\frac{1}{2}$ ) з врахуванням багат шарової структури СЕ (рис. 2.4) і залежності  $dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ . Величина  $\sqrt{g}$

приймається сталою в межах СЕ. Підставляючи залежності (2.30) та (2.35) у перший інтеграл, здійснюємо інтегрування  $\delta \bar{W}_{FE}$  звичним для МСЕ чином:

$$\begin{aligned}
\delta \bar{W}_{FE} &= \\
&= \sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{a_{n+1}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left( N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} x^\alpha + \right. \\
&\quad \left. + 2M_n^{ij}{}_{1\alpha} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij}{}_{\alpha\beta} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta \right) \times \\
&\quad \times \delta \left( \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0f} \omega_{(ij)}^{(ff)} x^f + \varepsilon_{ij}^{0fh} \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ffh)}^{(hii)} x^f x^h \right) dx^1 dx^2 dx^3 = \\
&= \sqrt{g} \left( Q^{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^0 + Q_\alpha^{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{0q} \omega_{(ij)}^{(qq)} + Q_{23}^{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11}^{023} + Q_{1\alpha}^{(\beta\beta)} \delta \bar{\varepsilon}_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} \right), \tag{2.41}
\end{aligned}$$

де

$m$  – кількість шарів СЕ ( $n = \overline{1, m}$ );

$$Q^{ij} = \sum_{n=1}^m N_n^{ij} h_n = \hat{C}^{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}^0 + \hat{C}^{ij\alpha\beta} \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{01},$$

$$Q_1^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^m N_n^{\alpha\beta} h_n d_n + \sum_{n=1}^m M_n^{\alpha\beta} \frac{h_n^3}{12} = \hat{C}^{\alpha\beta kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^0 + \left( \bar{C}^{\alpha\beta\nu\mu} + B^{**\alpha\beta\nu\mu} \right) \bar{\varepsilon}_{\nu\mu}^{01},$$

$$Q_\alpha^{ij} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^m M_n^{ij} h_n = \frac{1}{12} \hat{C}^{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{0\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)} + \frac{1}{6} \hat{C}^{ij(\beta\beta)} \bar{\varepsilon}_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\beta)}^{(\alpha)}, \tag{2.42}$$

$$Q_{23}^{11} = \frac{1}{36} \sum_{n=1}^m M_n^{11} h_n = \frac{1}{36} \hat{C}^{1111} \bar{\varepsilon}_{11}^{023},$$

$$Q_{13}^{22} = \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m M_n^{22} h_n d_n + 2 \sum_{n=1}^m M_n^{22} \frac{h_n^3}{12} \right) = \frac{1}{6} \left( \hat{C}^{22kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{03} \omega_{(kl)}^{33} + 2 \left( \bar{C}^{2222} + B^{**2222} \right) \bar{\varepsilon}_{22}^{013} \right),$$

$$Q_{12}^{33} = \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m M_n^{33} h_n d_n + 2 \sum_{n=1}^m M_n^{33} \frac{h_n^3}{12} \right) = \frac{1}{6} \left( \hat{C}^{33kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{02} \omega_{(kl)}^{22} + 2 \left( \bar{C}^{3333} + B^{**3333} \right) \bar{\varepsilon}_{33}^{012} \right);$$

$$\hat{C}^{ijkl} = \sum_{n=1}^m C_n^{ijkl} h_n,$$

$$\hat{C}^{ijkl} = \sum_{n=1}^m C_n^{ijkl} h_n d_n,$$

$$\bar{C}^{\alpha\beta\nu\mu} = \sum_{n=1}^m C_n^{\alpha\beta\nu\mu} h_n d_n^2,$$

$$B^{**\alpha\beta\nu\mu} = \sum_{n=1}^m B_n^{\alpha\beta\nu\mu} \frac{h_n^3}{12}; \tag{2.43}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^0 = (\nabla_i u_j)|_{(0)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{0q} = \left( \frac{\partial \nabla_i u_j}{\partial x^q} \right) \Big|_{(0)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{0qr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \nabla_i u_j}{\partial x^q \partial x^r} \right) \Big|_{(0)}; \quad (2.44)$$

$$\nabla_i u_j = C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i}. \quad (2.45)$$

Зважаючи на симетрію тензорів пружних сталих і напружень, при отриманні залежності (2.41) замість компонент тензора деформацій (2.31) використовуються компоненти градієнта вектора переміщень (2.44). Ця заміна зменшує кількість обчислювальних дій при проведенні розрахунків. Подання компонент тензора повних деформацій (2.30) та відповідних складових тензора напруження (2.35) як лінійних функцій, дало змогу виконати процедуру інтегрування (2.41) аналітично.

Оскільки за шукані невідомі прийнято функції переміщень вузлів тривимірних СЕ (переміщень точок на обмежуючих поверхнях оболонки) в декартовій системі координат, компоненти градієнта вектора переміщень (2.44) виражаються через вузлові переміщення СЕ  $u'_{p_1 p_2 p_3}$ . Враховуючи (2.45) та залежність (2.26), маємо:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij}^0 &= \frac{1}{4} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} C_j^{t'} \Big|_{(0)} p_i u'_{p_1 p_2 p_3}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^{0q} &= \frac{1}{2} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} C_j^{t'} \Big|_{(p_q)} p_i p_q u'_{p_1 p_2 p_3}, \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^{0qr} &= \frac{1}{2} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} C_j^{t'} \Big|_{(p_q p_r)} p_i p_q p_r u'_{p_1 p_2 p_3}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

де  $C_j^{t'} \Big|_{(0)}$ ,  $C_j^{t'} \Big|_{(p_q)}$ ,  $C_j^{t'} \Big|_{(p_q p_r)}$  – значення компонент тензора перетворень СЕ: у центрі (точці  $O$ ), у центрі грані  $p_q$ , у центрі ребра  $p_q p_r$ , відповідно.

Відомо [13, 69, 98], щоб запобігти накопиченню помилок округлення в обчислювальному процесі, за розв'язувальні функції раціональніше приймати не переміщення вузлів СЕ на обмежувальних поверхнях оболонки  $u'_{p_1 p_2 p_3}$ , а

сукупність переміщень вузлових точок на серединній поверхні СЕ  $v'_{p_2 p_3}$  та узагальнених вузлів повороту ребер СЕ  $v'_{p_2 p_3}$  (за які приймаються різниці вузлових переміщень на обмежувальних поверхнях оболонки):

$$v'_{p_2 p_3} = \frac{u'_{p_1=+1 p_2 p_3} + u'_{p_1=-1 p_2 p_3}}{2}, \quad v'_{p_2 p_3} = u'_{p_1=+1 p_2 p_3} - u'_{p_1=-1 p_2 p_3}. \quad (2.47)$$

Залежність (2.47) узгоджується з формулами представлення вузлових координат СЕ  $x'_{s_1 s_2 s_3}$  через координати вузлів на його серединній поверхні та товщини відповідних ребер (2.28). Прийнята заміна

$$u'_{p_1 p_2 p_3} = v'_{p_2 p_3} + \frac{p_1}{2} v'_{p_2 p_3} \quad (2.48)$$

інтерпретується як перехід від восьмивузлового тривимірного СЕ (з трьома переміщеннями у вузлах  $u'_{p_1 p_2 p_3}$ ) до чотиривузлового оболонкового СЕ (зі шістьма узагальненими переміщеннями у вузлах  $v'_{p_2 p_3}$  та  $v'_{p_2 p_3}$ ). Тобто нові шукані невідомі віднесені до вузлів на його серединній поверхні.

В результаті визначаються коефіцієнти  $R'_{v_{p_2 p_3}}$ ,  $R'_{v_{p_2 p_3}}$  матриці вузлових реакцій СЕ, що віднесені відповідно до змінних  $v'_{p_2 p_3}$  та  $v'_{p_2 p_3}$  на його серединній поверхні [13, 80]:

$$\delta \bar{W}_{FE} = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( R'_{v_{p_2 p_3}} \delta v'_{p_2 p_3} + R'_{v_{p_2 p_3}} \delta v'_{p_2 p_3} \right), \quad (2.48)$$

де

$$\begin{aligned} R'_{v_{p_2 p_3}} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ p_\alpha \left( Q^{\alpha j} C'_j \Big|_{(0)} + Q_1^{\alpha \beta} C'_{\beta 1} \Big|_{(0)} \right) + 2 p_{(\alpha)} p_\beta Q_\alpha^{\beta j} C'_j \Big|_{(p_\alpha)} \omega_{(j\beta)}^{(\alpha\alpha)} + \right. \\ &\quad \left. + p_2 p_3 \left( Q_{13}^{22} C'_{21} \Big|_{(p_3)} + Q_{12}^{33} C'_{31} \Big|_{(p_2)} \right) \right], \quad (2.49) \\ R'_{v_{p_2 p_3}} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} Q^{1j} C'_j \Big|_{(0)} + p_\alpha \left( Q_1^{\alpha \beta} C'_{\beta 1} \Big|_{(0)} + Q_\alpha^{1j} C'_j \Big|_{(p_\alpha)} \omega_{(j)}^{(\alpha)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + p_2 p_3 \left( Q_{23}^{11} C'_1 \Big|_{(p_2 p_3)} + Q_{13}^{22} C'_2 \Big|_{(p_3)} C'_{2 p_3} + Q_{12}^{33} C'_3 \Big|_{(p_2)} \right) \right]. \end{aligned}$$



Тут  $C'_{\beta 1}|_{(0)}$  та  $C'_{\beta 1}|_{(p_\alpha)}$  – значення похідних  $\partial C'_{\beta 1}/\partial x^1$  у центрі СЕ точки  $O$  та у центрі грані СЕ з сітковою координатою  $p_\alpha$ , відповідно.

Апроксимація складових функцій напружень  $\bar{\sigma}_n^{ij}$  (2.35) та  $\bar{\sigma}_n^T$  (2.36) має однаковий вигляд. Здійснюючи інтегрування віртуальної роботи  $\delta W_{FE}^T$  за методично подібною процедурою як для віртуальної роботи  $\delta \bar{W}_{FE}$ , маємо:

$$\delta W_{FE}^T = \sqrt{g} \left( Q^{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^0 + Q_\alpha^{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{0q} \omega_{(ij)}^{(qq)} + Q_{23}^{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11}^{023} + Q_{1\alpha}^{(\beta\beta)} \delta \bar{\varepsilon}_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} \right), \quad (2.50)$$

де

$$\begin{aligned} Q^{ij} &= \sum_{n=1}^m N_n^{ij} h_n = \sum_{n=1}^m C_n^{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}^0, \\ Q_1^{\alpha\beta} &= \sum_{n=1}^m N_n^{\alpha\beta} h_n d_n + \sum_{n=1}^m M_n^{\alpha\beta} \frac{h_n^3}{12} = \sum_{n=1}^m C_n^{\alpha\beta kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^0 h_n d_n + \sum_{n=1}^m B_n^{\alpha\beta\nu\mu} \bar{\varepsilon}_{\nu\mu}^{01} \frac{h_n^3}{12}, \\ Q_\alpha^{ij} &= \frac{1}{12} \sum_{n=1}^m M_n^{ij} h_n = \sum_{n=1}^m C_n^{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{0\alpha} h_n \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)}, \\ Q_{23}^{11} &= \frac{1}{36} \sum_{n=1}^m M_n^{11} h_n = \sum_{n=1}^m C_n^{1111} \bar{\varepsilon}_{11}^{023} h_n, \\ Q_{13}^{22} &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m M_n^{22} h_n d_n + 2 \sum_{n=1}^m M_n^{22} \frac{h_n^3}{12} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m C_n^{22kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{03} h_n d_n \omega_{(kl)}^{33} + 2 \sum_{n=1}^m B_n^{2222} \bar{\varepsilon}_n^{013} \frac{h_n^3}{12} \right), \\ Q_{12}^{33} &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m M_n^{33} h_n d_n + 2 \sum_{n=1}^m M_n^{33} \frac{h_n^3}{12} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left( \sum_{n=1}^m C_n^{33kl} \bar{\varepsilon}_{kl}^{02} h_n d_n \omega_{(kl)}^{(22)} + 2 \sum_{n=1}^m B_n^{3333} \bar{\varepsilon}_n^{012} \frac{h_n^3}{12} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Остаточно маємо

$$\delta W_{FE}^T = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( R_{\nu p_2 p_3}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} + R_{\nu p_2 p_3}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} \right), \quad (2.52)$$

де коефіцієнти  $R_{\nu p_2 p_3}^T$ ,  $R_{\nu p_2 p_3}^T$  матриці вузлових еквівалентних температурних навантажень, що віднесені до серединної поверхні СЕ, визначаються за формулами, подібними до (2.49):

$$R_{\nu p_2 p_3}^T = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ p_{\alpha} \left( Q^{\alpha j} C_j' \Big|_{(0)} + Q_1^{\alpha \beta} C_{\beta 1}' \Big|_{(0)} \right) + 2 p_{(\alpha)} p_{\beta} Q_{\alpha}^{\beta j} C_j' \Big|_{(p_{\alpha})} \omega_{(j\beta)}^{(\alpha)} + \right. \\ \left. + p_2 p_3 \left( Q_{13}^{22} C_{21}' \Big|_{(p_3)} + Q_{12}^{33} C_{31}' \Big|_{(p_2)} \right) \right], \quad (2.53)$$

$$R_{\nu p_2 p_3}^T = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} Q^{1j} C_j' \Big|_{(0)} + p_{\alpha} \left( Q_1^{\alpha \beta} C_{\beta}' \Big|_{(0)} + Q_{\alpha}^{1j} C_j' \Big|_{(p_{\alpha})} \omega_{(j)}^{(\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + p_2 p_3 \left( Q_{23}^{11} C_1' \Big|_{(p_2 p_3)} + Q_{13}^{22} C_2' \Big|_{(p_3)} C_2' p_3 + Q_{12}^{33} C_3' \Big|_{(p_2)} \right) \right].$$

Інтегрування віртуальної роботи зовнішніх сил  $P^t$  є звичайною для МСЕ процедурою:

$$\delta A_{FE} = \int_{V_{FE}} P^t \delta u^t dV = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( P_{\nu p_2 p_3}^t \delta v_{p_2 p_3}^t + P_{\nu p_2 p_3}^t \delta v_{p_2 p_3}^t \right), \quad (2.54)$$

де  $P_{\nu p_2 p_3}^t$  та  $P_{\nu p_2 p_3}^t$  – коефіцієнти матриці вузлових зовнішніх сил СЕ, що віднесені до серединної поверхні СЕ.

Розв'язувальна система нелінійних рівнянь (2.39) загалом є системою нелінійних рівнянь загального виду [98]. Алгоритми розв'язування таких систем зазвичай реалізуються інкрементальними (кроковими) методами. У крокових ітераційних алгоритмах розв'язування геометрично нелінійних задач, на кроці навантаження використовується розв'язок системи лінеаризованих рівнянь [56, 98, 106, 105, 121]. Розглянемо процедуру отримання лінеаризованих рівнянь МСЕ для задач геометрично нелінійного деформування та стійкості оболонок [13, 47, 80, 81, 98, 140].

Нехай на  $s$ -му кроці навантаження поле термомеханічного впливу

$$P_s = P_{s-1} + \Delta_s P \quad (2.55)$$

компенсується відповідним полем напружень

$$\sigma_s^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} + \Delta_s \sigma^{ij}, \quad (2.56)$$

де  $P_{s-1} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k P$  та  $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k \sigma^{ij}$  – термомеханічне навантаження та

напруження, що накопичені на попередніх  $s - 1$  кроках, відповідно;

$\Delta_s \sigma^{ij} = C^{ijkl} \overset{e}{\varepsilon}_{kl}$  – приріст напружень від приросту навантаження  $\Delta_s P$ ;

$C^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталей на  $s$ -му кроці;

$\overset{e}{\varepsilon}_{kl}$  – приріст пружних деформацій, який викликає приріст напружень  $\Delta_s \sigma^{ij}$ .

Враховуючи залежності (2.7), (2.13), (2.56), віртуальна робота внутрішніх сил СЕ  $\delta \bar{W}_{FE}$  від приросту повних деформацій може бути представлена так:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE} &= \int_{V_{FE}} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} + \Delta_s \sigma^{ij} \right) \delta \left( \overset{lin}{\varepsilon}_{ij} + \overset{nel}{\varepsilon}_{ij} \right) dV = \quad (2.57) \\ &= \int_{V_{FE}} \left[ \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \overset{lin}{\delta \varepsilon}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \overset{nel}{\delta \varepsilon}_{ij} + C^{ijkp} \overset{lin}{\varepsilon}_{kp} \overset{lin}{\delta \varepsilon}_{ij} + C^{ijkp} \overset{nel}{\varepsilon}_{kp} \overset{lin}{\delta \varepsilon}_{ij} + C^{ijkp} \left( \overset{lin}{\varepsilon}_{kp} + \overset{nel}{\varepsilon}_{kp} \right) \overset{nel}{\delta \varepsilon}_{ij} \right] dV \end{aligned}$$

На  $(s - 1)$ -му кроці, напруження  $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij}$  врівноважене термомеханічним навантаженням  $P_{s-1}$ . Тому перший доданок з (2.57) вилучається. Четвертий та п'ятий доданки мають нелінійні члени третього і четвертого порядків малості відносно функції переміщень. Тому ними нехтуємо.

Тоді:

$$\delta \bar{W}_{FE} = \int_{V_{FE}} \left[ C^{ijkp} \overset{lin}{\varepsilon}_{kp} \overset{lin}{\delta \varepsilon}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \overset{nel}{\delta \varepsilon}_{ij} \right] dV = \delta \bar{W}_{FE}^1 + \delta \bar{W}_{FE}^2. \quad (2.58)$$

На базі першого доданка  $\delta \bar{W}_{FE}^1$  отримуються блоки коефіцієнтів лінійної матриці жорсткості (МЖ) скінченного елемента  $[\bar{K}]_{FE}$  [13]. Інтегрування виконується за методично подібною процедурою, як при отриманні (2.49) та (2.53).

На базі другого доданка  $\delta\bar{W}_{FE}^2$  отримуються блоки матриці геометричної жорсткості (МГЖ) скінченного елемента  $\left[ \overset{\circ}{K} \right]_{FE}$  [13]. Для цього, функції напружень шару  $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij}$  подаються як лінійні частини рядів Тейлора за місцевими координатами  $x^i$  в околі центра  $n$ -го шару  $O_n$ , а нелінійні складові функцій повних деформацій  $\varepsilon_{ij}^{nel}$  подаються як відрізки рядів Маклорена в околі центра СЕ точки  $O$  за аналогією до (2.30). Остаточо маємо:

$$\delta\bar{W}_{FE} = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \overset{\wedge}{K}_{\overset{\circ}{uv}}^{b't'} \underset{p_2p_3}{v}_{s_2s_3}^{b'} \delta \underset{p_2p_3}{v}_{p_2p_3}^{t'} + \overset{\wedge}{K}_{\overset{\circ}{uv}}^{b't'} \underset{p_2p_3}{v}_{s_2s_3}^{b'} \delta \underset{p_2p_3}{v}_{p_2p_3}^{t'} + \right. \\ \left. + \overset{\wedge}{K}_{\overset{\circ}{vu}}^{b't'} \underset{p_2p_3}{v}_{s_2s_3}^{b'} \delta \underset{p_2p_3}{v}_{p_2p_3}^{t'} + \overset{\wedge}{K}_{\overset{\circ}{vu}}^{b't'} \underset{p_2p_3}{v}_{s_2s_3}^{b'} \delta \underset{p_2p_3}{v}_{p_2p_3}^{t'} \right). \quad (2.59)$$

Таким чином, коефіцієнти лінеаризованої МЖ скінченного елемента  $[\overset{\wedge}{K}]_{FE}$  складаються з двох доданків:

$$\overset{\wedge}{K}_{\xi\zeta}^{b't'} = \bar{K}_{\xi\zeta}^{b't'} + \overset{\circ}{K}_{\xi\zeta}^{b't'} \delta_{(b')}^{(t')}, \quad (\xi = u, v; \zeta = u, v). \quad (2.60)$$

Відомо [13], що врахування другого доданка з (2.60) дає змогу точніше прогнозувати початкові наближення в ітераційній процедурі. Це приводить до зменшення кількості ітерацій на кожному кроці навантаження майже у два рази і дає можливість збільшити крок параметра продовження розв'язку, що значно підвищує ефективність роботи загального крокового алгоритму.

## 2.4 Корегування співвідношень методу скінченних елементів для оболонок ступінчасто-змінної товщини

Усі скінченноелементні співвідношення, що одержані для побудови геометрично нелінійних і лінеаризованих рівнянь МСЕ, є універсальними. Вони відповідають загальному варіанту тривимірного СЕ (рис. 2.3; рис. 2.4, б).

Коефіцієнти всіх отриманих матриць для універсального СЕ (у формі СЕО чи СЕМ, з яких складається СЕМО (рис. 2.1, рис. 2.4) ) визначаються за одними і тими самими відповідними формулами. Характеристики СЕ (його вузлові координати та переміщення, кількість шарів, технічні сталі матеріалів, додаткові параметри), що пов'язані з кожним конкретним елементом, певним чином містяться в цих співвідношеннях. Необхідно враховувати, що хоча відповідні залежності для СЕО та СЕМ за формою збігаються (обчислюються за одними формулами), проте реальні параметри СЕО та СЕМ є різними. Це стосується як геометрії, так і переміщень. До того ж за поверхні відліку в СЕО та СЕМ прийняті їх серединні поверхні, які загалом в СЕМО між собою не збігаються. Тому при формуванні загальних систем розв'язувальних рівнянь (нелінійних і лінеаризованих) для СЕМО ступінчасто-змінної товщини в єдиний ансамбль, завжди необхідно корегувати усі матриці СЕМ щодо прийнятої поверхні відліку. За поверхню відліку приймається серединна поверхня обшивки оболонки, тобто корегування усіх матриць СЕМ виконується відносно серединної поверхні СЕО (рис. 2.8).

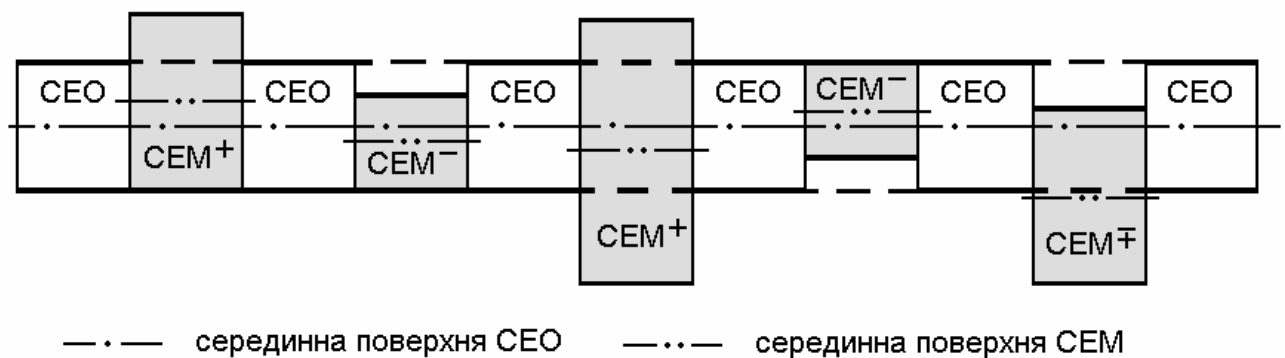


Рис. 2.8. Приклад поєднання різних СЕ в єдиний ансамбль  
(схематичне зображення)

Усі залежності для модифікованого варіанта СЕ, тобто для СЕМ, позначаються значком «тильда». Оскільки функції форми для координат та переміщень ізопараметричного тривимірного СЕ є однаковими, зв'язок узагальнених вузлових переміщень серединних поверхонь СЕО ( $v_{p_2 p_3}^{t'}$ ,  $v_{p_2 p_3}^{t'}$ ) і

СЕМ  $(\tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'}, \tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'})$  є таким самим, як і для їх узагальнених вузлових координат (2.27), тобто:

$$\tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'} = v_{p_2 p_3}^{t'} + a_{p_2 p_3} v_{p_2 p_3}^{t'}, \quad \tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'} = b_{p_2 p_3} v_{p_2 p_3}^{t'}. \quad (2.61)$$

Віртуальна робота внутрішніх сил від повних деформацій на вузлових переміщеннях  $\tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'}$ ,  $\tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'}$  для СЕМ згідно з (2.48) має вигляд:

$$\delta \tilde{W}_{FE} = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta \tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'} + \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta \tilde{v}_{p_2 p_3}^{t'} \right), \quad (2.62)$$

де  $\tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'}$  та  $\tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'}$  – коефіцієнти матриці вузлових реакцій СЕМ, що обчислюються за загальними формулами (2.49), в яких використовуються параметри СЕМ. Після підстановки (2.61) у (2.62), віртуальна робота  $\delta \tilde{W}_{FE}$  визначається через вузлові переміщення, які віднесені до серединної поверхні СЕО, тобто  $v_{p_2 p_3}^{t'}$  і  $v_{p_2 p_3}^{t'}$ :

$$\delta \tilde{W}_{FE} = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} + \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} \right), \quad (2.63)$$

де

$$\tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} = \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'}, \quad \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} = \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} a_{p_2 p_3} + \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} b_{p_2 p_3} \quad (2.64)$$

– відкореговані коефіцієнти матриці вузлових реакцій СЕМ щодо прийнятих загальних невідомих  $v_{p_2 p_3}^{t'}$  та  $v_{p_2 p_3}^{t'}$ .

За аналогічною процедурою отримуються інші матриці СЕМ. На підставі (2.52) та (2.53) віртуальна робота внутрішніх сил від температурних деформацій для СЕМ так визначається через узагальнені вузлові переміщення  $v_{p_2 p_3}^{t'}$  і  $v_{p_2 p_3}^{t'}$ , які віднесені до серединної поверхні СЕО:

$$\delta \tilde{W}_{CE}^T = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} + \tilde{R}_{\tilde{v}}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} \right), \quad (2.65)$$

де

$$\widetilde{R}_{\nu p_2 p_3}^{t'} = \widetilde{R}_{\widetilde{\nu} p_2 p_3}^{t'}, \quad \widetilde{R}_{\nu p_2 p_3}^{t'} = \widetilde{R}_{\widetilde{\nu} p_2 p_3}^{t'} a_{p_2 p_3} + \widetilde{R}_{\widetilde{\nu} p_2 p_3}^{t'} b_{p_2 p_3}. \quad (2.66)$$

Схожим чином записується віртуальна робота зовнішніх сил для СЕМ:

$$\delta \widetilde{A}_{CE} = \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \widetilde{P}_{\nu p_2 p_3}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} + \widetilde{P}_{\nu p_2 p_3}^{t'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} \right). \quad (2.67)$$

Остаточно з рівняння Лагранжа (2.39) отримуються нелінійні розв'язувальні рівняння для усієї СЕМО:

$$\begin{cases} \widetilde{R}_{\nu k}^{t'} - \left( \widetilde{P}_{\nu k}^{t'} + \widetilde{R}_{\nu k}^{t'} \right) = 0, \\ \widetilde{R}_{\nu k}^{t'} - \left( \widetilde{P}_{\nu k}^{t'} + \widetilde{R}_{\nu k}^{t'} \right) = 0, \end{cases} \quad (k = 1, \dots, N_g; t' = \overline{1,3}). \quad (2.68)$$

Рівняння (2.68) є нелінійними рівняннями рівноваги СЕМО у напруженнях. Вони використовуються в кроковому алгоритмі розв'язування нелінійної задачі стійкості тонких неоднорідних оболонок при обчисленні «нев'язок» і «додаткових навантажень» для контролю точності, з якою наближені розв'язки лінеаризованої задачі задовольняють умовам рівноваги нелінійної системи.

Розв'язувальну систему нелінійних рівнянь (2.68) на кроці  $s$  математично можна розглядати як систему нелінійних рівнянь загального виду [13, 98]:

$$f_i(\{u'\}) = 0, \quad (i = \overline{1, N}), \quad (2.68')$$

де  $\{u'\} = \{u'_1, \dots, u'_N\}^T$  –  $N$ -вимірний вектор-стовпець, компоненти якого є вузлові узагальнені переміщення СЕМО в глобальній декартовій системі координат;  $f_i$  – функції дійсних змінних  $\{u'\}$ ;  $N$  – кількість невідомих, відповідно до (2.68)  $N = 3 \times 2 \times N_g$ .

При формуванні розв'язувальної системи лінеаризованих рівнянь СЕМО проблема узгодження різних змінних СЕО та СЕМ на підставі (2.59), (2.60) вирішується за наданою вище процедурою [13]:

$$\delta \widetilde{W}_{FE} = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \widehat{K}_{\nu\nu p_2 p_3}^{b' t'} v_{s_2 s_3}^{b'} \delta v_{p_2 p_3}^{t'} + \right. \quad (2.69)$$

$$+ \hat{K}_{\underline{uv} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{v}^{b'} \delta \underline{v}^{t'} + \hat{K}_{\underline{vu} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{v}^{b'} \delta \underline{v}^{t'} + \hat{K}_{\underline{vv} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{v}^{b'} \delta \underline{v}^{t'} \Big),$$

де

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\underline{uv} \ p_2 p_3}^{b' t'} &= \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} , & \hat{K}_{\underline{vu} \ p_2 p_3}^{b' t'} &= \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{a}_{p_2 p_3} + \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{b}_{p_2 p_3} , \\ \hat{K}_{\underline{vu} \ p_2 p_3}^{b' t'} &= \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{a}_{s_2 s_3} + \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{b}_{s_2 s_3} , \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\hat{K}_{\underline{vv} \ p_2 p_3}^{b' t'} = \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{a}_{s_2 s_3} \underline{a}_{p_2 p_3} + \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{a}_{s_2 s_3} \underline{b}_{p_2 p_3} + \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{b}_{s_2 s_3} \underline{a}_{p_2 p_3} + \hat{K}_{\underline{v\bar{v}} \ p_2 p_3}^{b' t'} \underline{b}_{s_2 s_3} \underline{b}_{p_2 p_3}$$

– коефіцієнти блоків лінеаризованої МЖ СЕМ, які віднесені до загальних невідомих  $\underline{v}^{t'}$  та  $\underline{v}^{t'}$  СЕО.

Остаточно для лінеаризованої задачі варіаційне рівняння Лагранжа (2.39) на поточному кроці навантаження набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \hat{M}_{\underline{uv} \ (k)l}^{b' t'} \underline{v}_l^{b'} + \hat{M}_{\underline{vu} \ (k)l}^{b' t'} \underline{v}_l^{b'} \right) - \left( \tilde{P}_{\underline{v} \ (k)}^{t'} + \frac{T}{\underline{v} \ (k)} \tilde{R}_{\underline{v} \ (k)}^{t'} \right) \right\} = 0 \\ & \left\{ \left( \hat{M}_{\underline{uv} \ (k)l}^{b' t'} \underline{v}_l^{b'} + \hat{M}_{\underline{vv} \ (k)l}^{b' t'} \underline{v}_l^{b'} \right) - \left( \tilde{P}_{\underline{v} \ (k)}^{t'} + \frac{T}{\underline{v} \ (k)} \tilde{R}_{\underline{v} \ (k)}^{t'} \right) \right\} = 0 , \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$(k = 1, \dots, N_g; \quad l = 1, \dots, N_g; \quad t' = \overline{1,3}).$$

де  $\hat{K}_{\underline{\xi\zeta} \ (k)l}^{b' t'}$  ( $\xi = \underline{u}, \underline{v}$ ;  $\zeta = \underline{u}, \underline{v}$ ) – коефіцієнти блоків лінеаризованої МЖ СЕМО ступінчасто-змінної товщини.

На кроці навантаження  $s$  система лінеаризованих рівнянь (2.71) у матричному вигляді записується так:

$$\left[ \hat{K} \right]_s \left\{ \underline{\mu}' \right\}_s = \left\{ \underline{Q} \right\}_s, \quad (2.71')$$

де

$[\hat{K}]$  – лінеаризована МЖ, компоненти якої визначаються за співвідношеннями (2.70);



$$\{Q\} = \{P\} + \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} \quad (2.71'')$$

– вектор приросту термомеханічного навантаження.

## **2.5 Комбінований алгоритм розв'язування задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях**

Розв'язання статичної нелінійної задачі стійкості пружної оболонки здійснюється на основі загальної лагранжевої постановці варіаційної задачі у приростах. На підставі такого підходу задача геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості тонкої пружної оболонки розв'язується інкрементальним (кроковим) методом, коли процес геометрично нелінійного деформування подається як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках термомеханічного навантаження  $P$ . На поточному кроці нова геометрія та передісторія НДС оболонки вважаються відомими. Кожному кроку навантаження відповідає (додатний або від'ємний) приріст параметра зовнішніх термомеханічних впливів  $\Delta P$ . Розв'язок статичної нелінійної задачі стійкості зазвичай подається як зв'язок параметра термомеханічного навантаження  $P$  з переміщеннями  $U$  характерної точки СЕМО у вигляді кривих «навантаження–прогин» (« $P-U$ ») [13, 35]. Ці діаграмами відображають поведінку оболонки в процесах нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки. У роботі, за верхнє критичне навантаження приймається величина  $P$ , яка відповідає за діаграмою « $P-U$ » першій верхній критичній точці, тобто першому максимуму кривої « $P-U$ ». Відбувається втрата стійкості оболонки «у великому». Цей процес супроводжується різким переходом від одного стійкого рівноважного стану оболонки до іншого. Наявність у докритичному стані на кривій « $P-U$ » точки розгалуження, визначає в цій точці втрату стійкості оболонки «у малому». У цьому випадку відбувається плавна зміна НДС, а за критичне навантаження приймається величина навантаження, яка відповідає першій точці біфуркації [13, 35].

У реальних умовах оболонкові конструкції можуть знаходитись під дією статичних навантажень різної природи. В алгоритмі, дія на оболонку механічних (силових)  $Q \stackrel{def}{=} \{P\}$  і температурних (теплових)  $T \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{matrix} T \\ P \end{matrix} \right\}$  полів розглядається як спільний процес навантаження, що характеризується загальним параметром  $P = P(Q, T)$ . В алгоритмі ця залежність задається як функція, що описує дію прикладеного термомеханічного навантаження. Такий підхід дозволяє розглядати різні режими термомеханічного навантаження, незалежно від їх складності [81, 170].

Розрахунок стійкості оболонкової конструкції математично зводиться до розв'язування системи нелінійних рівнянь МСЕ (2.68 або 2.68') високого порядку. Алгоритм [13] розв'язування задачі нелінійного деформування та стійкості оболонки базується на поєднанні методу продовження розв'язку за параметром [47, 140] та модифікованої ітераційної процедури Ньютона-Канторовича [121].

Реалізація методу продовження за параметром зводиться до переходу від безпосереднього розв'язання системи нелінійних рівнянь до розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з неперервним параметром фіктивного часу  $t$ , які за формою збігаються з поданням системи (2.39) у лінеаризованому вигляді [13, 98]. При такому підході параметр фіктивного часу  $t$  пов'язується з кроком навантаження  $s$ . Дискретним моментам часу  $t = s$  відповідає параметр продовження розв'язку  $\lambda_s = \lambda(t_s)$ . Побудований на цій основі кроковий алгоритм, відповідно до розрахункової схеми [98], виконується за наступним сценарієм:

$$\left[ \hat{K}_s^1 \right] \left\{ u_s^{j+1} \right\} = \left[ \hat{K}_s^1 \right] \left\{ u_s^j \right\} - \left\{ R_s^j(\lambda(t)) \right\} \Delta t, \quad (2.72)$$

де

$[\hat{K}_s^{-1}]$  – лінеаризована МЖ конструкції, що обчислюється на першій ітерації  $s$ -го кроку навантаження;  $\{R_s^j(\lambda(t))\} = \{f_i(\{u_s^j\}, \lambda(t))\}^T$  ( $i = \overline{1, N}$ ) – вектор нев'язок системи розв'язувальних рівнянь на кроці  $\lambda_s = \lambda(t)$ ;  $j$  – номер ітерації;  $\Delta t = 1$  – крок за фіктивним часом  $t$ ;  $\{u_s^0\}$  – початкова умова, яка екстраполюється в ітераційній схемі (2.72) за розв'язком  $\{u_{s-1}^0\}$  попереднього кроку.

За формою ітераційна схема (2.72) збігається з відомою ітераційною процедурою модифікованого метода Ньютона – Канторовича [121]. Після кожного приросту параметра продовження розв'язку  $\lambda_s$ , виконується ітераційна процедура за схемою (2.72). Ітераційна процедура здійснюється до виконання умови збіжності, яка визначається [121] як малість квадрата норми вектора нев'язки системи нелінійних рівнянь (2.68):  $\|\{R^j\}\|^2 \leq \eta$ , де  $\eta$  – задана мала величина, що визначає похибку розв'язку. Якщо умова виконується, тоді отриманий розв'язок  $\{u_s\} = \{u_s\}^{j+1}$  приймається за розв'язок вихідної нелінійної системи (2.68) на кроці навантаження  $s$ . На наступному  $(s+1)$ -му кроці цей розв'язок приймається за вихідне нульове наближення  $\{u_{s+1}^0\}$  в ітераційній процедурі (2.72).

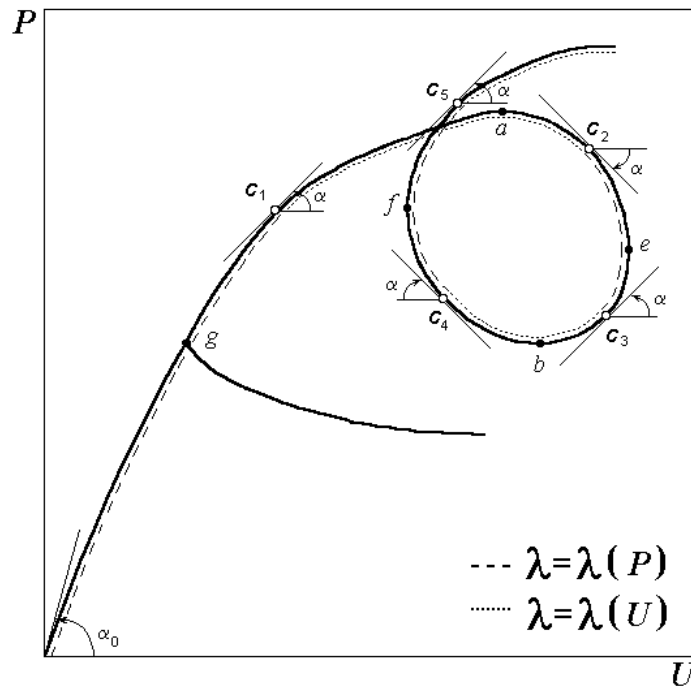


Рис. 2.9. Комбінований алгоритм розв'язування задачі геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки оболонки

В алгоритмі, параметром продовження розв'язку  $\lambda$  є або параметр поля зовнішніх термомеханічних вузлових навантажень  $P$  (наприклад, інтенсивність тиску, значення зосередженої сили, параметр теплового поля, параметр спільного термомеханічного навантаження тощо), або вибране алгоритмом переміщення  $U$  характерного вузла СЕМО, у якому на попередньому кроці приріст модуля вектора вузлового переміщення був найбільшим [13, 83]. Необхідність такої зміни параметра продовження розв'язку ( $\lambda = \lambda(P)$  на  $\lambda = \lambda(U)$  і навпаки) виникає в околі особливих точок діаграм « $P-U$ » (рис. 2.9). На рисунку ділянки кривих « $P-U$ », на яких як параметр продовження розв'язку є параметр термомеханічного навантаження  $\lambda = \lambda(P)$ , супроводжуються пунктирною лінією ( $0-c_1, c_2-c_3, c_4-c_5$ ), а ділянки, де параметром продовження розв'язку є переміщення характерного вузла  $\lambda = \lambda(U)$  – точками ( $c_1-c_2, c_3-c_4, c_5-$ ) [80, 81].

Прийнятий інкрементний підхід до розв'язання нелінійної задачі стійкості оболонкової конструкції дає змогу одночасно аналізувати геометрично нелінійне

деформування оболонки та на кожному кроці (в кожні моменти) термомеханічного навантаження визначати частоти та форми її власних коливань з урахуванням переднапруженого деформованого стану.

## **2.6 Двохетапний алгоритм комплексного розв'язування задач стійкості та власних коливань багат шарових оболонок при термомеханічних навантаженнях**

Вивчення динамічної поведінки пружних оболонкових систем має важливе значення при розрахунках і проектуванні авіаційної та космічної техніки, енергетичного обладнання, будівельних конструкцій тощо. Проведення модального аналізу оболонки при дослідженні роботи конструкції є важливою проблемою, оскільки частоти і форми власних коливань є одними з головних динамічних характеристик будь-якої пружної системи. Особливо це стосується дослідження власних коливань оболонок з урахуванням їх переднапруженого і деформованого станів. У цьому контексті виникають обчислювальні та методичні труднощі, що пов'язані з розробкою методів комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок, які мають складну структуру. Проте, використання прийнятого інкрементного підходу значно спрощує розв'язання поставленої задачі. Він дає змогу на кожному кроці (в кожні моменти термомеханічного навантаження) комплексно аналізувати геометрично нелінійне деформування оболонок і визначати частоти та форми їх власних коливань. За таким інтегративним підходом на кожному кроці навантаження є можливість при проведенні модального аналізу враховувати новий деформований стан оболонки та напруження, накопичені на попередніх кроках.

Зазвичай, побудова рівнянь руху та опис НДС оболонки базуються на загальних варіаційних принципах механіки. Рівняння руху оболонки будуються на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Даламбера [10, 34, 41]. За цим принципом вважається, що тіло, яке деформується

(рухається), у кожний момент часу знаходиться у стані рівноваги, якщо до всіх діючих активних сил додати сили інерції [11, 41, 148]. Для суцільного середовища, сили інерції визначаються як вектор  $\{F^{in}\}$ , який за величиною дорівнює добутку питомої густини матеріалу  $\rho$  на її прискорення  $\{\ddot{u}\}$  і має протилежний до прискорення напрям:

$$\{F^{in}\} = -\rho \left\{ \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \right\} = -\rho \{\ddot{u}'\}, \quad (2.73)$$

де точка визначає диференціювання за часом.

Після додавання сил інерції (2.73) до масових сил у варіаційне рівняння Лагранжа (2.39), отримується рівняння руху оболонки у скінченноелементному вигляді:

$$\sum_{FE} \left( \delta W_{FE} - (\delta F_{FE}^{in} + \delta A_{FE}) \right) = 0, \quad (2.74)$$

де  $\delta F_{FE}^{in}$ ,  $\delta W_{FE}$  та  $\delta A_{FE}$  – робота сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ, відповідно. Силами демпфірування – нехтується.

Враховуючи (2.40), маємо:

$$\sum_{FE} \left( \delta \bar{W}_{FE} - \left( \delta F_{FE}^{in} + \delta W_{FE}^T + \delta A_{FE} \right) \right) = 0. \quad (2.74')$$

На базі прийнятого підходу, віртуальна робота сил інерції СЕ на кроці навантаження  $s$  визначається так:

$$\delta F_{FE}^{in} = - \int_{V_{FE}} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u^{k'} dV_{FE} = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \sqrt{g} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u^{k'} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.75)$$

де вузлові переміщення  $u^{k'}$  є функціями часу.

Співвідношення для обчислення віртуальної роботи  $\delta \bar{W}_{FE}$  для лінеаризованої задачі наведено в підрозділі 2.3.

Після інтегрування і лінеаризації рівняння (2.74') за звичними для МСЕ процедурами та виконання низки перетворень, отримується остаточний його дискретний аналог у матричній формі:

$$[M] \{ {}^t \ddot{u}' \} + [K] \{ {}^t u' \} - \{ {}^t P \} = 0, \quad (2.76)$$

де  $\{^t u'\}$ ,  $\{^t \ddot{u}'\}$  –  $N$ -вимірні вектори вузлових переміщень і прискорень, відповідно, для дискретної моделі конструкції в декартовій системі координат;  $N$  – загальне число ступенів свободи моделі;  $[M]$  – матриця мас СЕМО;  $[K]$  – лінеаризована МЖ СЕМО;  $\{^t P\}$  – вектор узагальнених термомеханічних вузлових навантажень; залежність від часу розглядуваних величин тут і далі показується лівим верхнім індексом « $t$ ».

Система (2.76) доповнюється початковими умовами, які визначаються у вихідний момент часу (без втрати загальності – у нульовий момент часу)

$$\{^t u'\}_{t=0} = \{^0 u'\}, \quad \{^t \dot{u}'\}_{t=0} = \{^0 \dot{u}'\}. \quad (2.76')$$

Для задач щодо вільних коливань конструкції (відсутність роботи зовнішніх і внутрішніх навантажень), при яких зміна у часі параметрів НДС оболонкової конструкції відбувається за гармонічним законом, рівняння (2.76) набувають вигляду:

$$[K]\{u'\} - \omega^2 [M]\{u'\} = 0, \quad (2.77)$$

де  $\omega$  – кутова частота коливань оболонки [10].

Співвідношення (2.77) є системою  $N$ -лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора  $\{u'\}$ . З цих рівнянь визначаються частоти та форми власних коливань конструкції. Для розв'язання задачі (2.77) існує досить велика кількість методів. На практиці, частіше всього, викликає інтерес не весь спектр коливань, а лише його нижня частина. Тобто, достатньо обмежитися лише частиною спектру, що відповідає мінімальним  $\omega_i$ . Для розв'язання цієї проблеми (її називають частковою) власних частот, часто застосовують методи ітерації підпросторів [41, 70].

Для забезпечення збіжності розв'язків динамічної задачі використовується узгоджена матриця розподілених мас. Матриця мас СЕ  $[M]_{FE}$ , яка характеризує інерційні властивості елемента [12], отримується з (2.75). Для моделювання оболонки застосовується універсальний тривимірний ізопараметричний СЕ об'ємом  $V_{FE}$  з масовою густиною  $\rho = \rho(x^i)$ . За аналогією до прийнятого

полілінійного закону зміни функцій координат і переміщень в об'ємі СЕ (2.26), функції прискорень подаються у такий самий спосіб:

$$\begin{aligned} \{ {}^t \ddot{u}^{k'} \} (x^1, x^2, x^3) &= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} F(x^i, s_i) \{ {}^t \ddot{u}^{k'} \}_{s_1 s_2 s_3}, \\ F(x^i, s_i) &= \prod_{k=1}^3 \left( s_{(i)} x^{(i)} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Процедура інтегрування (2.75) здійснюється за місцевими координатами від  $x^i = -\frac{1}{2}$  до  $x^i = +\frac{1}{2}$ , з урахуванням багат шарової структури СЕ та вважаючи величину  $\sqrt{g}$  сталою в його межах. Для отримання коефіцієнтів узгодженої матриці мас застосовуються системно подібні процедури, що виконувалися при побудові матриці жорсткості. Простий трилінійний вигляд функцій форми (2.26) та (2.78) дав змогу виконати інтегрування аналітично:

$$\begin{aligned} \delta F_{FE}^{in} &= -\sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{a_{n+1}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \rho_n \{ {}^t \ddot{u}^{k'} \} \delta^t u^{k'} dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \{ {}^t \ddot{u}^{k'} \}_{s_1 s_2 s_3} \delta^t u_{p_1 p_2 p_3}^{k'} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1} - a_n) + (s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1}^2 - a_n^2) + 4s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

де  $a_n$  та  $a_{n+1}$  – координати  $x^1$  вузлових точок, розміщених відповідно на нижній та верхній границях  $n$ -го шару СЕ; враховуючи багат шаровість СЕ, густина  $\rho$  приймається ступінчасто-сталою функцією координати  $x^1$ :  $\rho = \rho(x^1) = \rho_n, a_n \leq x^1 \leq a_{n+1}$ .

Переходячи за формулами (2.47) від вузлових змінних  $u_{p_1 p_2 p_3}^{k'}$  і  $\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  на обмежувальних поверхнях СЕ до розв'язувальних вузлових функцій  $u_{p_2 p_3}^{k'}$ ,  $v_{p_2 p_3}^{k'}$  і  $\ddot{u}_{p_2 p_3}^{k'}$ ,  $\ddot{v}_{p_2 p_3}^{k'}$  на його серединній поверхні, варіація  $\delta F_{FE}^{in}$  подається так:



$$\delta F_{FE}^{in} = - \sum_{\substack{s_2, s_3 = \pm 1 \\ p_2, p_3 = \pm 1}} \left( m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{u}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{u}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + \right. \\ \left. + m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{v}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{v}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} \right). \quad (2.80)$$

Коефіцієнти чотирьох блоків узгодженої матриці мас СЕ є:

$$m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} = \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n h_n = (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \bar{\rho}, \\ m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} = \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n h_n x_{O_n}^1 = (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}, \quad (2.81) \\ m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} = \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n h_n x_{O_n}^1 = (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} = \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} = (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}.$$

В (2.81) введенні такі позначення:

$$\bar{\rho} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n h_n, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n h_n x_{O_n}^1, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3}.$$

Відмітимо, що матриця мас  $[M]_{FE}$  є симетричною, має розмірність  $24 \times 24$  та за своєю структурою є подібною до матриці жорсткості цього ж СЕ.

Вираз (2.80) варіації  $\delta F_{FE}^{in}$  для СЕМ також корегується за співвідношеннями, що відповідають залежностям (2.61). Для узагальнених вузлових прискорень СЕМ маємо:

$$\tilde{\ddot{u}}_{p_2 p_3}^{k'} = \ddot{u}_{p_2 p_3}^{k'} + a_{p_2 p_3} \ddot{v}_{p_2 p_3}^{k'}, \quad \tilde{\ddot{v}}_{p_2 p_3}^{k'} = b_{p_2 p_3} \ddot{v}_{p_2 p_3}^{k'}. \quad (2.82)$$

Остаточно  $\delta F_{FE}^{in}$  СЕМ знаходиться через вузлові переміщення  $v_{p_2 p_3}^{k'}$ ,  $v_{p_2 p_3}^{k'}$  та прискорення  $\ddot{u}_{p_2 p_3}^{k'}$ ,  $\ddot{v}_{p_2 p_3}^{k'}$ , які віднесені до серединної поверхні СЕО:

$$\delta^t F_{FE}^{in} = - \sum_{\substack{s_2, s_3 = \pm 1 \\ p_2, p_3 = \pm 1}} \left( \tilde{m}_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{u}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + \tilde{m}_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}}^{s_2 s_3} \overset{t}{\ddot{u}}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + \right.$$

$$\left. + \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} + \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta^t v_{p_2 p_3}^{k'} \right\}, \quad (2.83)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} &= \tilde{m}_{\ddot{u}u_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}}, & \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} &= \tilde{m}_{\ddot{u}u_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} a_{p_2 p_3} + \tilde{m}_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} b_{s_2 s_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} &= \tilde{m}_{\ddot{u}u_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} a_{s_2 s_3} + \tilde{m}_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} b_{p_2 p_3}, & & \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} &= \tilde{m}_{\ddot{u}u_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} a_{s_2 s_3} a_{p_2 p_3} + \tilde{m}_{\ddot{u}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} a_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} a_{p_2 p_3} b_{s_2 s_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}v_{p_2 p_3}^{s_2 s_3}} b_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \end{aligned} \quad (2.84)$$

– коефіцієнти узгодженої матриці мас СЕМ неоднорідної оболонки, які віднесені до прийнятих загальних змінних СЕО.

Методика модального аналізу оболонки з урахуванням переднапруженого стану (2.56) ґрунтується на співвідношеннях, в яких на кожному кроці навантаження враховуються накопичені на попередніх  $s-1$  кроках напруження

$$\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} = \sum_{l=1}^{s-1} \Delta_l \sigma^{ij}. \text{ Тому в алгоритмі, що реалізує модальний аналіз оболонки, на}$$

поточному кроці застосовується інша форма подання лінеаризації  $\delta \bar{W}_{FE}$ , ніж описано в підрозділі 2.3.

Віртуальна робота внутрішніх сил від приросту деформацій  $\delta \bar{W}_{FE}$  (2.58) при врахуванні симетрії компонент тензора пружних сталих  $C^{ijkl}$  записується так:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE} &= \int_{V_{FE}} \left[ C^{ijkp} \overset{lin}{\varepsilon}_{kp} \delta \overset{lin}{\varepsilon}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \delta \overset{nel}{\varepsilon}_{ij} \right] dV = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \overset{lin}{\varepsilon}_{kp} \delta \overset{lin}{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \delta \overset{nel}{\varepsilon}_{ij} dV = \\ &= \int_{V_{FE}} \left[ C^{ijkp} \frac{1}{2} \left( C_l^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} + C_k^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^p} \right) \frac{1}{2} \delta \left( C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^j} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} + \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \right) \right] dV = \quad (2.85) \\ &= \int_{V_{FE}} \left( C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ik} g^{pj} \right) C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dV = \int_{V_{FE}} \tilde{C}^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dV = \end{aligned}$$

$$= \int_{V_{FE}} \tilde{C}^{ijkp} \varepsilon_{kp}^{lin} \delta \varepsilon_{ij}^{lin} dV,$$

де

$$\tilde{C}^{ijkp} = C^{ijkp} + \sigma_{s-1}^{ik} g^{pj}. \quad (2.86)$$

Залежність (2.85) за формою подання збігається з виразом для варіації нескінченно малих деформацій оболонки з ненапруженим станом. Дійсно:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE} &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^{lin} \delta \varepsilon_{ij}^{lin} dV = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dV = \\ &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^{lin} \delta \varepsilon_{ij}^{lin} dV. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Віртуальна робота внутрішніх сил  $\delta \bar{W}_{FE}$  для ненапруженого (2.87) та переднапруженого (2.85) станів збігаються за виглядом, якщо компоненти тензора пружних сталей  $C^{ijkl}$  відкорегувати за формулою (2.86), в якій враховуються накопичені на  $s-1$  кроках напруження. У цьому випадку процес формування матриці жорсткості скінченних елементів не відрізняється від аналогічного процесу для ненапружених елементів. Єдине, що підлягає корегуванню, це блок, який визначає компоненти тензора пружних сталей відповідно до (2.86). Такий підхід дає змогу врахувати переднапружений стан оболонки, а алгоритмічна реалізація виконується практично без збільшення кількості операцій обчислення, оскільки корегування компонент тензора пружних сталей (2.86) складає незначну частину обчислень, що виконуються.

Методика врахування переднапруженого і деформованого станів неоднорідної оболонки, при визначенні її власних коливань на кожному кроці навантаження, складається з двох етапів. Суть *двохетапної методики розрахунку оболонки на стійкість і власні коливання* на кроці термомеханічного навантаження полягає у такому (рис. 2.10).

На першому етапі  $s$ -го кроку навантаження розв'язується статична задача геометрично нелінійного деформування оболонки за алгоритмом (2.72). На цьому етапі, при відповідних приростах навантаження  $\Delta P_s$ , визначається НДС

оболонки. Обчислюється приріст поля переміщень  $\{u_s^{i'}\}$ , знаходиться деформована форма СЕМО (поле нових координат  $\{x_s^{i'}\} = \{x_{s-1}^{i'}\} + \{u_s^{i'}\}$ ) та приріст поля напружень  $\{\sigma_s^{ij}\} = \{\sigma_{s-1}^{ij}\} + \{\Delta\sigma_s^{ij}\}$ .

На другому етапі поточного кроку  $s$  НДС, що отриманий, приймається за початковий рівноважний стан, відносно якого відбуваються малі коливання оболонки. Для визначеної на першому етапі нової форми оболонки і при наявності її переднапруженого стану, навантаження «знімається» (тобто приймається рівним нулю), розв'язується задача на власні коливання. Згідно з цим підходом, модальний аналіз оболонки виконується для кожного моменту  $s$  крокового навантаження. Звичайно, кількість частот коливань, які необхідно визначити, задається як вихідна інформація заздалегідь. Алгоритм для визначення спектру нижчих частот та векторів власних коливань оболонок з неоднорідною структурою реалізується за допомогою методу ітерації підпростору [10, 70, 147]. На цьому етапі (для кожного кроку навантаження), власні частоти та власні форми коливань обчислюються до появи від'ємного значення найнижчої частоти. Згідно з динамічним критерієм, навантаження, при якому нижча частота власних коливань оболонки стає нульовою, визначає критичне навантаження. Як відомо, за навантажень, що досягають критичних значень, деформована система втрачає здатність здійснювати коливальні рухи [35]. Отримане значення навантаження можна прийняти за критичне. На наступних кроках зростання навантаження модальний аналіз оболонки не проводиться, а досліджується лише її закритична поведінка.

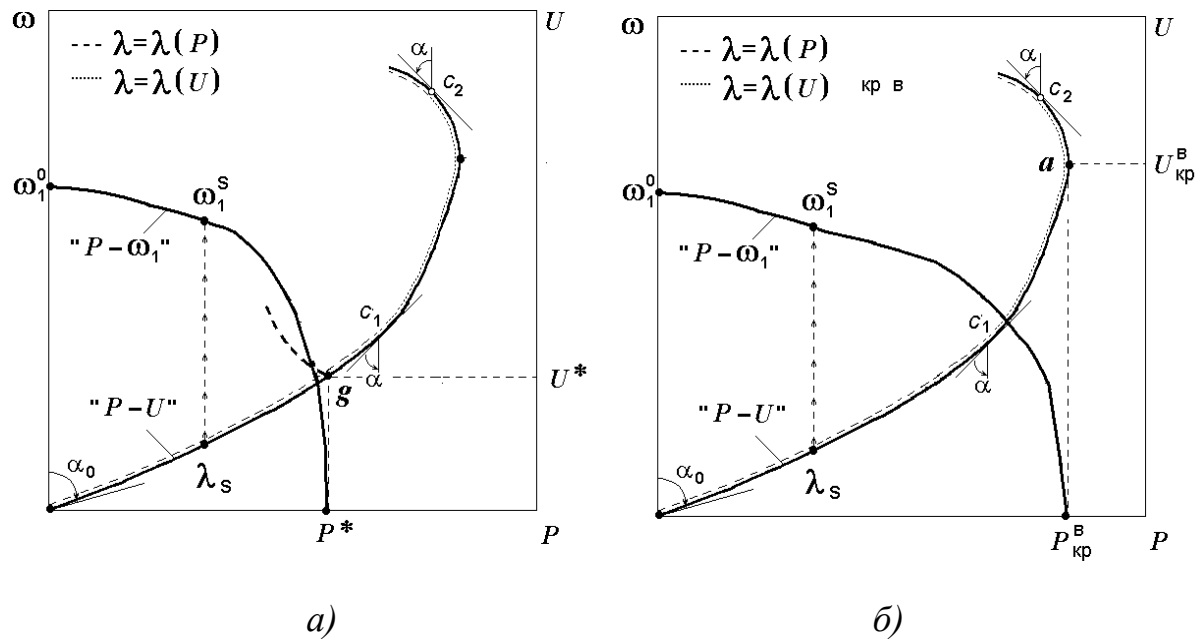


Рис. 2.10. Двохетапний алгоритм розв'язання задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань гнучких оболонок

Двохетапний алгоритм аналізу стійкості та власних коливань оболонок при термомеханічних навантаженнях пояснений на рис. 2.10. Рисунок є модернізацією алгоритму (рис. 1.9). Він відповідає комплексному дослідженню стійкості та власних коливань оболонки при дії термомеханічного навантаження загального виду. В алгоритмі процедура модального аналізу реалізується у кожний момент  $s$  приросту навантаження, якому відповідає значення параметра навантаження  $\lambda_s$ . Перевіряється умова про необхідність проведення розрахунків на власні коливання. Якщо умова виконується, тоді у загальному алгоритмі розв'язання задачі відбувається перехід у модуль, що реалізує модальний аналіз оболонки – знаходяться “ $i$ ” власних частот  $\omega_i^s$  (на рис. 2.10  $\omega_1^s$ ) і відповідних форм коливань. Результат розрахунку подається як діаграма “навантаження  $P$  – нижча частота  $\omega_1$ ” (“ $P - \omega$ ”). Якщо умова не виконується, тоді відбувається перехід у модуль продовження загального крокового алгоритму розв'язування нелінійної задачі стійкості. Якщо на кривій “ $P - U$ ” у докритичній області виявляється точка розгалуження “ $g$ ”, якій відповідає значення навантаження  $P^*$ , при якому  $\omega_1 = 0$  (рис. 2.10, а), тоді згідно з динамічним критерієм стійкості

це навантаження  $P^*$  можна прийняти за верхнє критичне. При відсутності точки розгалуження, точка максимуму “ $a$ ” кривої “ $P-U$ ” відповідає верхньому критичному навантаженню  $P_{кр}^6$  (рис. 2.10, б) як за статичним критерієм, так і за динамічним ( $\omega_1 = 0$ ).

*Виявлення точок розгалуження розв’язків.* Алгоритм, що побудований за використання МССЕ, дає змогу визначати можливу появу точки розгалуження розв’язку на діаграмі “ $P-U$ ” (звичайно з точністю приросту крокового навантаження). Поява точок розгалуження « $g$ » пов’язана з виникненням в процесі нелінійного деформування оболонки близьких форм рівноваги. З математичної точки зору, ця точка характеризується виродженням визначника лінеаризованої матриці системи розв’язувальних рівнянь. Поведінка оболонки в околі точок розгалуження « $g$ » характеризується плавною зміною НДС. Цей процес відповідає втраті стійкості у малому, а за критичне навантаження може бути прийнята величина навантаження  $P^*$ , що відповідає першій точці біфуркації. Для більш точного виявлення на діаграмі “ $P-U$ ” точки розгалуження застосовується якісна теорія. Для коректного визначення можливої точки розгалуження « $g$ » застосовується методика, за якою у вихідний стан оболонки вноситься початкове мале збурення розв’язку, що може перетворити точку розгалуження на критичну. Найчастіше це може бути початкове мале несиметричне збурення геометрії оболонки у вигляді початкової недосконалості її ідеальної форми. Як показали дослідження, вдалим є внесення збурення, що відповідає нижній формі власних коливань оболонки, знайденої за кривою “ $P-U$ ” на підході до точки розгалуження “ $g$ ”. Іншими варіантами збурення можуть бути збурення, що вносяться в граничні умови, в параметри навантаження та інше.

Зазначимо, що на відміну від плавної зміни НДС оболонки в точці розгалуження “ $g$ ” (рис. 2.10, а) в точці максимуму “ $a$ ” кривої “ $P-U$ ” (рис. 2.10, б) НДС оболонки характеризується перескоком до несуміжного

(віддаленого) стану – проклацування форми деформування оболонки. Цей процес відповідає втраті стійкості у великому. В цьому випадку за критичне навантаження приймається величина навантаження, що відповідає першій верхній критичній точці.

Для демонстрації достовірності та збіжності розв'язків, що отримуються при модальному аналізі оболонок, розглядається тестова задача щодо власних коливань консольної циліндричної панелі (рис. 2.11).

Панель жорстко закріплена по криволінійному контуру. Задача та вхідні дані взяті з роботи [41]:  $L = S = 0,3048$  м, радіус кривизни  $R = 0,6096$  м, товщина панелі  $h = 0,003048$  м; модуль пружності  $E = 0,2 \cdot 10^{12}$  Н/м<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , питома густина  $\rho = 0,704 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>.

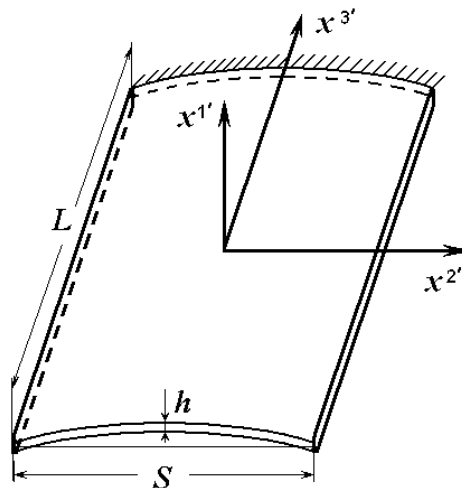


Рис. 2.11. Консольна циліндрична панель

Аналіз результатів дослідження збіжності розв'язків задачі для восьми нижчих частот показав, що розв'язки збігаються вже при сітці  $10 \times 10$  СЕ у порівнянні з розв'язком для СЕМО з сіткою  $30 \times 30$  СЕ. Для СЕМО з сіткою  $15 \times 15$  СЕ різниця не перевищує 2% [11].

Значення для п'яти власних частот коливань панелі, що отримані за використання МССЕ, порівнюються з даними експерименту [154, 178], результатами розрахунків, отриманих автором за допомогою відомих

програмних комплексів (ПК) ЛІРА-САПР [92], SCAD [184], NASTRAN [120], та даними інших авторів [151] (табл. 2.1). Отримано гарний збіг значень частот, одержаних за МССЕ, з даними експерименту та іншими результатами.

Таблиця 2.1

Метод розрахунку	$\omega_1$ , Гц	$\omega_2$ , Гц	$\omega_3$ , Гц	$\omega_4$ , Гц	$\omega_5$ , Гц
<b>20×20 СЕ МССЕ</b>	89,658	145,23	256,91	359,28	401,74
<b>Експеримент</b>	<b>85,60</b>	<b>134,50</b>	<b>258,90</b>	<b>350,60</b>	<b>395,20</b>
20×20 СЕ NASTRAN	89,2368	144,65	253,44	355,32	395,39
20×20 СЕ SCAD	91,0345	146,94	256,02	364,03	404,81
20×20 СЕ ЛІРА-САПР	89,4434	145,02	256,53	357,67	400,39
М.А. Bossak, О.С. Zienkiewicz	88,30	142,80	257,60	369,20	441,80

Отримані відповідні форми власних коливань консольної циліндричної панелі відповідають формам коливань, які одержані при розрахунках за допомогою використання ПК NASTRAN.

## 2.7 Основні висновки по розділу

1. Викладені основні теоретичні положення, на яких побудована скінченноелементна методика дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних неоднорідних оболонок при складній (комбінованій) дії термомеханічного навантаження. З єдиних методологічних позицій моделюються різні класи неоднорідних оболонок: з багат шаровою структурою матеріалу, в тому числі композитного; сталої, гладко- та ступінчато-змінної товщини; з ребрами, накладками, каналами, виїмками, отворами: зі зламами серединної поверхні тощо.



2. Метод комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок з неоднорідною структурою базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та використанні моментної схеми скінченних елементів. Розглядається модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана. Розглядаються великі переміщення при малих деформаціях, які визначаються тензором скінченних деформацій Коші-Гріна. Температура за об'ємом оболонки прийнята відомою та незалежною від НДС функцією координат, а термопружні властивості матеріалу є сталими, що не залежать від температури. Тонка неоднорідна оболонка за товщиною моделюється одним тривимірним ізопараметричним SE з полілінійними функціями форми. Використовується моментна схема скінченних елементів.

3. Дослідження геометрично нелінійного деформування оболонки ґрунтується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах. У цьому підході процес деформування представляється як послідовність рівноважних станів, що змінюються при достатньо малих приростах навантаження. Задача стійкості розв'язується кроковим методом з використанням ітераційної процедури Ньютон-Канторовича та самокорегуванням параметрів алгоритму на кроці навантаження. Дія на оболонку статичних механічних і температурних навантажень розглядається як єдиний процес, який задається у вигляді функції.

4. Розроблено методику аналізу власних коливань конструкції з урахуванням переднапруженого стану.

5. Для дослідження стійкості та власних коливань оболонок під впливом статичних термомеханічних навантажень розроблено комплексний підхід, який реалізується через двохетапний алгоритм на кожному кроці навантаження.

Перший етап включає розв'язання статичної задачі геометрично нелінійного деформування оболонки. Ця задача вирішується інкрементальним методом і характеризується діаграмою «навантаження–прогин» для певної точки оболонки.

На другому етапі проводяться розрахунки на власні коливання. Модальні характеристики оболонки обчислюються на кожному кроці термомеханічного навантаження. Результатом розрахунку є діаграма «навантаження–частота», частоти та форми власних коливань на кроці навантаження. За прийнятим підходом момент втрати стійкості конструкції може бути визначений одночасно за статичним і динамічним критеріями.

### РОЗДІЛ 3

## ВРАХУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТРАДИЦІЙНОГО ТА КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК

На основі існуючої скінченноелементної моделі багатошарової оболонки зі ступінчасто-змінною товщиною розроблено методику моделювання властивостей односпрямованого волокнистого композитного матеріалу (КМ), яка заснована на методі структурування неоднорідностей матеріалу за товщиною та в площині. Створено нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового скінченного елемента, використання якого спрямоване на аналіз поведінки пружних багатошарових оболонок з композитних матеріалів. Універсальний тривимірний ізопараметричний восьмивузловий багатошаровий SE суцільного середовища [13] покладено в основу розробки SE нової модифікації. Матеріалами шарів нового SE є односпрямовані волокнисті КМ. Односпрямовані волокнисті композити характеризуються ефективними та унікальними теплофізичними властивостями, що дозволяє широко використовувати їх у провідних галузях спеціальної техніки, таких як ракето-, авіа-, суднобудування тощо [55, 78, 85, 102, 117, 136, 142].

Останнім часом спостерігається значне зростання застосування безпілотних літальних апаратів у цивільній та мілітарній сферах. Завдяки своїй легкій питомій вазі (що дозволяє збільшити корисне навантаження), стійкості до корозії і втоми, низького коефіцієнту теплового розширення, КМ широко використовуються при виготовленні безпілотних літальних апаратів, замінивши собою традиційні матеріали, такі як алюмінієві сплави. Насамперед це відноситься до композитів, які мають шарувато-волокнисту структуру, для яких є типовою наявністю еластичних армованих шарів з різними фізико-механічними властивостями [55, 97]. Проблеми розрахунку НДС пружних багатошарових оболонок, матеріалами шарів яких є волокнисті КМ, привертають все більше

уваги дослідників, а створення цих методів інтенсивно розвивається [102, 117, 186, 188, 187, 196].

### **3.1 Моделювання фізико-механічних характеристик матеріалів шарів у скінченноелементній моделі оболонки**

В основу методу моделювання термопружних властивостей багатошарового матеріалу покладено два принципи: 1) структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за товщиною; 2) структурування – за планом. Ця процедура реалізується за допомогою застосування багатошарового тривимірного СЕ, який має додаткові змінні параметри (підрозділ 2.2) [11, 13, 130]. Організація структури неоднорідностей матеріалу по товщині оболонки здійснюється в межах СЕ та визначається типом пакета багатошарового матеріалу. Універсальний тривимірний СЕ, який застосовується при апроксимації різних ділянок оболонки, загалом, має довільну, але задану, кількість шарів, які жорстко зв'язані між собою без проковзування та відриву в монолітний пакет. У загальному випадку, шари універсального СЕ виконані з різних типів матеріалу, що визначає тип пакета його матеріалу.

Структурування матеріалу за планом зводиться до виділення в СЕМО ділянок, де матеріал симулюється відповідним типом пакету. Отже, при побудові СЕМО створюється можливість структурування неоднорідностей матеріалу оболонки як за планом, так і за товщиною, використовуючи необхідний тип пакету матеріалу. Кожен пакет має свої характеристики. До них відносяться: топологічні – це задана кількість шарів, геометричні – це їх товщини, фізико-механічні – це тип матеріалу, його термопружні властивості, об'ємна вага тощо.

Існуюча скінченноелементна методика побудови СЕМО спирається на використання в шарах СЕ традиційних матеріалів з найбільш поширеними варіантами симетрії, таких як ізотропні, трансверсально-ізотропні та ортотропні [4, 13, 90]. Розробка нової модифікації універсального тривимірного

багатошарового СЕ дозволила поширити методу побудови розрахункової СЕМО на використання в шарах односпрямованих волокнистих КМ, які за своїми властивостями значно відрізняються від традиційних матеріалів [130].

Загалом, односпрямовані волокнисті КМ, що складаються з пружних волокон пов'язаних матрицею, є неоднорідними за своєю фізичною природою. Проте, волокнисті композитні матеріали, завдяки своїй регулярній структурі з великою кількістю односпрямованих волокон, на підставі підходу В.В. Болотіна [25], можуть розглядатися як однорідне середовище. Цей підхід, який відомий як метод енергетичного згладжування, передбачає заміну неоднорідного (так званого гетерогенного) композиту еквівалентним однорідним (або інакше гомогенним) матеріалом. Механічні властивості останнього визначаються шляхом усереднення мікроструктурних характеристик компонентів за об'ємом. При цьому, усереднені властивості матеріалу залежать від розташування та форми волокон, об'ємного вмісту в матеріалі. Усереднені (макроскопічні) термопружні характеристики КМ отримали назву «ефективні фізико-механічні характеристики». В механіці композитів розроблено достатньо велику кількість підходів з врахування властивостей компонентів КМ, різних типів анізотропії, температурного розширення, умов контакту матриці та волокна, особливостей наявності перехідного шару, наявності пошкоджень тощо [71, 172]. Як правило, вибір того чи іншого методу визначення ефективних характеристик композитного матеріалу знаходиться у прямій залежності від точності кінцевого результату, а також прийнятної відповідності з даними експерименту.

Застосування прийнятого підходу до моделювання неоднорідного матеріалу дало змогу розширити функціональні можливості універсального тривимірного СЕ, що привело до створення його нової модифікації. Ця модифікація враховує фізико-механічні характеристики шарів багатошарового СЕ. Термопружні властивості кожного шару визначаються в обчислювальному комплексі через програмні засоби, на основі застосування відомих мікромеханічних моделей [11, 82, 130, 131], або використанні інших нових моделей, що будуть розроблені. Припускаючи, що волокнистий КМ шару СЕ

характеризується однорідною односпрямованою структурою, матеріал шару будемо розглядати як однорідний трансверсально-ізотропний, у якого площини ізоотропії є перпендикулярними до напрямку армування [82].

Таке врахування характеристик КМ вимагає детального аналізу можливостей і ефективності нового СЕ, а також перевірки точності розв'язків, що отримуються на його основі.

Відповідно до вихідних положень методики усі матеріали шарів СЕ, як традиційні, так і композитні, є лінійно-пружними з властивостями, які визначаються узагальненим законом Дюамеля-Неймана (2.12). При цьому, компоненти тензорів пружних сталих  $C^{ijkl}$  (2.9) та коефіцієнтів теплового розширення  $\alpha_{kl}$  (2.11) описуються у базисі місцевої системи координат  $x^i$ . Вони визначаються через відповідні компоненти  $C^{a''b''c''d''}$  та  $\alpha_{a''b''}$ , які задаються у триортонормованій системі координат  $x^{a''}$  (системі координат, у якій виконуються фізичні виміри), за допомогою формул перетворення [13, 23]:

$$C^{ijkl} = C_{a''}^i C_{b''}^j C_{c''}^k C_{d''}^l C^{a''b''c''d''}, \quad (3.1)$$

$$\alpha_{kl} = C_k^{a''} C_l^{b''} \alpha_{a''b''}, \quad (3.2)$$

де  $C_{a''}^i$  та  $C_k^{a''}$  – компоненти тензора перетворення координат місцевої  $x^i$  та триортонормованої  $x^{a''}$  систем. Вони визначаються відповідно до (2.2).

### **3.2 Визначення фізико-механічних характеристик традиційних матеріалів оболонки**

Серед найпоширеніших моделей традиційних матеріалів можна виділити моделі ізотропного, ортотропного та трансверсально-ізотропного матеріалів [13]. Ізотропний матеріал визначається тим, що його термопружні властивості є пружно-еквівалентними і однаковими в усіх напрямках. В місцевій системі координат  $x^i$  компоненти тензорів пружних сталих  $C^{ijkl}$  задаються формулою [13, 125]:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad (3.3)$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  і  $\mu$  визначаються через технічні сталі матеріалу ( $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  – модулі пружності, зсуву, коефіцієнт Пуассона):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.4)$$

Компоненти тензора коефіцієнтів теплового розширення  $\alpha_{kl}$  для ізотропного матеріалу визначаються залежністю [13, 125]:

$$\alpha_{kl} = \alpha g_{kl}, \quad (3.5)$$

де  $\alpha$  – технічна стала, яка називається коефіцієнтом лінійного розширення.

Ортотропний матеріал відрізняється тим, що його механічні та термічні властивості є незалежними в трьох взаємно перпендикулярних напрямках.

Компоненти тензорів  $C^{a''b''c''d''}$  та  $\alpha_{a''b''}$  встановлюються у триортонормованій системі координат  $x^{a''}$ , в якій виконуються фізичні виміри. Вони обчислюються відповідно до відомих співвідношень [3, 4, 90, 108, 115] за низкою технічних сталих:

$E_{1''}, E_{2''}, E_{3''}$  – модулі пружності при розтягуванні/стисненні за напрямком осей  $x^{a''}$ , відповідно;

$G_{1''2''}, G_{1''3''}, G_{2''3''}$  – модулі зсуву у координатних площинах  $x^{a''b''}$ ;

$\nu_{1''2''}, \nu_{1''3''}, \nu_{2''3''}$  – коефіцієнти Пуассона, що визначають скорочення в напрямку осі з другим індексом при розтягуванні за напрямком осі з першим індексом;

$\alpha_{1''}, \alpha_{2''}, \alpha_{3''}$  – коефіцієнти теплового розширення в напрямку осей  $x^{a''}$ , відповідно.

Технічні сталі ортотропного матеріалу пов'язані такими залежностями:

$$\begin{aligned} E_{2''}\nu_{1''2''} = E_{1''}\nu_{2''1''}, \quad E_{3''}\nu_{2''3''} = E_{2''}\nu_{3''2''}, \quad E_{1''}\nu_{3''1''} = E_{3''}\nu_{1''3''}, \\ \nu_{1''2''}\nu_{2''3''}\nu_{3''1''} = \nu_{2''1''}\nu_{1''3''}\nu_{3''2''}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

У триортонормованій системі координат  $x^{a''}$  ненульові компоненти тензорів  $C^{a''b''c''d''}$  та  $\alpha_{a''b''}$  обчислюються через відомі технічні сталі [13]:

$$\begin{aligned}
C^{1''1''1''} &= E_1''(1 - \nu_{2''3''}\nu_{3''2''})/\Delta, & C^{2''2''2''} &= E_2''(1 - \nu_{1''3''}\nu_{3''1''})/\Delta, \\
C^{3''3''3''} &= E_3''(1 - \nu_{1''2''}\nu_{2''1''})/\Delta, \\
C^{1''1''2''2''} &= C^{2''2''1''1''} = \\
&= E_2''(\nu_{1''2''} + \nu_{1''3''}\nu_{3''2''})/\Delta = E_1''(\nu_{2''1''} + \nu_{3''1''}\nu_{2''3''})/\Delta, \\
C^{1''1''3''3''} &= C^{3''3''1''1''} = \\
&= E_3''(\nu_{1''3''} + \nu_{1''2''}\nu_{2''3''})/\Delta = E_1''(\nu_{3''1''} + \nu_{2''1''}\nu_{3''2''})/\Delta, \\
C^{2''2''3''3''} &= C^{3''3''2''2''} = \\
&= E_3''(\nu_{2''3''} + \nu_{2''1''}\nu_{1''3''})/\Delta = E_2''(\nu_{3''2''} + \nu_{1''2''}\nu_{3''1''})/\Delta, \\
C^{1''2''1''2''} &= C^{2''1''1''2''} = C^{2''1''2''1''} = C^{1''2''2''1''} = G_{1''2''}, & (3.7) \\
C^{1''3''1''3''} &= C^{3''1''1''3''} = C^{3''1''3''1''} = C^{1''3''3''1''} = G_{1''3''}, \\
C^{2''3''2''3''} &= C^{3''2''2''3''} = C^{3''2''3''2''} = C^{2''3''3''2''} = G_{2''3''}, \\
\Delta &= 1 - 2\nu_{1''2''}\nu_{2''3''}\nu_{3''1''} - \nu_{1''2''}\nu_{2''1''} - \nu_{1''3''}\nu_{3''1''} - \nu_{2''3''}\nu_{3''2''}, \\
\alpha_{1''1''} &= \alpha_{1''}, & \alpha_{2''2''} &= \alpha_{2''}, & \alpha_{3''3''} &= \alpha_{3''}.
\end{aligned}$$

Модель ізотропного матеріалу (3.3), (3.5), що має лише три незалежні термопружні характеристики  $E, \nu, \alpha$ , отримується, коли термопружні властивості ортотропного матеріалу є однаковими за трьома головними напрямками пружності. Враховується, що модуль зсуву  $G$  і сталі  $E, \nu$  пов'язані залежністю (3.4).

Особливість трансверсально-ізотропного матеріалу полягає в тому, що його властивості значно відрізняються в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Цей тип матеріалу визначається тим, що він має головний напрямок пружності та площини ізоотропії, які нормальні до нього. Він має одну вісь, яка є віссю обертальної симетрії. Технічні сталі, що описують трансверсально-ізотропні матеріали, характеризуються наступними величинами:

$E, E'$  – модулі пружності при розтягуванні та стисненні в площині ізоотропії та в напрямку, перпендикулярному до неї;



$G = E/[2(1+\nu)]$ ,  $G'$  – модулі зсуву в площині ізоотропії та в площині, перпендикулярній до неї;

$\nu, \nu'$  – коефіцієнти Пуассона, що вказують на скорочення в площині ізоотропії при розтягуванні в цій площині та в напрямку, перпендикулярному до неї;

$\nu''$  – коефіцієнт Пуассона, який відображає зміну розмірів у напрямку, перпендикулярному до площини ізоотропії, при розтягуванні в цій площині;

Модель трансверсально-ізоотропного матеріалу, у якого площиною ізоотропії є площина  $x^{2''}x^{3''}$ , тобто яка проходить через осі  $x^{2''}$  та  $x^{3''}$ , можна отримати, якщо в (3.7) термопружні характеристики ортотропного матеріалу задати як трансверсально-ізоотропного [4, 13]:

$$\begin{aligned} E_{2''} = E_{3''} = E, \quad E_{1''} = E', \quad G_{2''3''} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G_{1''2''} = G_{1''3''} = G', \\ \nu_{2''3''} = \nu_{3''2''} = \nu, \quad \nu_{1''2''} = \nu_{1''3''} = \nu', \quad \nu_{2''1''} = \nu_{3''1''} = \nu' \frac{E}{E'}, \\ \alpha_{1''} = \alpha', \quad \alpha_{2''} = \alpha_{3''} = \alpha. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тоді ненульові компоненти тензорів пружних сталих  $C^{a''b''c''d''}$ , так визначаються через відомі технічні сталі:

$$\begin{aligned} C^{2''2''2''2''} = C^{3''3''3''3''} = E[1 - e(\nu')^2]/\Delta, \quad C^{1''1''1''1''} = E'(1 - \nu^2)/\Delta, \\ C^{2''2''3''3''} = C^{3''3''2''2''} = E[\nu + e(\nu')^2]/\Delta, \\ C^{1''1''2''2''} = C^{2''2''1''1''} = C^{1''1''3''3''} = C^{3''3''1''1''} = E\nu'(1 + \nu)/\Delta, \\ C^{2''3''2''3''} = C^{3''2''2''3''} = C^{3''2''3''2''} = C^{2''3''3''2''} = G, \\ C^{1''2''1''2''} = C^{2''1''1''2''} = C^{2''1''2''1''} = C^{1''2''2''1''} = \\ = C^{1''3''1''3''} = C^{3''1''1''3''} = C^{3''1''3''1''} = C^{1''3''3''1''} = G', \\ \Delta = (1 + \nu)[1 - \nu - 2e(\nu')^2], \quad e = E/E'. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Інші дві моделі трансверсально-ізоотропного матеріалу, коли площина ізоотропії лежить в площині  $x^{1''}x^{3''}$  або  $x^{1''}x^{2''}$ , визначаються за такою самою схемою [13].

### **3.3 Особливості моделювання термопружних властивостей волокнистих композитних матеріалів у скінченноелементній моделі оболонки**

Композити характеризуються широким спектром корисних і навіть певною мірою набором унікальних властивостей. Раціональне використання цих матеріалів дозволяє створювати ефективні конструкції з високим рівнем вагової досконалості та заданою анізотропією фізико-механічних властивостей. Успішне використання КМ у тонкостінних оболонкових конструкціях пов'язано з можливістю штучно створити матеріал із заданими необхідними властивостями, нівелювавши недоліки на етапі проектування матеріалу. Найбільш наочно це відображається на прикладі багат шарових односпрямованих волокнистих КМ. Отримання потрібних властивостей матеріалу пов'язане з управлінням його характеристиками, через зміну орієнтації волокон і поєднанні шарів з різних матеріалів у єдиний пакет. З таких матеріалів формують багат шарові композити, де кожен шар складається з матеріалу, в якому волокна орієнтовані в одному напрямку (рис. 3.1, а). Предметом механіки композитів є, насамперед, розробка моделей і методів для прогнозування властивостей КМ на основі відомих характеристик його компонентів. У випадку мікроструктурованого матеріалу, до якого відноситься волокнистий КМ, виділяються дві основні фази (компоненти): армуючий і матриця. Армуючими є одновимірні елементи, один з розмірів яких значно перевищує інші. Їх називають волокнами, а іноді – фібрами або наповнювачами. У дослідженнях розглядаються композити з безперервними волокнами, які є досить тонкими елементами матеріалу, наприклад, товщина волокон може коливатися в межах 5-300 мкм [76, 77]. Їхня роль полягає у сприйнятті напружень, що виникають під час зовнішніх навантажень, і забезпеченні необхідної жорсткості та міцності композитної конструкції у напрямку їх спрямування.

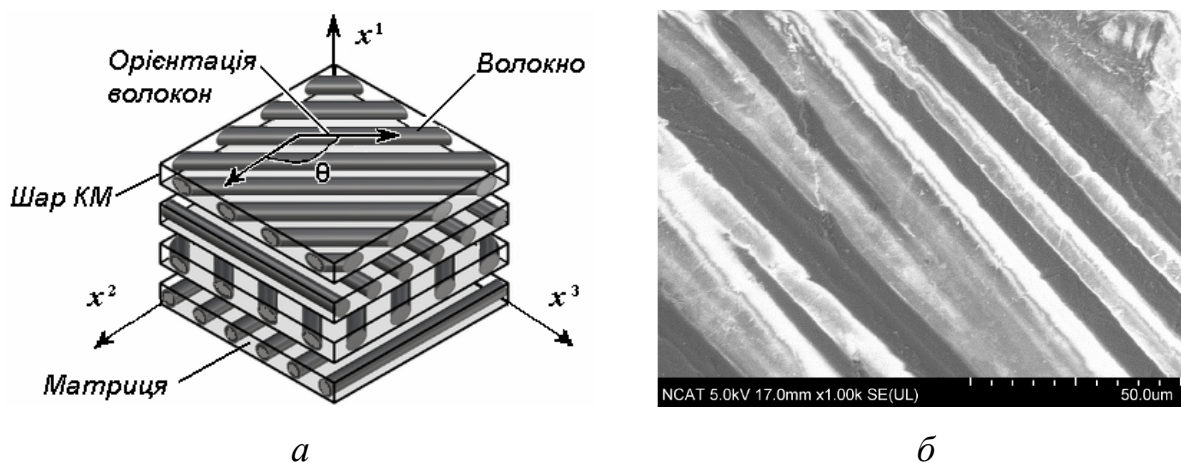


Рис. 3.1. Односпрямований волокнистий КМ: (а) схема будови багат шарового КМ, (б) мікрофотографія вуглецевих волокон [155]

Матриця, також відома як в'яжуче або наповнювач, заповнює простір між волокнами. Вона забезпечує монолітність композиту, фіксує форму виробу і взаємне розташування армуючих волокон, розподіляє напруження, що діють, за об'ємом матеріалу, розподіляє рівномірне навантаження на волокно при руйнуванні частини волокон. Поєднання жорстких високоміцних волокон і більш податливої матриці КМ забезпечує оптимальне застосування матеріалу, загалом, при його відносно невеликій вазі.

Прикладом односпрямованого волокнистого матеріалу є вуглепластик AS4/3501-6 виробництва Hexcel Corporation. Оброблений в автоклаві вуглець/епоксидний композит AS4/3501-6 виготовляється з односпрямованої вуглецево-епоксидної стрічки, яка укладається перехресними шарами в певній послідовності у єдиний пакет. Діаметр (товщина) вуглецевих волокон AS4 становить від 5 до 10 мікрон. На рис. 3.1, б наведена мікрофотографія пасма вуглецевих волокон, яка отримана за допомогою електронного мікроскопу із збільшенням у 1000 разів [155].

Визначенню ефективних термопружних характеристик КМ присвячено багато досліджень, у яких пропонуються різні підходи та методи прогнозування цих характеристик. Наразі розроблено велику кількість мікромоделей композитів, армованих прямолінійними волокнами. Згідно з основними положеннями теорії високо-наповнених волокнистих матеріалів, що базуються

на регуляризації структури, еквівалентної гомогенності та припущенні про однорідний напружений стан матеріалу вздовж волокон в одній комірці, шар КМ можна вважати трансверсально-ізотропним [28, 76, 86]. При цьому вважається, що волокна і матриця жорстко поєднані між собою і деформуються спільно без проковзування та відриву. Також припускається, що у волокнах, матриці та на поверхні їх стику відсутні пори, а напружений стан вздовж орієнтації волокон у кожному шарі матеріалу є однорідним.

За цими припущеннями волокнистий КМ шару, в якому армуючим матеріалом є укладені паралельно одно до одного тонкі безперервні волокна, має односпрямовану однорідну структуру. Отриманий матеріал можна розглядати як однорідний трансверсально-ізотропний матеріал з площинами ізоτροпії, нормальними до напрямку армування. На цій підставі ефективні термопружні характеристики шару односпрямованого волокнистого КМ визначаються через мікромеханічні параметри його компонентів (індекс « $f$ » належить до характеристик волокна (*fiber*), індекс « $m$ » – до характеристик матриці (*matrix*)):

$E_f, E_m; G_f, G_m; \nu_f, \nu_m; \alpha_f, \alpha_m$  - модулі пружності; модулі зсуву; коефіцієнти Пуассона; коефіцієнти теплового розширення матеріалу волокна та матриці, відповідно;

$c_f$  – коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон у композиті.

Об'ємний вміст волокон у матриці істотно впливає на термопружні властивості волокнистого КМ і є одним із головних параметрів, що регулює його характеристики [142]. Збільшення коефіцієнта армування підвищує жорсткість матеріалу. Проте при значеннях  $c_f \approx 80\%$  властивості матеріалу можуть знизитися, що може призвести до утворення тріщин і розшарувань [142]. При дуже малих значеннях коефіцієнта армування  $c_f$  збільшується крихкість волокон. Тому для композитних конструкцій, що піддаються впливу термомеханічних навантажень, важливим є вибір тієї чи іншої мікромеханічної моделі термопружних сталей.

Серед найвідоміших аналітичних мікромеханічних моделей, що використовуються для визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого КМ, можна виділити кілька моделей, наприклад:

– модель Е. Рейсса і В. Фойгта («Р-Ф»), що базується на усередненні відповідних параметрів компонентів за об'ємом та за орієнтацією [77];

– модель О.А. Кільчинського, З. Хашіна і Б. Розена («К-Х-Р»), відповідно до якої КМ розглядається як циліндричне волокно, яке знаходиться в циліндричній оболонці (матриці), яка, в свою чергу, знаходиться в необмеженому середовищі з пружними параметрами, що дорівнюють ефективним параметрам композита [67, 183];

– підхід Д.С. Аболіньша («А»), цей підхід є модифікацією моделі «К-Х-Р» [1];

– модель Г.А. Ваніна («В»), в якій використовується теорія еліптичних і мероморфних функцій [28].

Детальний опис цих моделей і формули для визначення пружних ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого композиту надано, наприклад, в роботах [89, 119]. Найбільш використовуваною з усіх моделей є найпростіша модель, яка розроблена Рейссом і Фойгтом. Вона відома як «правило суміші» [77]:

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f), \quad E = \frac{E_f E_m}{E_m c_f + E_f (1 - c_f)},$$

$$v' = v_f c_f + v_m (1 - c_f), \quad (3.10)$$

$$G = \frac{\chi_m + c_f + (1 - c_f)g}{(1 - c_f)\chi_m + (1 + c_f)\chi_m g} G_m, \quad G' = \frac{G_f G_m}{G_m c_f + G_f (1 - c_f)},$$

де  $\chi_f = 3 - 4v_f$ ,  $\chi_m = 3 - 4v_m$ ,  $g = G_m / G_f$ .

Мікромеханічні моделі для прогнозування ефективних коефіцієнтів теплового розширення менш розроблені через складність даної проблеми [118].

Серед моделей, що визначають обидва коефіцієнти температурного розширення композиційного волокнистого матеріалу, виділяють:

– модель «правило суміші»: («П-С») [77]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f + (1 - c_f) E_m}, \quad \alpha = c_f \alpha_f + (1 - c_f) \alpha_m; \quad (3.11)$$

– модель Шепери «Scharery» [160, 185]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f - (1 - c_f) E_m},$$

$$\alpha = (1 + \nu_m)(1 - c_f) \alpha_m + (1 + \nu_f) \alpha_f c_f - \alpha' [\nu_f c_f + \nu_m (1 - c_f)]; \quad (3.12)$$

– модель Грещука «Greszczuk» [118]

$$\alpha' = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f - (1 - c_f) E_m}, \quad \alpha = \frac{1}{E} [\alpha_0 E_0 \beta + \alpha_m E_m (1 - \beta)],$$

$$E = \frac{E_f E_m}{c_f E_m + (1 - c_f) E_f};$$

$$\alpha_0 = \alpha_m (1 - 2\beta) + 2\alpha_f \beta - \nu_m (\alpha_f - \alpha_m) (1 - 2\beta),$$

$$E_0 = E_m E_f / [E_f (1 - 2\beta) + 2E_m \beta], \quad \beta = \sqrt{c_f / \pi}. \quad (3.13)$$

Для цих моделей ефективні пружні сталі визначаються за принципом «правила суміші». Важливо відзначити, що в більшості моделей композитного волокнистого матеріалу, включаючи наведені, повздовжні коефіцієнти температурного розширення розраховуються за однаковими формулами. При цьому моделі відрізняються формулами розрахунку поперечних коефіцієнтів.

Ефективність наведених вище формул стосовно визначення термопружних характеристик односпрямованих композитів оцінено за допомогою розгляду двох типових полімерних волокнистих КМ, експериментальні дані щодо яких є в літературі [119, 190]:

– вуглепластик, що складається з безперервних односпрямованих волокон марки AS4, які рівномірно заповнюють епоксидну матрицю 3501-6:  $E_f = 225$  ГПа,  $G_f = 15$  ГПа,  $\nu_f = 0,2$ ,  $\alpha_f = -0,5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ,  $c_f = 0,6$ ,  $E_m = 4,2$  ГПа,  $G_m = 1,567$  ГПа,  $\nu_m = 0,34$ ,  $\alpha_m = 45 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ;

– склопластик, що складається з волокон E-glass 21xK43 Gevetex, розміщених в епоксидній матриці LY556/HT907/DY063:  $E_f = 80,0$  ГПа,

$$G_f = 33,33 \text{ ГПа}, \quad \nu_f = 0,2, \quad \alpha_f = 4,9 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \quad c_f = 0,62, \quad E_m = 3,35 \text{ ГПа},$$

$$G_m = 1,24 \text{ ГПа}, \quad \nu_m = 0,35, \quad \alpha_m = 58 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}.$$

Порівняння експериментальних даних з визначення ефективних термопружних характеристик КМ з результатами, одержаними за допомогою використання мікрOMEХАнічних методик (табл. 3.1, 3.2), показало таке.

Таблиця 3.1

Методика розрахунку	Вуглепластик AS4/3501-6, $c_f = 0,6$						
	$E'$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$E$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$G'$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$G$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$\nu'$ , ( $\Delta$ , %)	$\alpha'$ , $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ( $\Delta$ , %)	$\alpha$ , $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ( $\Delta$ , %)
«Р–Ф»	136,7 (+8,5)	10,21 (-7,2)	3,387 (-48,7)	4,142 (+37,4)	0,256 (-8,6)	0,0593 (+106)	17,70 (-31,9)
«К–Х–Р»	137,7 (+9,3)	13,79 (+25,4)	4,536 (-31,3)	4,845 (+23,3)	0,246 (-12,1)	-	-
«А»	136,7 (+8,5)	11,46 (+4,2)	4,536 (-31,3)	3,387 (-13,8)	0,256 (-8,6)	-	-
«В»	136,7 (+8,5)	8,867 (-19,4)	4,536 (-31,3)	4,142 (+37,4)	0,248 (-11,4)	-	-
«Schapery»	-	-	-	-	-	0,0593 (+106)	23,75 (-8,7)
«Greszczuk»	-	-	-	-	-	0,0593 (+106)	19,49 (-25,0)
Експ. дані [119, 190]	126,0	11,00	6,600	3,929	0,280	-1,00	26,00

Для розглянутих композитів характеристики, що отримані за всіма моделями, добре узгоджуються між собою та з експериментальними даними лише для поздовжнього модуля пружності  $E'$ . Що стосується поперечного модуля пружності  $E$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu'$ , то їхня узгодженість є задовільною. Проте результати для інших пружних характеристик, таких як модулі зсуву  $G', G$ , мають істотний розбіг. Для склопластику отримані ефективні коефіцієнти теплового розширення мають більш-менш задовільний збіг з експериментальними даними, тоді як для вуглепластика розбіжність є значною. Існуючі розбіжності пояснюються тим, що структура реального матеріалу зазвичай відрізняється від ідеалізованої, яка використовується в

моделях. У зв'язку з цим ефективні мікромеханічні залежності в основному призначені для наближених оцінок і якісного аналізу впливу мікроструктурних параметрів КМ на його властивості. Постає питання про оцінку впливу використання тієї чи іншої моделі ефективних термопружних сталих на точність розрахунків, одержаних на їх основі.

Таблиця 3.2

Методика розрахунку	Склопластик E-glass 21xK43 Gevetex/LY556/HT907/DY063, $c_f = 0,62$						
	$E'$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$E$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$G'$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$G$ , ГПа ( $\Delta$ , %)	$\nu'$ , ( $\Delta$ , %)	$\alpha'$ , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ( $\Delta$ , %)	$\alpha$ , $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ( $\Delta$ , %)
«Р–Ф»	50,87 (-4,88)	8,252 (-53,4)	3,076 (-35,5)	4,061 (-35,7)	0,257 (-7,5)	6,23 (-27,5)	25,08 (-5,0)
«К–Х–Р»	50,89 (-4,84)	13,420 (-24,2)	4,602 (-21,1)	5,268 (-16,7)	0,274 (-1,4)	-	-
«А»	50,87 (-4,88)	9,236 (-47,8)	4,602 (-21,1)	3,076 (-51,3)	0,257 (-7,5)	-	-
«В»	50,90 (-4,82)	7,848 (-55,7)	4,602 (-21,1)	4,601 (-17,2)	0,249 (-10,4)	-	-
«Scharpy»	-	-	-	-	-	6,23 (-27,5)	32,80 (+24,2)
«Greszczuk»	-	-	-	-	-	6,23 (-27,5)	28,72 (+8,8)
Експ. дані [119, 190]	53,48	17,700	5,830	6,321	0,278	8,60	26,40

### 3.4 Модифікація універсального тривимірного скінченного елемента для моделювання багат шарових композитних оболонок

Розроблений підхід до моделювання фізико-механічних властивостей КМ та прийнята на цій основі методологія задавання термопружних характеристик в шарі СЕ, надали можливість отримати нову модифікацію універсального багат шарового тривимірного СЕ [61, 82, 84, 130, 164]. Вважаємо, що шари СЕ можуть складатися з різних типів волокнистих КМ, тобто пакет багат шарового матеріалу СЕ є комбінованим (або гібридним) композитним матеріалом. Такі



гібридні КМ, що складаються з двох і більше видів композитів, найкраще підходять для оптимізації композитних конструкцій. Це може бути, наприклад, двошарові гібриди типу скло-вуглепластик в трубах великого діаметру для транспортування рідких продуктів під високим тиском (внутрішній шар комбінованого КМ – склопластик, зовнішній шар – вуглепластик), або тришарові гібриди типу скло-вугле-склопластик, які застосовуються в авіації, ракетобудуванні, суднобудуванні тощо.

Нову модифікацію багатошарового тривимірного СЕ побудовано на базі універсального просторового СЕ з додатковими змінними параметрами. «Базовий» універсальний СЕ – це один єдиний тип елемента, який використовується на всіх частинах (ділянках) оболонки для моделювання її структурних неоднорідностей, як геометричних, так і фізико-механічних, який застосовується при використанні традиційних матеріалів. Для врахування волокнисто-багатошарової та гібридної структури КМ по товщині оболонки «базовий» СЕ отримав нову модифікацію. Для цього його додаткові змінні параметри були доповнені низкою нових компонентів: вибір типу матеріалу волокнистого КМ в шарі, задавання фізико-механічних властивостей його складових (матриці та волокна) та кута орієнтації волокон (табл. 3.3). Додаткові змінні параметри СЕ використовуються для зміни його основних параметрів у разі потреби.

Значення додаткових параметрів полягає в задаванні таких атрибутів СЕ.

- (1) – тип елемента і ознака необхідності перетворення СЕО у СЕМ;
- (2) – кількість шарів для моделювання багатошарового матеріалу;
- (3) – відносні товщини ребер СЕМ в шарах;
- (4) – ексцентриситет зі знаком, тобто зміщення середин ребер СЕМ відносно СЕО;
- (5) – типи матеріалів шарів СЕ: традиційний (ТМ) чи композитний (КМ);
- (6) – вид традиційного матеріалу ( $TM_n$ ), який може бути ізотропним, ортотропним або трансверсально-ізотропним;

Таблиця 3.3

<b>I. Топологічні параметри</b>		
1.	Ознака СЕ	СЕО або СЕМ
2.	Кількість шарів	$m$
<b>II. Геометричні параметри</b>		
3.	Відносна товщини ребра бічної грані в шарі	$\bar{h}_{n\ s_2s_3} = h_{n\ s_2s_3} / h$
4.	Відстані між серединами ребер СЕО і СЕМ (ексцентриситет зі знаком)	$\bar{r}_{s_2s_3} = r_{s_2s_3} / h$
<b>III. Фізико-механічні параметри</b>		
5.	Тип матеріалу $n$ -го шару	традиційний – $TM_n$ або композитний – $KM_n$
6.	Тип традиційного матеріалу	ізотропний – $TM_{iso}$ ,      або ортотропний – $TM_{ortho}$ ,      або трансверс.-ізотропний – $TM_{tr-iso}$
7.	Тип композитного матеріалу	волокнистий односпрямований – $KM_{fm}$ ,      або інший новостворений – $KM_{other}$
<b>3.1 Термопружні характеристики матеріалу <math>n</math>-го шару:</b>		
8.	технічні пружні сталі $TM_n$ (ізотропного, ортотропного, трансверсально-ізотропного)	$E''_n, \nu''_n, G''_n, \alpha''_n, \rho_n$
9.	мікромеханічні параметри $KM_n$ (волокнистого односпрямованого)	$E_{nf}, \nu_{nf}, G_{nf}, \alpha_{nf}, \rho_{nf}, c_{nf};$ $E_{nm}, \nu_{nm}, G_{nm}, \alpha_{nm}, \rho_{nm}$
<b>3.2 Кут орієнтації в <math>n</math>-му шарі:</b>		
10.	базису ортотропії $TM_n$ (ортотропного, трансверсально-ізотропного)	$\beta_n$
11.	напрямку укладки волокон $KM_n$	$\beta_{nf}$

- (7) – вид композитного матеріалу ( $KM_n$ ), який може бути волокнистим односпрямованими або іншим новоствореним;
- (8) – технічні термопружні сталі ТМ (для випадку ортотропного матеріалу);
- (9) – мікромеханічні параметри компонентів (волокон і матриці) КМ;
- (10) – кут орієнтації базису ортотропії в шарі (для ТМ);
- (11) – кут напрямку укладки волокон в площині шару (для КМ).

Таким чином, кожен шар СЕ може мати різний тип матеріалу: ТМ або КМ. Крім того, кожен шар може мати: для ТМ свій кут орієнтації базису ортотропії та кут орієнтації волокон для КМ, відповідно. У прийнятій методиці термопружні властивості односпрямованого волокнистого КМ знаходяться за ефективними сталими, які розраховуються через мікромеханічні параметри його компонентів.

Якщо ефективні термопружні характеристики КМ відомі, в цьому випадку матеріал шару представляється як однорідний трансверсально-ізотропний. Кожен шар СЕ може мати свій тип волокнистого КМ. Це відкриває можливість використання гібридного волокнисто-багатошарового КМ в пакеті матеріалу СЕ.

З означення додаткових змінних параметрів випливає, що «базовий» СЕ є частковим випадком, коли СЕ є одношаровим та має ознаку СЕО. Отже, увесь набір додаткових змінних параметрів слугує для моделювання різних конструктивних елементів оболонки в рамках однієї розрахункової моделі.

Надання нових розширених властивостей для «базового» СЕ дозволило поширити методику дослідження поведінки оболонок, у яких матеріалами шарів є ТМ, на новий клас оболонок, у яких матеріалами шарів є волокнисті КМ. Розроблений підхід надає можливість у рамках розробленої методології досліджувати стійкість і власні коливання більш широкого класу оболонкових конструкцій.

Основні нові класи оболонок, що підпадають під розширену дискретну розрахункову модель, представлено на рис. 3.2. Оболонки класифікуються за

характеристиками: геометричними («1. Геометрична неоднорідність») та фізико-механічними («2. Неоднорідність матеріалу»).

1. Геометрична неоднорідність. До цього класу відносяться оболонки, які характеризуються наявністю різних геометричних ознак: «1.1 Особливості за товщиною» та «1.2 Складна форма серединної поверхні».

Перша група (1.1) включає класи оболонок з різними функціями товщини: «1.1.1 Стала», «1.1.2 Гладко-змінна», «1.1.3 Ступінчасто-змінна». При цьому ступінчасто-змінна товщина оболонки може бути з ексцентриситетом щодо серединної поверхні обшивки.

Друга група (1.2) складається з оболонок зі складною формою серединної поверхні. Вона може бути «1.2.1 Гладкою», причому необов'язково сталої товщини, а також «1.2.2 Зі зламами», наприклад, відповідати оболонці з гранованою формою.

2. Неоднорідність матеріалу. До цього класу відносяться оболонки, які можуть мати різну кількість шарів. Виділяються оболонки «2.1 Одношарові» та «2.2 Багат шарові». У загальному випадку одношарові оболонки є частинним випадком багат шарової оболонки ( $m = 1$ ).

У кожному шарі задається тип матеріалу: «2.3 Тип матеріалу шару», який може бути «2.3.1 Традиційний матеріал» або «2.3.2 Композитний матеріал». До ТМ відносяться матеріали, що мають найпоширенішу симетрію термопружних сталей: «2.3.1.1 Ізотропний», «2.3.1.2 Трансверсально-ізотропний» та «2.3.1.3 Ортоотропний». До КМ відносяться односпрямовані волокнисті композити: «2.3.2.1 Односпрямований волокнистий матеріал».

В результаті отримується широкий клас оболонкових конструкцій, які об'єднані загальною назвою: «3. Структурно неоднорідні оболонки». Їх ще можна називати «Оболонки неоднорідної структури».

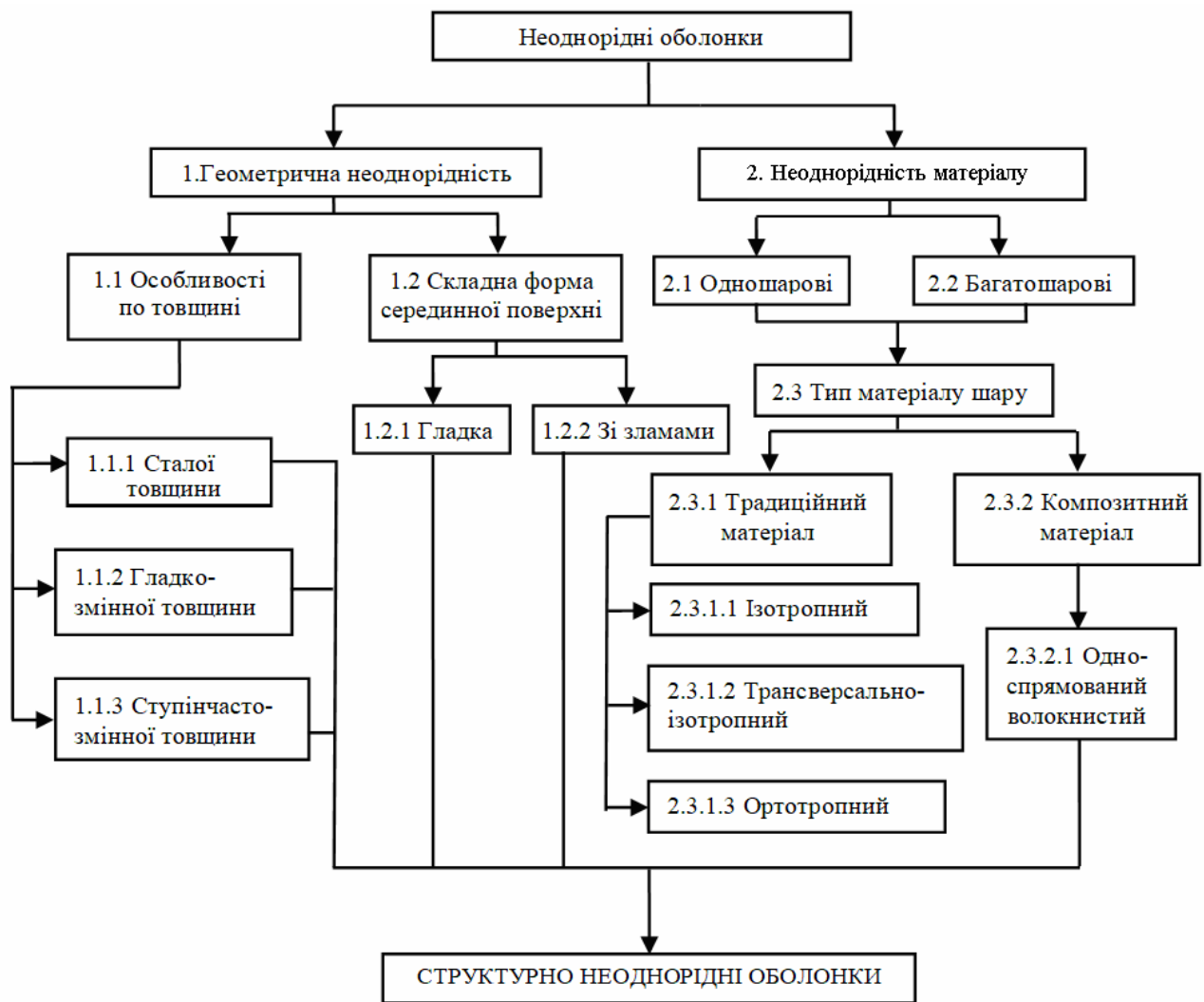


Рис. 3.2. Типи оболонок, які відносяться до розширеної розрахункової моделі

Отже, розроблений підхід дозволяє в межах єдиної методології досліджувати геометрично нелінійне деформування, стійкість і власні коливання широкого класу структурно неоднорідних оболонок, що знаходяться під впливом статичного термомеханічного навантаження. Змінюючи значення одинадцяти додаткових змінних параметрів, можна створити необхідний варіант скінченноелементної моделі оболонки неоднорідної структури. Узагальнюючи вищезазначене, можна стверджувати, що на основі розробленої методології моделювання термопружних характеристик композитного матеріалу та наділення компонент додаткових змінних параметрів СЕ новими розширеними атрибутами створено нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового СЕ.

### 3.5 Аналіз НДС композитних оболонок на основі нової модифікації універсального тривимірного багат шарового СЕ

Методи розв'язування геометрично нелінійних задач стійкості оболонок зазвичай зводяться до багаторазового розв'язання лінеаризованих систем рівнянь. При цьому, ефективність цих методик у значній мірі визначається достовірністю та надійністю лінійного розрахунку оболонок і пластин. Тому вивчення питань збіжності та точності розв'язків лінійних задач є необхідним елементом, що забезпечує адекватність методу. Крім того, вивчення питань збіжності розв'язків у лінійних задачах дає змогу дослідити основні властивості скінченного елемента та методу розрахунку. Ефективність досліджуваних СЕ краще виявляється при розрахунках конструкцій, що є чутливими до урахування жорстких зміщень. До цих об'єктів відносяться тонкі пластини та оболонки, для яких є характерним наявність великих переміщень при малих деформаціях. При цьому важливою проблемою є дослідження як існуючих СЕ, так і розроблених нових їх модифікацій.

У перших двох дослідженнях аналізується вплив на розв'язки, що отримуються, використання ефективних термопружних сталей, обчислених за різними мікромеханічними методиками (підрозділ 3.3) [84]. Розглядаються волокнисті КМ: вуглепластик AS4/3501-6 з коефіцієнтом армування  $c_f = 0.6$  (табл. 3.1) та склопластик E-glass 21xK43 Gevetex/LY556/HT907/DY063 з коефіцієнтом армування  $c_f = 0.62$  (табл. 3.2).

**3.5.1.** Досліджується згин жорстко затиснутої на краю квадратної пластинки зі стороною  $a = 100h$ , яка навантажена рівномірно розподіленим тиском інтенсивністю  $q = 1 \text{ кг/см}^2$  (рис. 3.3). Товщина пластинки  $h = 1 \text{ см}$ . Волокна КМ спрямовані вздовж осі  $x'$ . За розрахункову скінченноелементну модель прийнято чверть пластинки з двома площинами симетрії.

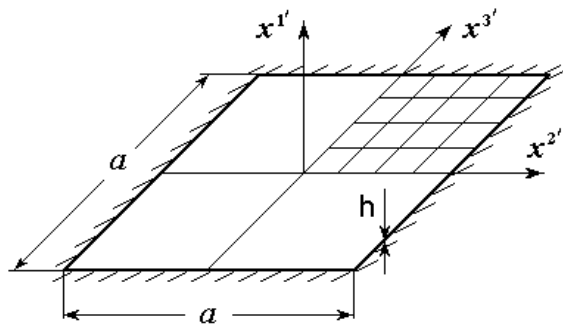


Рис. 3.3. Квадратна жорстко затиснута пластинка

При використанні різних мікромеханічних моделей визначення ефективних пружних характеристик КМ розв'язки, що отримані для обох типів матеріалу, швидко збігаються (табл. 3.4 - табл. 3.6). Маємо гарну збіжність розв'язків для відповідної моделі за прогином (табл. 3.4) та напруженням в центрі пластини (табл. 3.5, табл. 3.6).

Таблиця 3.4

Збіжність розв'язків за прогином ( $-u^I$ , м) в центрі пластини

Мікро-мех. модель	Вуглепластик			Склопластик		
	4×4 CE	8×8 CE	12×12 CE	4×4 CE	8×8 CE	12×12 CE
«Р-Ф»	0.04673 -1.81%	0.04744 -0.31%	0.04759 -	0.1147 -1.54%	0.1162 -0.26%	0.1165 -
«К-Х-Р»	0.04582 -1.65%	0.04646 -0.28% (-2.06%)	0.04659 -	0.1035 -1.33%	0.1047 -0.19% (-9.90%)	0.1049 -
«А»	0.04607 -1.77%	0.04676 -0.30% (-1.43%)	0.04690 -	0.1099 -1.43%	0.1113 -0.18% (-4.22%)	0.1115 -
«В»	0.04618 -1.99%	0.04696 -0.34% (-1.01%)	0.04712 -	0.1122 -1.41%	0.1136 -0.18% (-2.24%)	0.1138 -

Таблиця 3.5

Збіжність розв'язків за напруженням в центрі пластини

Вуглепластик						
Мікромех. модель	4×4 СЕ		8×8 СЕ		12×12СЕ	
	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>
«Р-Ф»	2524 -4,32%	131,1 2,18%	2620 -0,68%	128,3 0%	2638 -	128,3 -
«К-Х-Р»	2477 -4,73%	197,9 1,17%	2581 -0,73% (-1,49%)	195,5 0,05% (+52,4%)	2600 -	195,6 -
«А»	2494 -4,48%	153,7 1,45%	2593 -0,69% (-1,03%)	151,5 0% (+22,2%)	2611 -	151,5 -
«В»	2507 -4,13%	101,6 0,99%	2597 -0,69% (-0,88%)	100,4 -0,20% (-21,7%)	2615 -	100,6 -

Таблиця 3.6

Збіжність розв'язків за напруженням в центрі пластини

Склопластик						
Мікромех. модель	4×4 СЕ		8×8 СЕ		12×12СЕ	
	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{22}$ , кг/см <sup>2</sup>	$-\sigma^{33}$ , кг/см <sup>2</sup>
«Р-Ф»	2327 -5,06%	348,1 -0,94%	2432 -0,77%	350,5 -0,26%	2451 -	351,4 -
«К-Х-Р»	2125 -5,18%	557,1 -2,40%	2223 -0,80% (-8,57%)	568,4 -0,42% (+62,17%)	2241 -	570,8 -
«А»	2231 -4,94	379,4 -1,43%	2329 -0,77% (-4,23%)	383,7 -0,31% (9,47%)	2347 -	384,9 -
«В»	2266 -4,83%	312,1 -1,01%	2363 -0,75% (-2,75%)	314,5 -0,25% (-10,25%)	2381 -	315,3 -



Для кожної мікромеханічної моделі розв'язки при різних сітках порівнювалися з результатом, отриманим для відповідної моделі при сітці  $12 \times 12$  СЕ. Похибка  $\Delta\%$  занесена в другий рядок таблиць. Для сітки  $4 \times 4$  СЕ розбіжність у всіх випадках менша за 2%, а для сітки  $8 \times 8$  СЕ – вона не перевищує 0.5%.

Порівняння прогину в центрі пластини, який отримано при сітці  $8 \times 8$  СЕ за використання різних мікромеханічних моделей, показало достатньо гарний збіг розв'язків при порівнянні з даними моделі «Р–Ф» (третій рядок в дужках). Лише для даних моделі «К–Х–Р» (склопластик) розбіжність складає 9.9%.

Спостерігається збіг форм деформування пластини, які отримані при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей (рис. 3.4). На рисунках введено позначення: ВП – вуглепластик, СП – склопластик. Форми показані для серединної поверхні пластинки в напрямку армування (вздовж осі  $x^{2'}$ ) та в поперечному напрямку (вздовж осі  $x^{3'}$ ). Кружечками позначено розв'язок, який отримано за допомогою програмного комплексу NASTRAN на основі моделі «Р–Ф».

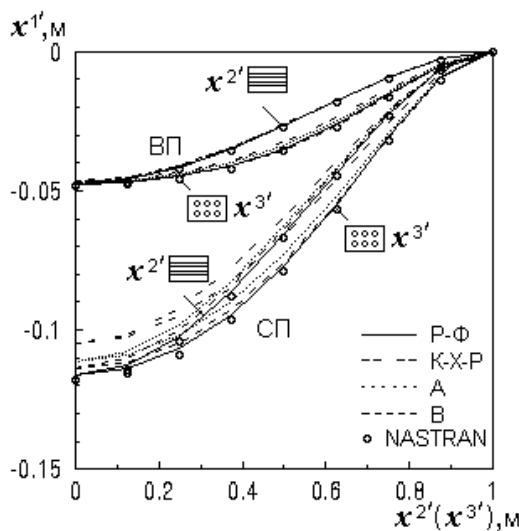


Рис. 3.4. Форми деформування згину пластини

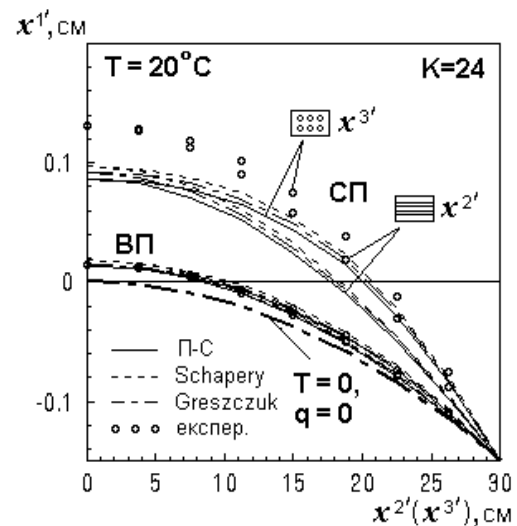


Рис. 3.5. Форми деформування оболонки при нагріві

Аналогічні дослідження виконані для аналізу збіжності та точності розв'язків для напружень: для вуглепластику (табл. 3.4), для склопластику (табл. 3.6). Маємо прекрасну внутрішню збіжність розв'язків для кожної мікромеханічної моделі та гарний збіг результатів, при порівнянні з даними

моделі «Р–Ф» при сітці  $8 \times 8$  СЕ. Виняток становлять напруження  $\sigma^{33}$  як для вуглепластику, так і для склопластику, які одержані за моделлю «К–Х–Р».

**3.5.2.** Розглядається нагріву на  $T = +20^\circ \text{C}$  сферичної квадратної панелі, яка жорстко затиснута по контуру. Кривизна панелі  $K = 2a^2 / (Rh) = 24$ , де  $h = 0,01$  м – товщина оболонки,  $a = 60h$  – розмір у плані,  $R$  – радіус серединної поверхні. Волокна КМ орієнтовані вздовж осі  $x^2$ . Розрахунковою СЕМО є чверть панелі з двома площинами симетрії. Досліджено вплив використання мікромеханічних моделей визначення ефективних коефіцієнтів термічного розширення на розв’язки, що отримуються.

Для оболонки із склопластику величини випинання центра панелі рівномірного об’ємного нагріву показують значну розбіжність із результатами, які отримані на основі експериментальних ефективних характеристик (табл. 3.7). Це призвело до істотної різниці у формах деформування, які отримані за допомогою різних мікромеханічних моделей з визначення ефективних температурних характеристик, порівняно з розв’язком, що відповідає експерименту (рис. 3.5). Проте варто зазначити, що між формами деформування, отриманими за різними мікромеханічними моделями, спостерігається хороший збіг. На рисунку початкову форму панелі зображено жирною штрих-пунктирною лінією, що має позначку  $T = 0, q = 0$ ).

Таблиця 3.7

Випинання в центрі оболонки ( $u^1$ , мм), $8 \times 8$ СЕ		
Мікромех. модель	Вуглепластик	Склопластик
«Правило суміші»	0.1384 (-7.11%)	0.8655 (-33.88%)
«Scharerу»	0.1839 (+23.42%)	0.9679 (-26.06%)
«Greszczuk»	0.1518 (+1.88%)	0.9211 (-29.63%)
Експеримент [190]	0.1490 -	1.3090 -

Для оболонки з вуглепластику розв'язки, які отримані за різних мікромеханічних моделей, демонструють високий рівень узгодженості як між собою, так і з розв'язком, в якому ефективні термопружні характеристики визначені експериментально (рис. 3.5).

Розроблений підхід виявляється ефективним інструментом для оцінки результативності нових мікромеханічних методик прогнозування ефективних термопружних характеристик волокнистих композитів. Крім того, його можна успішно використовувати для аналізу поведінки оболонок з нових матеріалів волокнистої структури.

**3.5.3.** Дослідження збіжності та точності розв'язків для нової модифікації багатошарового тривимірного СЕ розглядається на прикладі згину тонкої квадратної тришарової шарнірно опертої пластини з перехресним укладанням шарів  $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ . Вихідні дані: товщина шарів  $h_1 = h_2 = h_3 = h/3$ ,  $h = 1$  см,  $a = 100h$ . Розглядається два типи навантаження: рівномірно розподілений тиск і тиск, що діє за синусоїдальним законом. Прогин у центрі пластини обчислювався у безрозмірному вигляді:  $\bar{u}' = 100u'(Eh^3/q_0a^4)$ . При цьому вважалося, що матеріал шарів має трансверсально-ізотропну структуру та наступні фізико-механічні характеристики:

$$E' = E_{2''} = 1.7845 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad E = E_{1''} = E_{3''} = 7.137 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$G' = G_{1''2''} = G_{2''3''} = 3.5180 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad G = G_{1''3''} = 1.4072 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu' = \nu_{2''1''} = \nu_{2''3''} = 0.25, \quad \nu = \nu_{1''3''} = \nu_{3''1''} = 0.01.$$

Результати, отримані за допомогою розробленого нового СЕ, були порівняні з опублікованими даними інших авторів. Для обох типів навантаження спостерігається висока збіжність та точність розв'язків.

Для пластинки, навантаженої рівномірно розподіленим тиском  $q_0 = 1$  кг/см<sup>2</sup>, розрахунки, проведені з використанням нової модифікації СЕ, продемонстрували високу збіжність і точність розв'язків (табл. 3.8). Отримано, що для розрахунків, виконаних за МССЕ з сіткою  $4 \times 4$  СЕ, розбіжність з контрольним розв'язком Sheikh & Chakrabarti [189] є меншою за 1%.

Таблиця 3.8

Порівняльна похибка прогину $\bar{u}^I$ тришарової пластинки							
<b>Sheikh, Chakrabarti 1024CE [189]</b>	Reddy [182]	Ghosh, Dey [158]	Khoa 64 CE [167]	Khoa 512 CE [167]	MCCE 4×4 CE	MCCE 8×8 CE	<b>MCCE 12×12 CE</b>
<b>0,6708</b>	0,6705	0,6823	0,6894	0,6751	0,6664	0,6691	<b>0,6697</b>
$\Delta, \%$							
–	-0,04	+1,71	+2,77	+0,64	-0,65	-0,25	<b>-0,16</b>

Порівняння скінченноелементного розв'язку задачі згину пластинки під синусоїдальним навантаженням з точним розв'язком Pagano та результатами інших авторів надано в табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Порівняльна похибка прогину $\bar{u}^I$ тришарової пластинки							
<b>Pagano [179]</b>	Reddy [182]	Panda [180]	Sheikh [189]	Khoa 64 CE [167]	Mawenya [175]	NASTRAN 8×8 CE	<b>MCCE 4×4CE</b>
<b>0,4368</b>	0,4340	0,4346	0,4350	0,4273	0,4398	0,4237	<b>0,4039</b>
$\Delta, \%$							
–	-0,64	-0,50	-0,41	-2,17	+0,69	-2,99	<b>-7,53</b>

Розв'язок, отриманий за MCCE з використанням розробленого модифікованого універсального тривимірного CE, гарно збігається з точним розв'язком Pagano вже при сітці 4×4 CE для чверті пластинки.

### 3.6 Основні висновки по розділу

Розроблено нову модифікацію універсального тривимірного багатошарового CE, матеріалами шарів якого є як традиційні матеріали, так і односпрямовані волокнисті композити. У кожному шарі CE може бути свій тип волокнистого композиту, що дозволяє використовувати в пакеті скінчених

елементів також гібридні волокнисто-багатошарові КМ. Додаткові змінні параметри «базового» СЕ доповнено новими компонентами: вибір типу матеріалу КМ в шарі, задавання фізико-механічних властивостей його складових (матриці та волокна) та кута орієнтації волокон. За цими компонентами в обчислювальному комплексі через програмні засоби реалізується визначення ефективних характеристик волокнистого КМ на основі застосування відомих мікромеханічних моделей прогнозування термопружних сталей. Такий підхід надає змогу аналізувати вплив на НДС конструкції різних параметрів композиту, як-то фізико-механічні характеристики складових матеріалу, об'ємний вміст волокон, їх кут орієнтації в шарі, гібридна структура матеріалу тощо.

Проведено оцінку ефективності мікромеханічних моделей прогнозування ефективних термопружних характеристик односпрямованих композитів на прикладі двох типових полімерних волокнистих КМ. За допомогою використання нової модифікації СЕ виконано скінченноелементний аналіз НДС багатошарових оболонок з волокнистих КМ. Підтверджено, що модифікований СЕ забезпечує достовірність отримуваних розв'язків і високу точність результатів. Новий СЕ характеризується універсальністю та широкою сферою застосування порівняно з іншими елементами. Використання СЕ в інженерних та дослідницьких програмних комплексах є перспективним.

Нова модифікована версія СЕ призначена для дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пружних волокнисто-багатошарових композитних оболонок зі ступінчасто-змінною товщиною, які знаходяться під впливом статичних термомеханічних навантажень.

## РОЗДІЛ 4

### ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ, СТІЙКОСТІ, ЗАКРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Особливістю розробленого методу комплексного дослідження процесів нелінійного деформування, втрати стійкості, закритичної поведінки та власних коливань неоднорідних оболонок при дії термомеханічних навантажень є уніфікований підхід. Через свою складність метод потребує, загалом як і всі нові чисельні методи, ретельного дослідження збіжності розв'язків, обґрунтування їх достовірності та підтвердження ефективності самого методу.

Для максимального охоплення можливостей методу були спеціально підібрані тестові задачі, за якими визначалась точність і достовірність результатів, що отримуються. Для кожної задачі обов'язково досліджувалася збіжність розв'язків при згущенні скінченноелементної сітки. У всіх випадках подальші дослідження виконувалися при сітках, які забезпечують збіжність розв'язків. Досліджувалися особливості впливу різних факторів: навантаження (механічного, температурного, спільного термомеханічного), форми, умов закріплення, наявності неоднорідностей в плані (ребер, каналів, отворів) на процеси геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань пологих, та непологих панелей. Проведені в дисертації дослідження демонструють ефективність розробленого комплексного методу, використання якого дало змогу розв'язати низку нових задач з нелінійного деформування, втрати стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних оболонок, що мають неоднорідну за товщиною структуру і знаходяться під дією термомеханічних навантажень.

#### 4.1 Вплив термомеханічного навантаження на стійкість, закритичну поведінку і власні коливання оболонки

Дослідження впливу статичного термомеханічного навантаження на стійкість і коливання оболонок навіть сталої товщини є складною та недостатньо вивченою задачею будівельної механіки. Можливості розробленої методики для аналізу впливу термомеханічного навантаження на втрату стійкості та власні коливання оболонок демонструються на прикладі дослідження поведінки квадратної у плані сферичної панелі [81]. На краях панель, згідно з [13, 35], має шарнірне з'єднання з ребрами, які є абсолютно жорсткими на згин за нормаллю та гнучкими у площинах, дотичних до серединної поверхні оболонки. Точки кінцевих перерізів панелі можуть вільно зміщуються вздовж ребер. Кривизна панелі визначається параметром  $K = 2a^2/(Rh) = 24$ , де  $h = 0.01$  м – товщина обшивки оболонки,  $a = 200h$  – розмір у плані,  $R$  – радіус серединної поверхні. Оболонка виготовлена з ізотропного матеріалу:  $E = 6.968 \cdot 10^4$  МПа – модуль пружності,  $\nu = 0.3$  – коефіцієнт Пуассона,  $\alpha = 0.25 \cdot 10^{-4}$  град<sup>-1</sup> – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Властивості матеріалу вважаються сталими та незалежними від температури.

Порівнюється поведінка оболонки (рис. 4.1, 4.2) при трьох видах термомеханічного навантаження, яке визначається безрозмірним параметром  $p^* = p^*(q^*, T^*)$ :

- 1) рівномірний нормальний тиск інтенсивністю  $q$  (пунктирна крива 1);
- 2) нерівномірний за товщиною нагрів (суцільна крива 2);
- 3) одночасна дія тиску та нагріву (штрих-пунктирна крива 3).

Для зручності порівняння результати розрахунку наводяться у безрозмірному вигляді:  $q^* = q/k$ ,  $T^* = T/1^\circ\text{C}$ ,  $\bar{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}/E$ ,  $\bar{u}^{1'} = u^{1'}/h$  – прогин в центрі панелі. Коефіцієнт  $k$  визначається з умови, що при дії тільки тиску або тільки нагріву, величини  $q_{кр}^{*в}$  і  $T_{кр}^{*в}$  є чисельно однаковими величинами.

При нерівномірному нагріві внутрішня поверхня оболонки поступово нагрівається на величину  $T^{\circ}\text{C}$ , при цьому її зовнішня поверхня одночасно охолоджується на таку саму величину. Тому серединна поверхня панелі при всіх навантаженнях є ненагрітою.

Одночасне термомеханічне навантаження здійснюється так, що при зміні параметра температури на  $1^{\circ}\text{C}$  обидва безрозмірні параметри  $q^*$  та  $T^*$  збільшуються на одиницю.

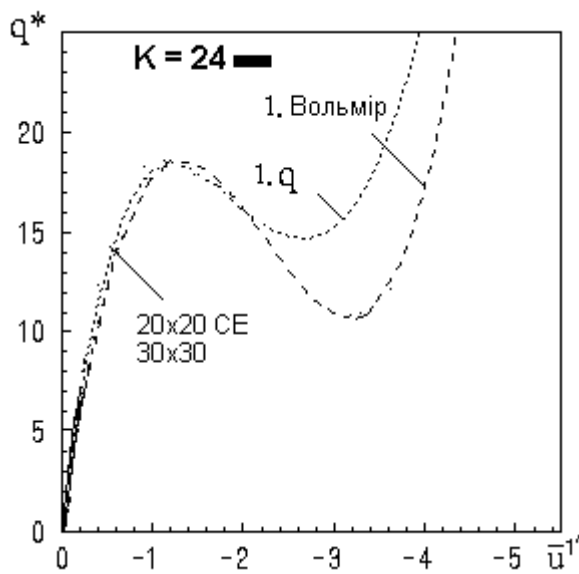


Рис. 4.1. Діаграми « $p^* - \bar{u}^1$ » в центрі сферичної панелі при дії тиску, збіжність розв'язків

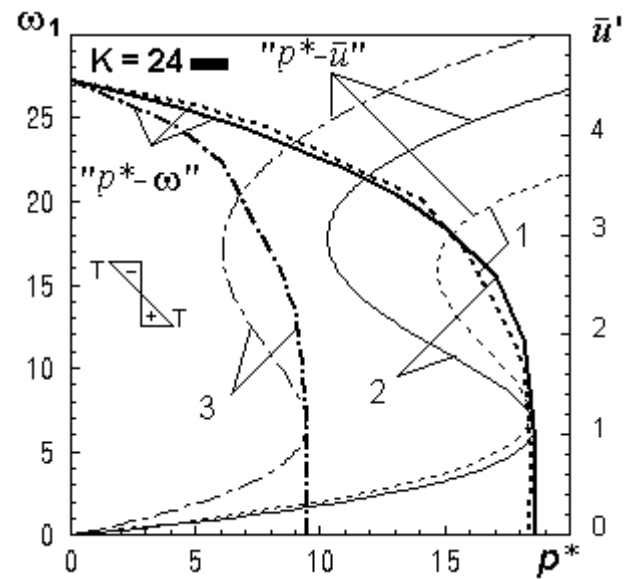


Рис. 4.2. Діаграми «навантаження – прогин» і «навантаження – частота»

Отримано залежності термомеханічного навантаження  $p^*$  від прогину в центрі панелі  $\bar{u}^1$  (діаграми « $p^* - \bar{u}$ », рис. 4.2) та характеристик власних коливань (частота  $\omega_1$ ) оболонки від величини прикладеного статичного термомеханічного навантаження (діаграми « $p^* - \omega_1$ », рис. 4.2).

При дії лише тиску,  $p^* = p^*(q^*, 0)$ , втрата стійкості панелі відбувається за величини критичного навантаження  $q_{кр}^e = 2.660 \cdot 10^{-3}$  МПа (рис. 4.1). У докритичній і на початку закритичної областей отриманий за МССЕ розв'язок має гарний збіг з нелінійним розв'язком О.С. Вольміра [35]. Розходження за



величиною  $q_{кр}^{\epsilon}$  становить лише 1,7% [13]. Як показали дослідження, збіжність розв'язків забезпечується використанням для СЕМО сітки  $20 \times 20$  СЕ.

При нерівномірному нагріві,  $p^* = p^*(0, T^*)$ , втрата стійкості панелі відбувається за критичної температури  $T_{кр}^{\epsilon} = 18.548^{\circ}\text{C}$ . Тому приймається, що  $k = q_{кр}^{\epsilon} / T_{кр}^{\epsilon} = 1.4341 \cdot 10^{-4}$  МПа. Це забезпечує рівність безрозмірних критичних навантажень першого і другого варіантів впливу.

Втрата стійкості оболонки від комбінованого термомеханічного навантаження,  $p^* = p^*(q^*, T^*)$ , відбувається при величині, яка у два рази менша за критичні навантаження при окремій дії кожного з них,  $p^* = 9,429$  (рис. 4.3). Це пов'язано з тим, що панель знаходиться під впливом двох навантажень, які мають різну природу (тиск і нерівномірний нагрів), проте діють в одному напрямку.

При всіх видах навантаження у докритичній області на діаграмах « $p^* - \bar{u}^{1'}$ » точки розгалуження відсутні, прогини центра панелі в критичних точках практично дорівнюють одне одному (рис. 4.3), а відповідні форми деформування та втрати стійкості носять однаковий характер – просідання центральної частини оболонки.

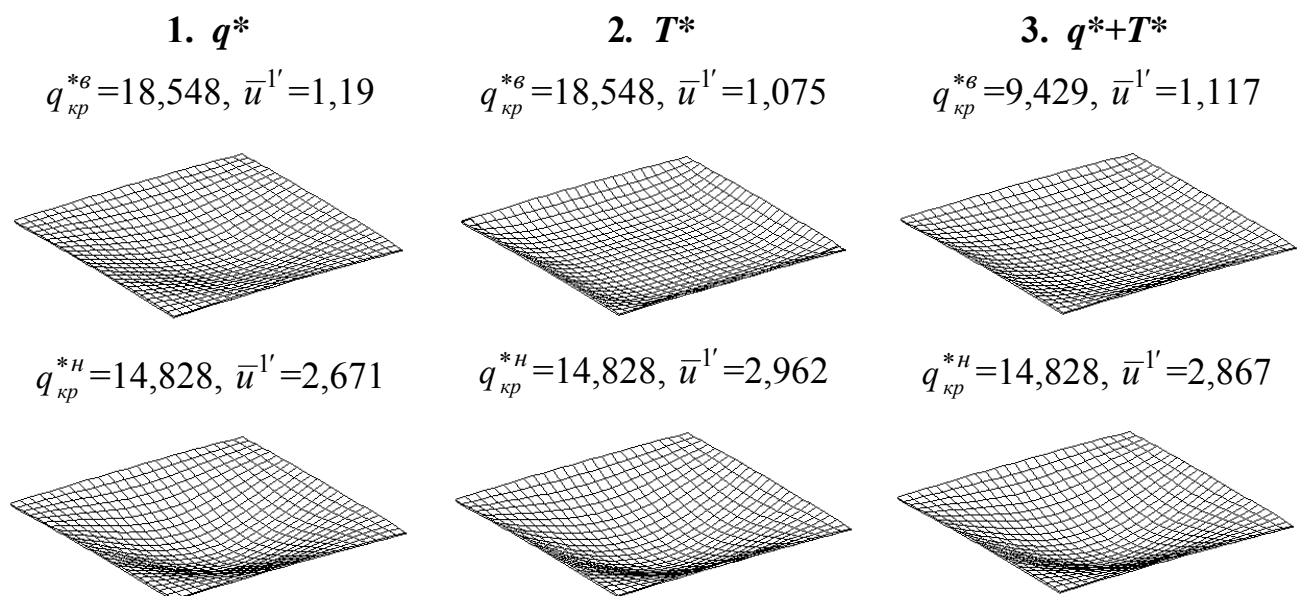


Рис. 4.3. Форми деформування панелей для трьох режимів навантаження

Мембранні напруження  $\bar{\sigma}_M^{22}$ , обчислені в центрі оболонки, у всіх варіантах навантаження ведуть себе однаково (рис. 4.4). Згинальні напруження  $\bar{\sigma}_3^{22}$  у докритичній і закритичній областях на більшості ділянок змінюються лінійно, приймаючи вигляд  $Z$ -подібних кривих (рис. 4.4).

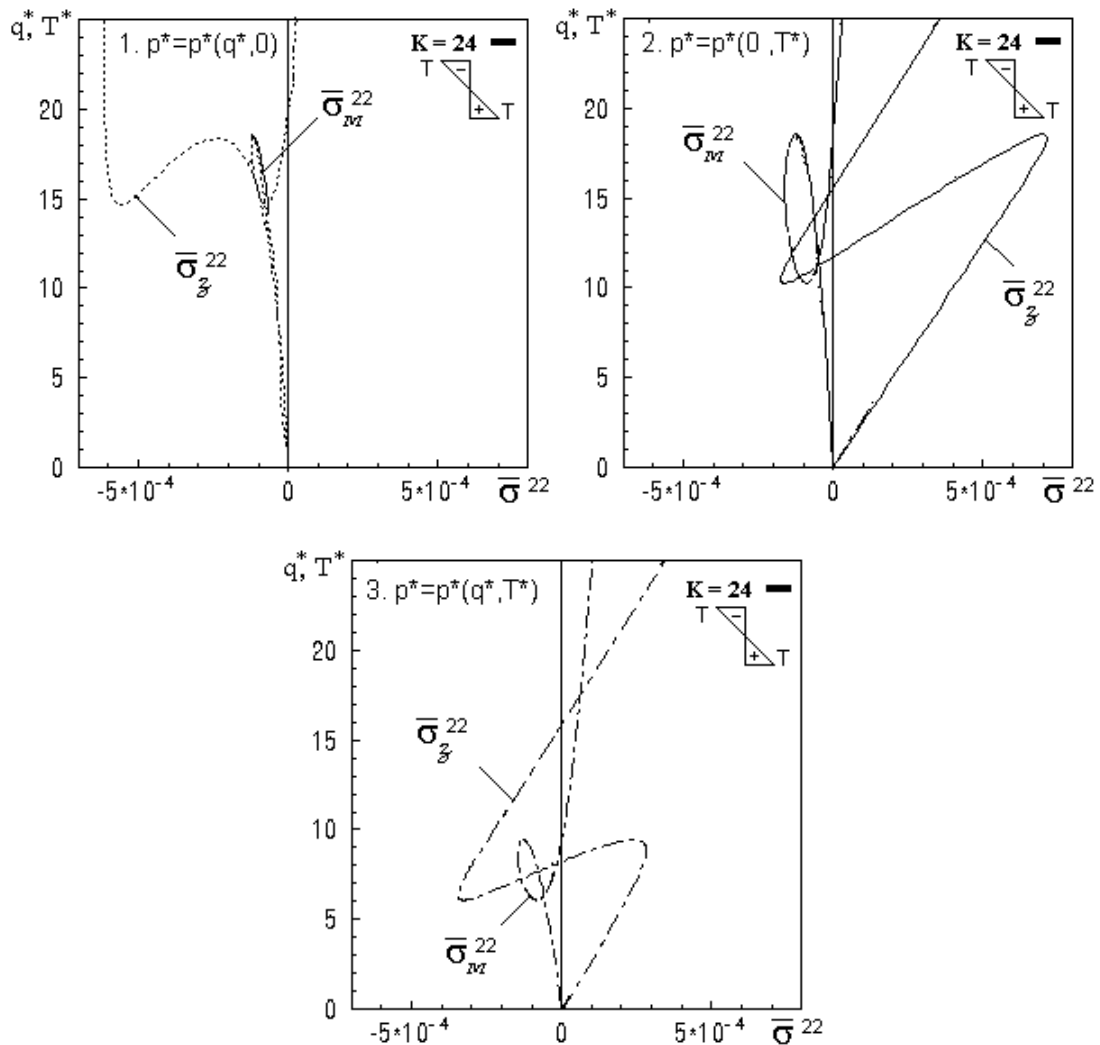


Рис. 4.4. Діаграми «навантаження – напруження» в центрі панелі для трьох видів навантаження

Поведінка пологої панелі при навантаженні рівномірним нормальним тиском та при нерівномірному за товщиною нагріві має схожість. Проте спостерігається наявність принципової різниці в НДС при дії цих навантажень, що мають різну природу. Нерівномірний за товщиною нагрів характеризується відносно більшим рівнем мембранних і згинальних напружень.

Діаграми « $p^* - \omega_1$ » для різних варіантів навантаження наведено на рис. 4.2. Криві, що відповідають першому і другому варіантам навантаження - збігаються. Аналіз результатів показав, що для всіх видів навантаження  $p^*$  та на всіх ділянках їхнього зростання перші форми власних коливань панелі мають однаковий вигляд (рис. 4.5). Власні частоти коливань  $\omega_2 = \omega_3$  є кратними, а відповідні форми повернуті одна відносно іншої на 90 градусів. На рисунку характерні перші чотири форми коливань панелі для наочності надано у зміненому масштабі.

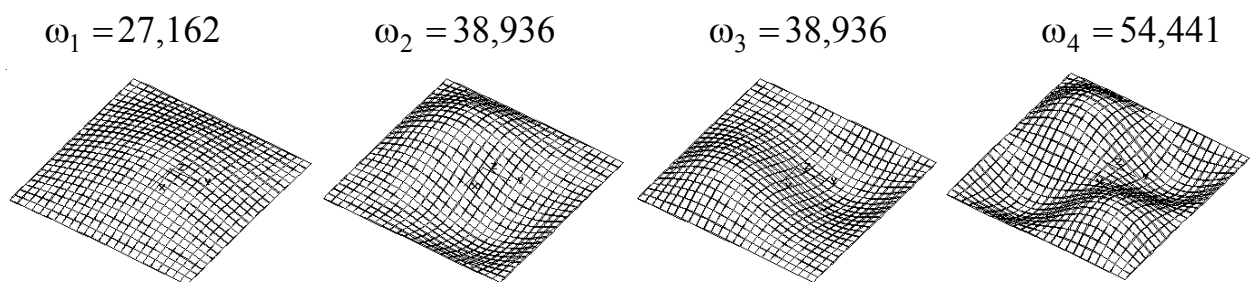


Рис. 4.5. Перші форми власних коливань оболонки у вихідному, ненавантаженому стані

Оскільки у докритичній області для усіх варіантів навантаження  $p^*$  відсутні точки розгалуження розв'язків, за статичним і динамічним критеріями отримано практично рівні відповідні величини критичних навантажень (рис. 4.2).

#### **4.2 Порівняльний аналіз стійкості та власних коливань пологих панелей сталі та змінної товщини**

Проблема обґрунтування достовірності отримуваних комп'ютерних розв'язків є однією з важливих задач при розробці усіх методик розрахунку. Для підтвердження достовірності розв'язків, що отримуються за розробленим методом з використанням MSCЕ, був виконаний порівняльний аналіз результатів розрахунку за допомогою залучання сертифікованих вітчизняних програмних комплексів (ПК) ЛІРА-САПР [92] та SCAD [184]. В підрозділі

наводяться результати порівняльного аналізу розрахунку різних класів оболонок та дослідження впливу на їх поведінку різних параметрів. Для використання зазначених ПК як засобів розв'язання складних задач нелінійного деформування, втрати стійкості та власних коливань тонких неоднорідних оболонок, були вивчені особливості та можливості їхнього застосування [16, 58, 59, 60, 62, 128, 129, 165, 169, 170]. Для цього були проаналізовані алгоритми, що покладені в основу цих комплексів, вибрані найефективніші з них, з'ясовані прийоми моделювання оболонок гладко- та ступінчасто-змінної товщини, виявлені можливі види термомеханічних навантажень, що можуть використовуватися та наявні обмеження. Окреслено коло задач, для яких є можливість застосовувати ПК ЛІРА-САПР та SCAD для комп'ютерного порівняння отримуваних розв'язків. На теперішній час є більш нові версії цих комплексів, проте основні підходи збереглися.

**4.2.1** *Розглядається гладка панель сталюї товщини.* Досліджується квадратна в плані (у площині  $x^2 x^3$ ) гладка сферична оболонка, шарнірно оперта вздовж контуру та навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивністю  $q$ . Кривизна панелі характеризується параметром  $K = 32$ . Вихідні дані:  $h = 0.01\text{м}$ ,  $a = 60h$ ,  $R = 225h$ ,  $h = 0,01\text{м}$ ,  $E = 2,0594 \cdot 10^5 \text{МПа}$ ,  $\nu = 0,3$ . Вивчення збіжності розв'язків показало, що прийнята для розрахунків сітка  $30 \times 30$  СЕ є достатньою. Результати досліджень подано з використанням безрозмірних параметрах  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$ ,  $\bar{u}^1 = u^1 / h$ .

В обох розглядуваних ПК реалізовано по три алгоритми розв'язування задач геометрично нелінійного деформування та стійкості. Усі методи є кроковими. Постає проблема порівняти та проаналізувати роботу цих алгоритмів, оскільки незнання їх специфіки та придатності може призвести до помилкових результатів. Докладно їхній опис та особливості застосування надано в роботах [169, 170].

В ПК ЛІРА-САПР в основу алгоритмів покладено [91, 92]: метод «Послідовних навантажень» (на рисунках має позначення 1. ПН), метод

«Послідовних навантажень з автоматичним вибором кроку» (2. ПНА), метод «Ньютона-Рафсона» (3. Н-Р).

В ПК SCAD існують такі алгоритми [37, 184]: метод «Послідовних навантажень» (1. ПН), метод «Ньютона-Канторовича» (2. Н-К), метод «Ньютона-Рафсона» (3. Н-Р).

Для ПК ЛІРА-САПР за усіма трьома методами отримано практично повний збіг діаграм «навантаження–прогин» (« $\bar{q} - \bar{u}^1$ ») в центрі панелі до верхньої критичної точки (рис. 4.6, а).

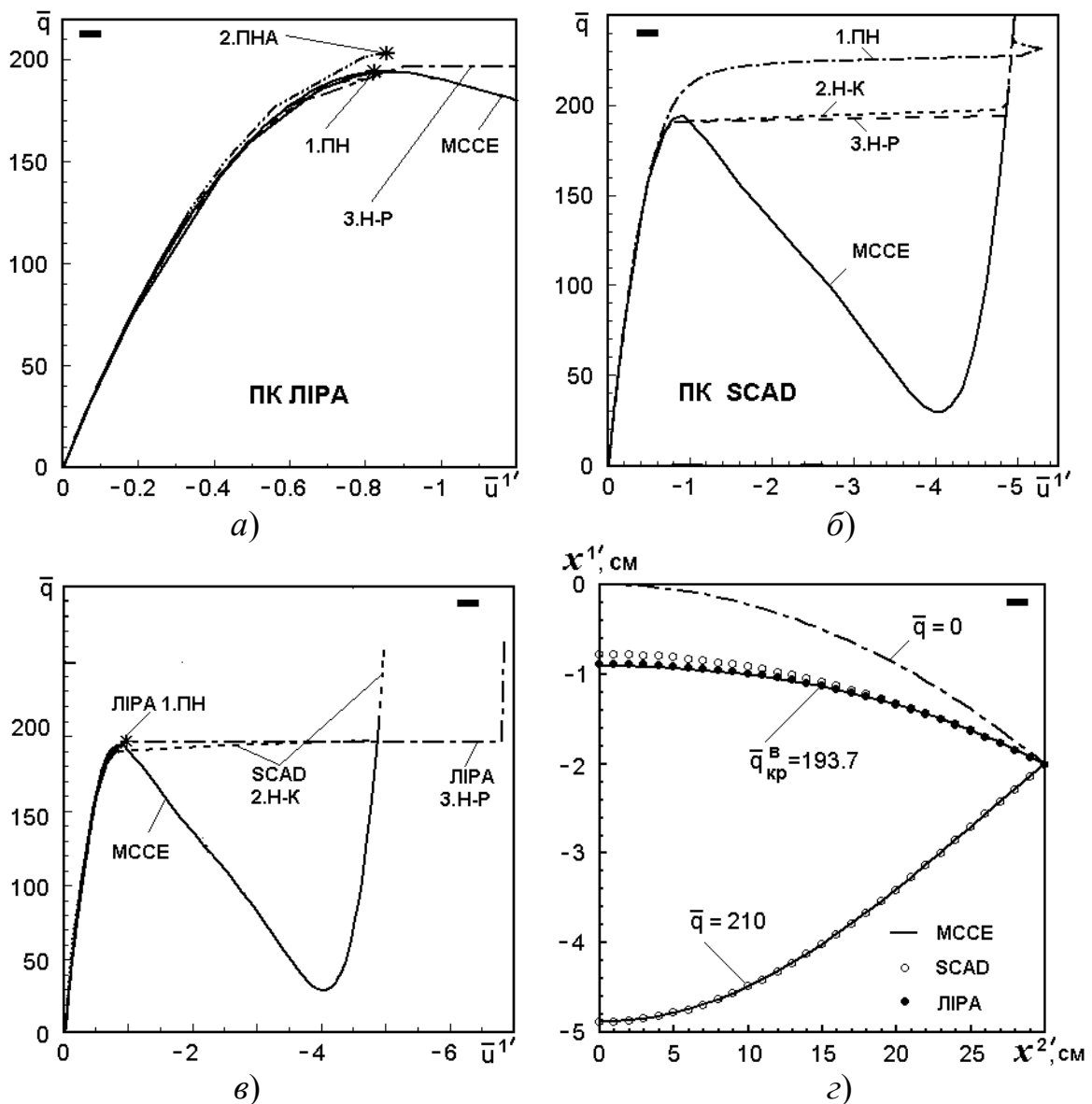


Рис. 4.6. Порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в центрі панелі (а, б, в) і форм деформування (г) при використанні різних алгоритмів розрахунку

Обидва варіанти методу послідовних навантажень (1. ПН та 2. ПНА) демонструють збіг результатів у докритичній області та незначне розходження між собою за величиною верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^B$  (табл. 4.1). В цій точці (на рисунку вона позначена «\*») розв'язування задачі закінчується. Метод Ньютона-Рафсона (3. Н-Р) дає змогу перейти на закритичну стійку гілку розв'язку, проте зі значною похибкою (рис. 4.6, в).

Всі три алгоритми ПК SCAD реалізують перехід на нову стійку гілку рівноваги (рис. 4.6, б, в). Розрахунок за методом послідовних навантажень (1. ПН) здійснює перехід на закритичну стійку гілку з великою похибкою за величиною  $\bar{q}_{кр}^B$ . За алгоритмами, що спираються на застосування методів Ньютона-Канторовича (2. Н-К) та Ньютона-Рафсона (3. Н-Р), проблема переходу на закритичну стійку гілку вирішується достатньо точно, величина верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^B$  є однаковою (табл. 4.1).

У докритичній області для обох ПК маємо практично повний збіг кривих з діаграмою, що одержана на підставі використання МССЕ. Рівноважні форми деформованих панелей у докритичній та закритичній областях мають простий вигляд і добре збігаються між собою (рис. 4.6, г). Деформування панелі характеризується прогином в її центральній області.

Таблиця 4.1

ПК	Алгоритм	$\bar{q}_{кр}^B$	$\Delta, \%$	$\bar{u}_{кр}^{1'B}$	$\Delta, \%$
МССЕ	Ньютона-Канторовича	193,7	0	0,9125	0
ПК ЛІРА- САПР	1. Послідовних навантажень (ПН)	194,1	0,20	0,8796	-3,60
	2. Послідовних навантажень з автоматичним вибором кроку (ПНА)	202,8	4,70	0,8580	-5,97
	3. Ньютона-Рафсона (Н-Р)	196,4	1,40	0,9013	-1,23
ПК SCAD	1. Послідовних навантажень (ПН)	-	-	-	-
	2. Ньютона-Канторовича (Н-К)	190,2	-1,80	0,7729	-15,30
	3. Ньютона-Рафсона (Н-Р)	190,2	-1,80	0,7730	-15,29

У подальших дослідженнях при виконанні розрахунків будемо використовувати для ПК ЛІРА-САПР метод 2. ПНА, а для ПК SCAD – метод 2. Н-К, як найточніші та ефективніші для даного типу задач.

**4.2.1.1** Розглядається вплив комбінованої дії попереднього рівномірного нагріву з подальшим навантаженням тиском на втрату стійкості панелі (рис. 4.7). Нагрів (охолодження) виконувався на  $T = \pm 20^\circ\text{C}$  [170]. При розрахунках комбіноване навантаження з урахуванням попереднього нагріву подається як спільний процес термомеханічного впливу, що виконується за два етапи.

1. Перший етап. Панель нагрівається від  $0^\circ\text{C}$  до заданої величини температури  $T$ . Це викликає нелінійне деформування оболонки і попереднє збурення її НДС, яке при подальшому силовому (механічному) навантаженні звичайно позначається на формах втрати стійкості.

2. Другий етап. Панель при зафіксованому температурному полі  $T$  довантажується тиском.

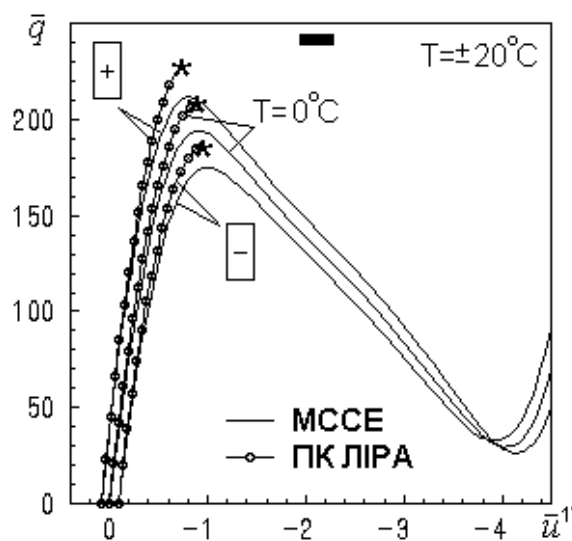


Рис. 4.7. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в центрі панелі при різних інтенсивностях попереднього нагріву

Рівномірний приріст температури на 20 градусів приводить до практично однакового відповідного приросту верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^s = 175,0; 193,7; 212,2$  і рівномірного падіння нижнього  $\bar{q}_{кр}^H = 32,82; 29,78; 26,53$ .

Порівняння результатів, одержаних за МССЕ, з розрахунками, виконаними за ПК ЛІРА-САПР, показав достатньо гарний їх збіг [170]. Відповідні діаграми практично повністю збігаються у докритичній області. Маємо незначний розбіг за величинами  $\bar{q}_{кр}^e$  та  $\bar{u}_{кр}^{1'e}$  у верхній критичній точці (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Навантаження	Варіант розрахунку					
	МССЕ		ПК ЛІРА-САПР			
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1'e}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{u}_{кр}^{1'e}$	$\Delta, \%$
$T = -20^\circ \text{C}$	175,0	-0,9613	185,9	6,23	-1,0000	4,03
$T = 0^\circ \text{C}$	193,7	-0,9125	202,8	4,70	-0,8580	-5,97
$T = +20^\circ \text{C}$	212,2	-0,7984	228,4	7,63	-0,7509	-5,95

4.2.1.2 Проведений модальний аналіз оболонки показав наступне. Перші чотири форми власних коливань панелі, що отримані за МССЕ і за допомогою ПК ЛІРА-САПР, наведено для вихідного ненавантаженого стану  $\bar{q}^{i=0}$  (рис. 4.8).

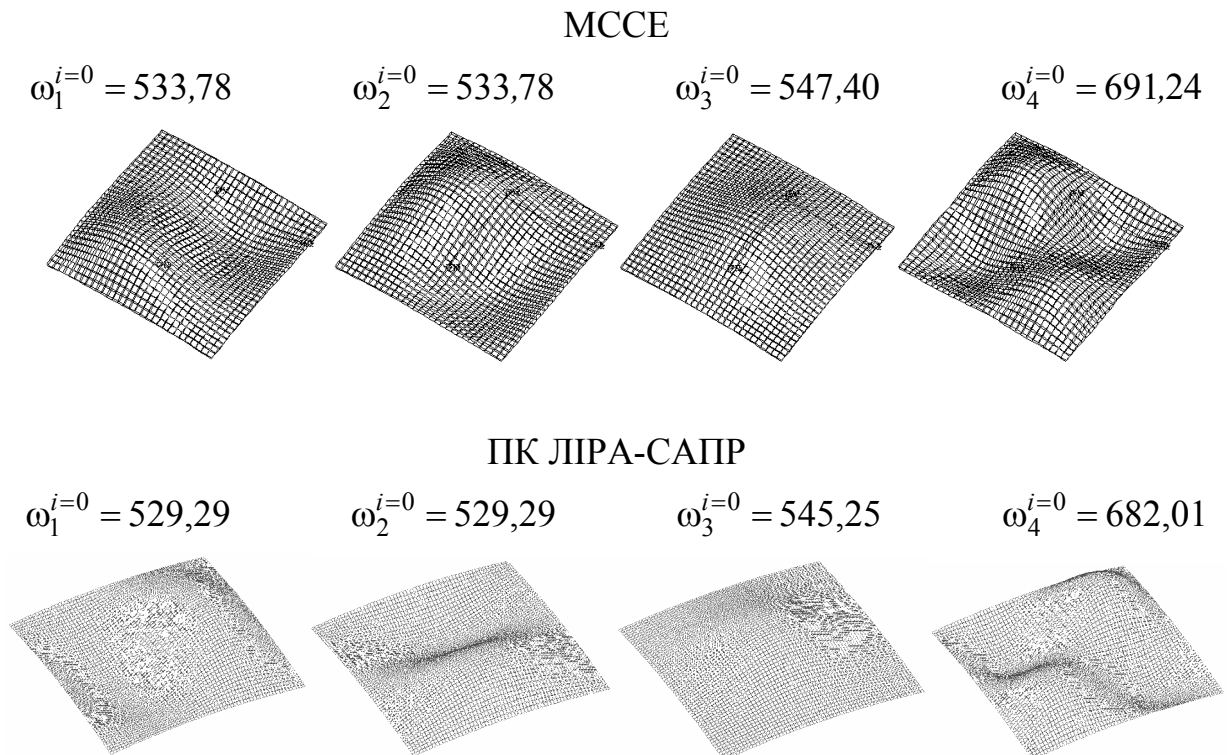


Рис. 4.8. Форми власних коливань ( $\omega_k^{i=0}$ , Гц) ненавантаженої оболонки,  $\bar{q}^{i=0}$



Розбіжність за частотами знаходиться у межах 1%. Форми власних коливань ідентичні. При розрахунках за МССЕ ( $T = 0^\circ \text{C}$ ) отримано, що при всіх навантаженнях частоти  $\omega_1 = \omega_2$  є кратними.

Проведений модальний аналіз дає змогу дослідити вплив переднапруженого стану оболонки на частоти та форми власних коливань конструкції, що деформується (рис. 4.9). Отримана залежність надана як діаграма «навантаження–нижча частота  $\omega_1$ » (« $\bar{q} - \omega$ »). Модальний аналіз проводиться на кроці навантаження до появи нульового (або від'ємного) значення нижчої частоти  $\omega_1$ . Такий підхід відповідає динамічному критерію втрати стійкості оболонки [35] і дозволяє визначити стійкість панелі одночасно за статичним та динамічним критеріями. У докритичній області на діаграмах « $\bar{q} - \bar{u}$ » відсутні точки розгалуження розв'язків. Тому за обома критеріями отримано практично однакові відповідні величини критичних навантажень.

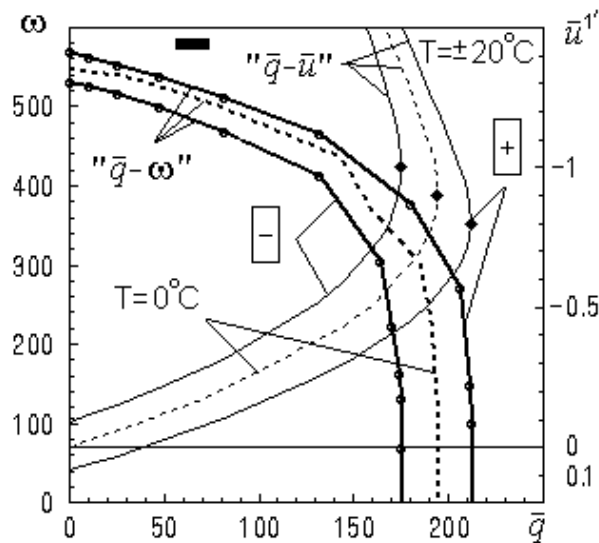


Рис. 4.9. Діаграми « $\bar{q} - \omega_1$ » та « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в центрі панелі

В існуючих версіях ПК ЛІРА-САПР та SCAD на сьогодні немає можливості проводити аналіз власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану.

**4.2.2** Розглядається оболонка ступінчасто-змінної товщини [170]. Порівняльний аналіз стійкості оболонок зі ступінчасто-змінною товщиною

проілюстровано на прикладі панелі, що була розглянута вище. Гладка панель послаблена чотирма перехресними каналами, які розміщені на поверхні оболонки у три способи. Способи послаблень позначені відповідними значками. Канали розташовані ексцентрично на внутрішній («■», рис. 4.10, а) або зовнішній («■», рис. 4.10, в) поверхнях оболонки, та симетрично на внутрішній та зовнішній її поверхнях («■», рис. 4.10, б). Для всіх варіантів розташування каналів величини об'ємів послаблень є незмінними. Розрахунковою є СЕМО з сіткою  $30 \times 30$  СЕ, яка забезпечує збіжність розв'язків.

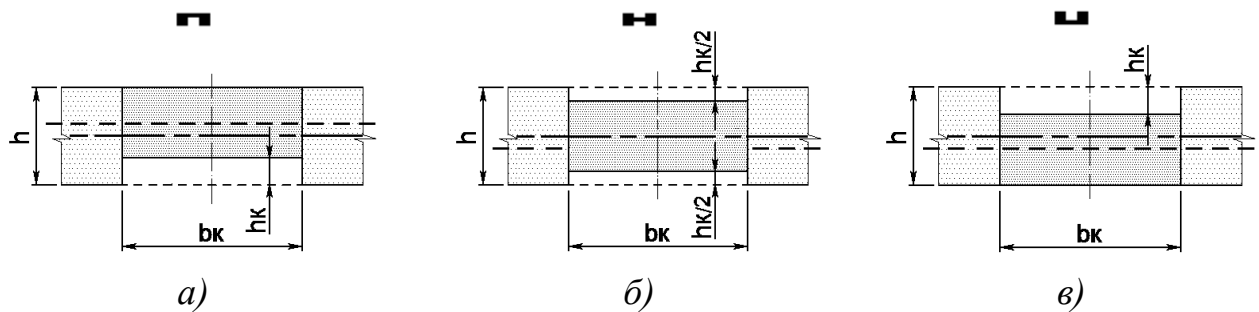


Рис. 4.10. Схематичне зображення послаблення оболонки каналом

Для моделювання геометричних особливостей оболонок ступінчато-змінної товщини у вигляді ексцентрично розташованих ребер, накладок, каналів та виїмок у ПК ЛІРА-САПР та SCAD застосовуються спеціальні елементи. У ПК ЛІРА-САПР – це так звані «абсолютно жорсткі вставки» та «абсолютно жорсткі тіла» [43, 91, 92]. У ПК SCAD – це «абсолютно жорсткі (тверді) тіла» [107, 37, 184]. В обох випадках це штучні прийоми, які застосовуються для апроксимації в розрахунковій СЕМО ступінчатої зміни її товщини з урахуванням ексцентриситету. Метою запровадження цих спеціальних елементів є задавання кінематичного зв'язку для відповідних вузлових переміщень. В розрахунках для апроксимації каналів в ПК ЛІРА-САПР використовуються «абсолютно жорсткі вставки», а в ПК SCAD - «абсолютно жорсткі (тверді) тіла».

**4.2.2.1** Розглядається оболонка з «вузькими» каналами, які мають однакові параметри: завдовжки  $a$ , завширшки  $b_k = 2h$  та завглибшки  $h_k = 0.3h$ . Для усіх алгоритмів маємо гарний збіг кривих « $\bar{q} - \bar{u}$ » у докритичній області (рис. 4.11). Розрахунки за ПК ЛІРА-САПР припиняються у верхній критичній точці. На рисунках ця точка позначена «\*». Розв’язок, що отриманий за ПК SCAD для панелі з симетричним розташуванням каналів, точно реалізує перехід на закритичну стійку гілку (рис. 4.11, б). Для симетричного виду послаблення, діаграми « $\bar{q} - \bar{u}$ » побудовано для переміщення в трьох характерних точках.

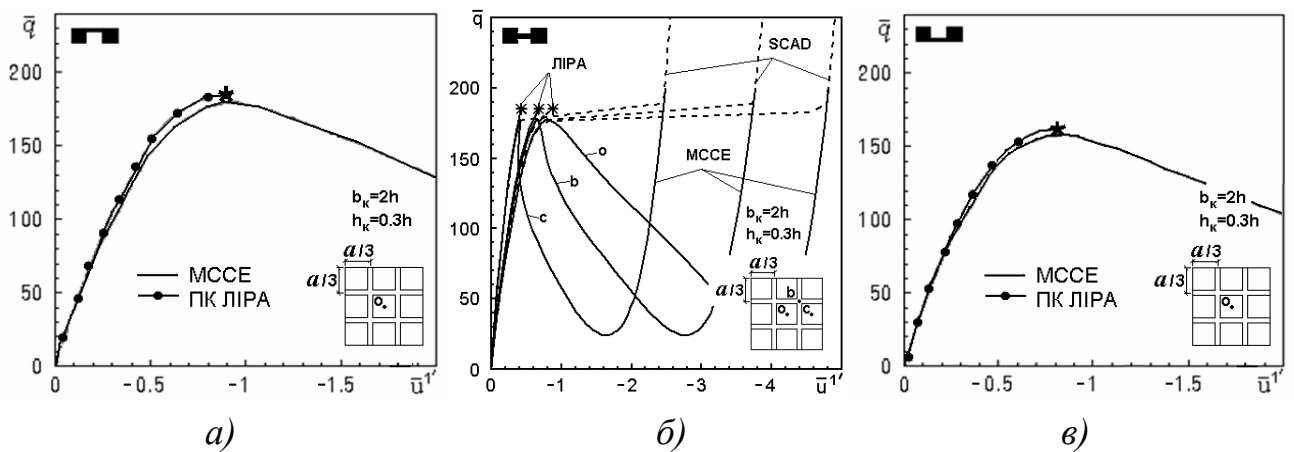






Рис. 4.11. Порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » при різних розташуваннях каналів на поверхні оболонки

Зіставлення розв’язків у верхній критичній точці, що отримані за MCSE та ПК ЛІРА-САПР і SCAD, показало, що для всіх видів послаблень розходження за навантаженням  $\bar{q}_{кр}^e$  і за прогином у центрі панелі  $\bar{u}_{кр}^{1'e}$  не перевищує 4% (табл. 4.3).

Для вузьких каналів маємо малий вплив їхнього ексцентричного розташування на величину критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$ . Найбільше зменшення  $\bar{q}_{кр}^e$  порівняно з гладкою панеллю, викликало послаблення на зовнішній стороні оболонки. Критичне навантаження цієї оболонки зменшилося на 18,7%.

Таблиця 4.3

Тип панелі	$\bar{q}_{кр}^B$			$\bar{u}_{кр}^{1'B}$ (у центрі)		
	МССЕ	ЛІРА-САПР $\Delta, \%$	SCAD $\Delta, \%$	МССЕ	ЛІРА-САПР $\Delta, \%$	SCAD $\Delta, \%$
$e > 0$ 	178,8	178,98 0,10%	—	-0,889	-0,923 3,8%	—
$e = 0$ 	177,3	184,3 3,95%	176,21 -0,61%	-0,842	-0,819 -2,7%	-0,839 0,36%
$e < 0$ 	157,4	162,40 2,82%	—	-0,781	-0,805 3,1%	—
Гладка 	193,7	202,8 4,7%	190,2 -1,8%	-0,9125	-0,8580 -5,97%	-0,7729 -15,3%

**4.2.2.2** Розглядається вплив на поведінку оболонки послаблення у вигляді «широких» каналів (завдовжки  $a$ , завширшки  $b_k = 6h$  та завглибшки  $h_k = 0.7h$ ) із симетричним розташуванням щодо серединної поверхні панелі.

Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ », що отримані за використання МССЕ, ПК ЛІРА-САПР та SCAD, побудовані для прогинів у відповідних різних точках оболонки («о» та «б»). Одержані криві повністю між собою збігаються в докритичній області та в околі верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  (рис. 4.12, а).

На відміну від розрахунку панелі з «вузькими» каналами, ПК ЛІРА-САПР припинила обчислення в точці розгалуження при навантаженні  $\bar{q}^* = 64,79$ , приймаючи точку розгалуження за верхнє критичне навантаження (рис. 4.12, а). На рисунку ця точка позначена «\*». Точка розгалуження також була виявлена при розрахунках за МССЕ. В алгоритмі МССЕ є можливість уточнити значення  $\bar{q}^*$  (табл. 4.4). За рахунок внесення у вихідну форму оболонки малого ( $\lambda = 0,01$ ) несиметричного збурення, спеціально розроблена методика дає змогу перетворити точку розгалуження «\*» на критичну ( $\bar{q}^* = 63,34$ ) і вийти на нову гілку розв'язку (штрих пунктирна крива). Отримане навантаження  $\bar{q}^*$  на 13,16% менше за критичне  $\bar{q}_{кр}^e$ . Послаблення оболонки широкими каналами

привело до значного зменшення величини верхнього критичного навантаження (на 62,34%) порівняно з відповідним розв'язком для гладкої панелі.

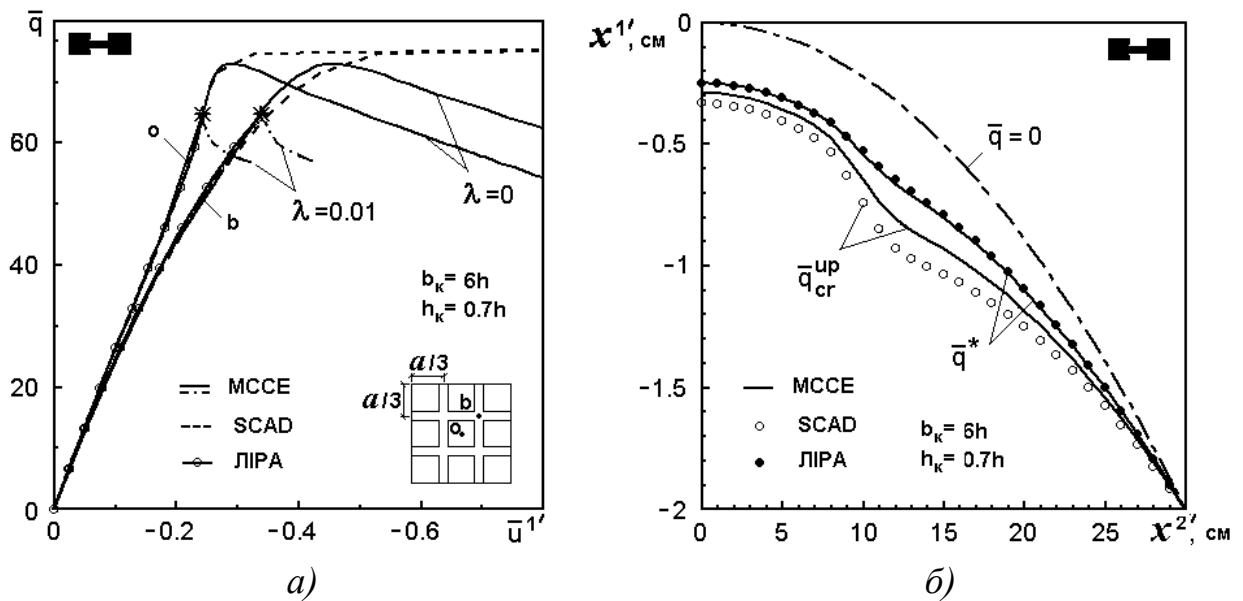


Рис. 4.12. Порівняння розв'язків за діаграмами « $\bar{q} - \bar{u}^1'$ » і формами деформування для панелі з широкими каналами

Таблиця 4.4

Метод розрахунку	$\frac{\bar{q}_{кр}^B}{\bar{u}_{кр}^{1'B}}$	$\frac{\Delta^q, \%}{\Delta^u, \%}$	$\frac{\bar{q}^*}{\bar{u}^{1'*}}$	$\frac{\Delta^{q^*}, \%}{\Delta^{u^*}, \%}$
МССЕ	$\frac{72,94}{-0,2876}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{63,34}{-0,2410}$	$\frac{0}{0}$
ЛІРА-САПР	—	—	$\frac{64,79}{-0,2451}$	$\frac{2,89}{1,70}$
SCAD	$\frac{74,71}{-0,3289}$	$\frac{2,43}{12,81}$	—	—

Форми деформування оболонки, що отримані за різними алгоритмами, добре збігаються між собою (рис. 4.12, б). Прогин в центрі панелі в момент втрати стійкості є меншим, ніж у зоні розміщення послаблення (рис. 4.13).

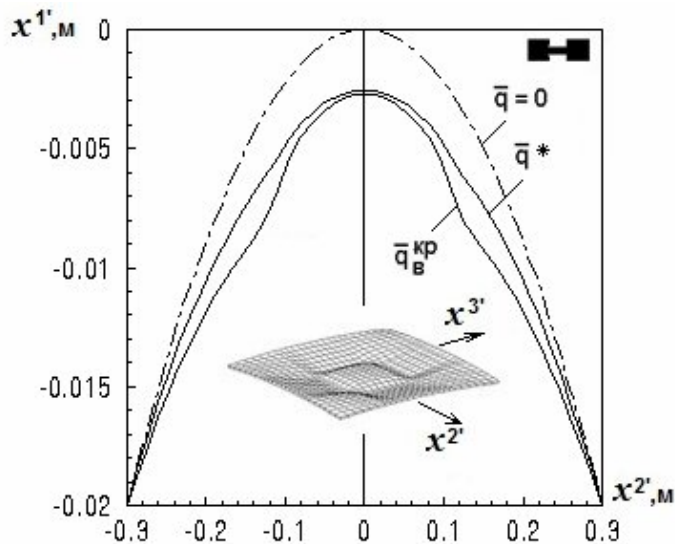


Рис. 4.13. Форми панелі в характерні моменти навантаження та форма втрати стійкості

**4.2.3** Розглядається квадратна у плані полого сферична панель ( $K = 32$ ), що має наскрізне послаблення у вигляді центрального квадратного отвору завширшки  $b_0 = 12h$ . Досліджується дія комбінованого термомеханічного навантаження (тиск та попередній нагрів) на стійкість і власні коливання оболонки з отвором. Вивчається вплив на поведінку панелі трьох варіантів рівномірного за об'ємом нагріву (чи охолодження) на  $T = -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ\text{C}$ .

Результати розрахунку гладкої панелі (на рисунках позначка «■») є порівняльною основою для аналізу впливу отвору як геометричної особливості («■») на поведінку оболонки. Прогин гладкої панелі визначається в її центрі, прогин панелі з отвором визначається в точці  $A$  (рис. 4.14).

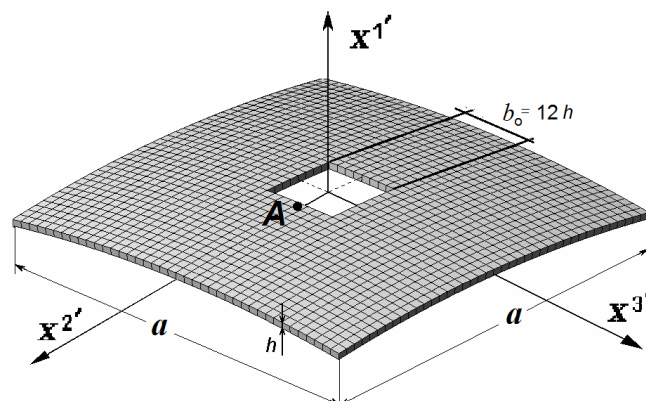


Рис. 4.14. Квадратна в плані сферична панель з центральним отвором

Виконано порівняльний аналіз розв'язків МССЕ з результатами отриманими в ПК ЛІРА-САПР. Спостерігається гарний збіг діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » у

докритичній області та в момент втрати стійкості (рис. 4.15, а). Маємо незначну розбіжність як за величиною критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$ , так і за величиною прогину  $\bar{u}_{кр}^{1'6}$  (табл. 4.5).

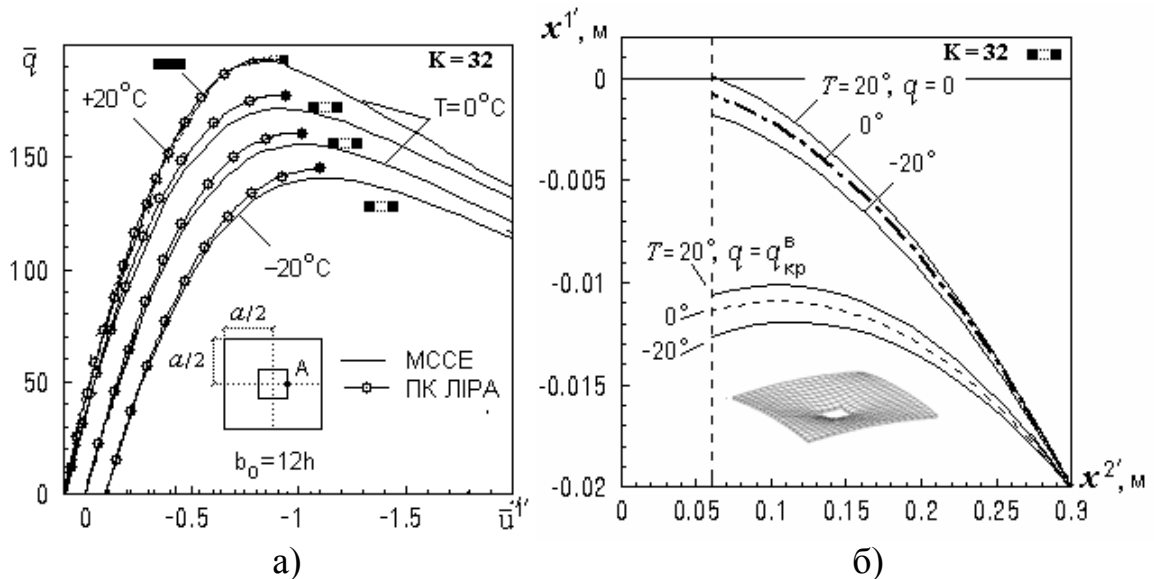


Рис. 4.15. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ » для гладкої панелі і панелі з отвором (а); форми деформування та втрати стійкості (б)

Таблиця 4.5

Варіант розрахунку	$T = -20^\circ\text{C}$		$T = 0^\circ\text{C}$		$T = +20^\circ\text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}_{кр}^{1'6}$	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}_{кр}^{1'6}$	$\bar{q}_{кр}^6$	$\bar{u}_{кр}^{1'6}$
Гладка панель «■»						
МССЕ	175.0	-0.9613	193.7	-0.9125	212.2	-0.7984
ЛІРА-САПР	185.9	-1.0000	202.8	-0.8580	228.4	-0.7509
$\Delta, \%$	6.2	4.0	4.7	-6.0	7.6	-5.9
Панель з отвором «■□■»						
МССЕ	140.83	-1.095	156.41	-0.950	171.55	-0.904
ЛІРА-САПР	145.00	-1.098	161.00	-1.018	177.56	-0.941
$\Delta, \%$	3.0	0.3	2.9	7.2	3.5	4.1

Попереднє охолодження ( $T = -20^\circ\text{C}$ ) та попередній нагрів ( $T = +20^\circ\text{C}$ ) приводять до відповідної незначної зміни форми оболонки, яка мало відрізняється від початкової ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = 0$ ). Втрата стійкості панелі характеризується проклацуванням її центральної частини (рис. 4.15, б). За обома

методами розрахунку отримано повний збіг відповідних форм деформування оболонки в момент припинення нагріву, а також при втраті стійкості. Послаблення гладкої панелі центральним отвором при відповідних варіантах попереднього нагріву призвело до практично однакового зниження величини  $\bar{q}_{кр}^{\beta}$  на 19,52, 19,25 та 19,15% (табл. 4.5). Модальний аналіз оболонки дозволив зробити такі висновки. Діаграми « $\bar{q} - \omega_1$ » для гладкої панелі і панелі з отвором, що знаходяться під дією лише тиску ( $T = 0^{\circ}\text{C}$ ), є подібними одна до одної (рис. 4.16, а).

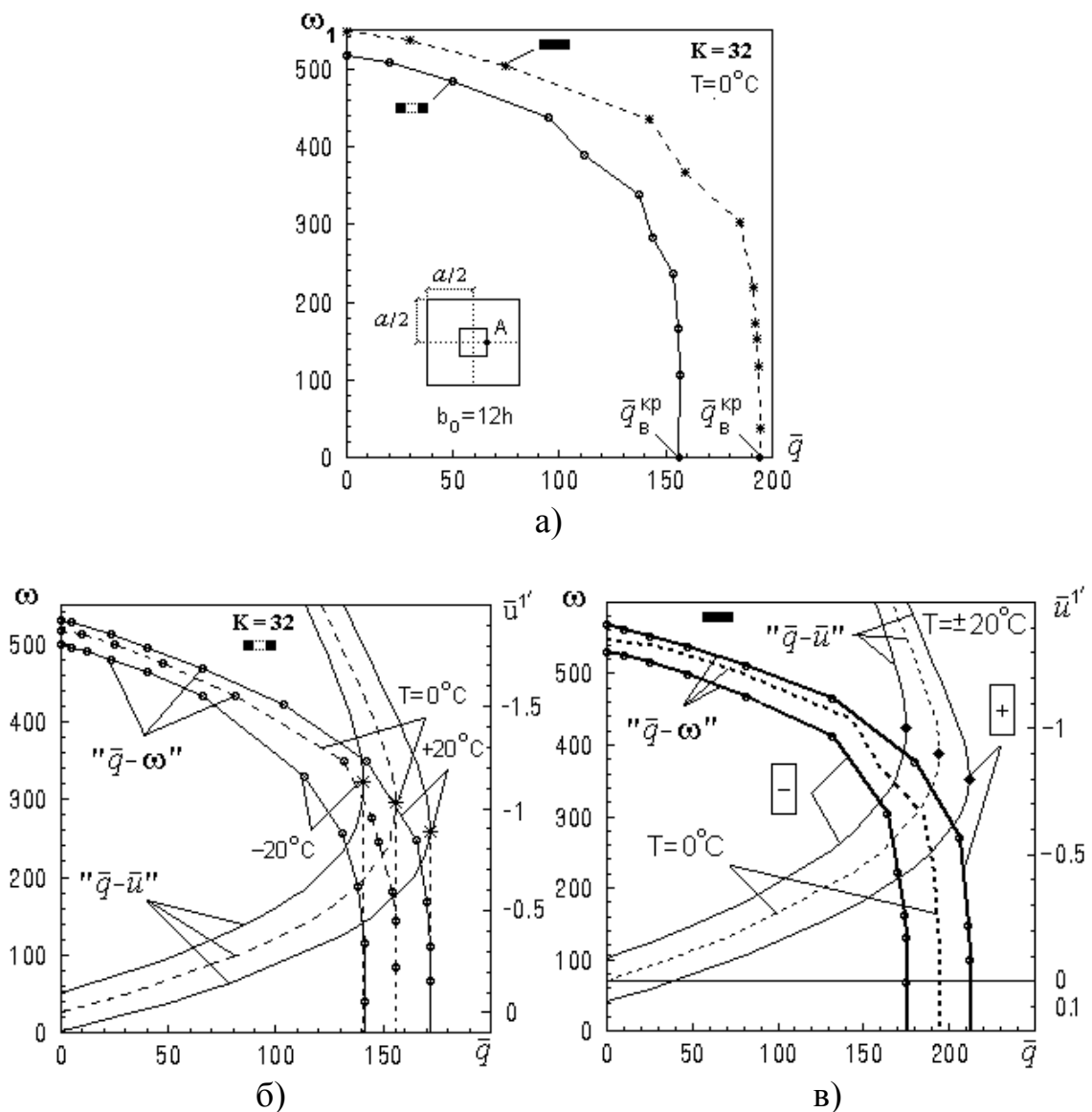


Рис. 4.16. Діаграми для панелі з отвором та гладкої



Моменти навантаження  $\bar{q}^i$ , при яких розраховувалися власні коливання, показані на рисунках кружечками. Для всіх випадків нагріву, діаграми « $\bar{q} - \omega_1$ » також мають подібний вигляд (рис. 4.16, б, в).

Для вихідного ненавантаженого стану ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = 0$ ) перші чотири нижчі частоти і форми власних коливань панелі, що отримані за методом, який спирається на використання МССЕ і відповідні частоти та форми, одержані за допомогою ПК ЛІРА-САПР, наведено на рис. 4.17. Маємо повний збіг форм коливань, що одержані за різними методиками. Розбіжність за частотами не перевищує 0,2%.

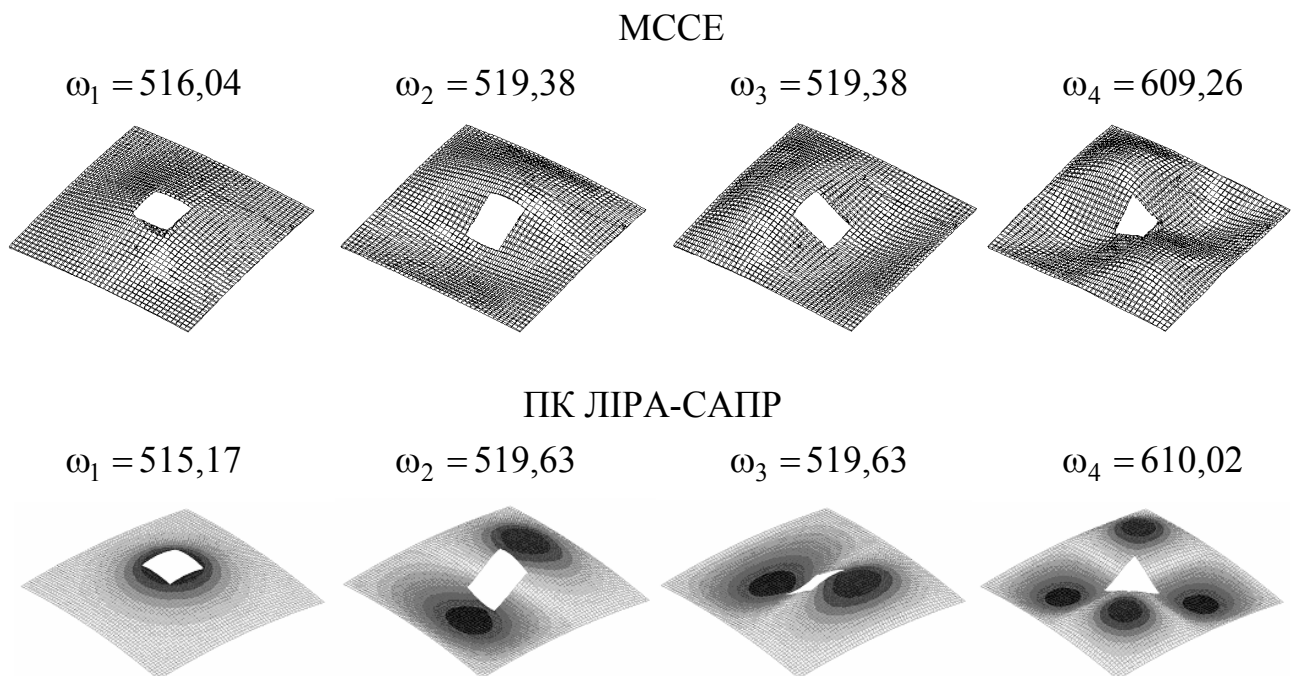


Рис. 4.17. Форми власних коливань ( $\omega_k^{i=0}$ , Гц) ненавантаженої оболонки,  
  $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = 0$

Порівняння форм власних коливань гладкої (рис. 4.8 «■») та послабленої отвором (рис. 4.17 «■») панелей у вихідному стані ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = 0$ ) виявило, що вони є різними. Частоти  $\omega_1 = \omega_2$  для гладкої оболонки є кратними, а для оболонки з отвором кратними є частоти  $\omega_2 = \omega_3$ . Наявність отвору знижує

величину власної частоти  $\omega_1$  лише на 3,3%. Нагрів мало впливає на частоти. В табл. 4.6 надано власні частоти коливань для нагрітої оболонки («■»,  $\bar{q}=0$ ).

Таблиця 4.6

$T^{\circ}\text{C}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
<b>0</b>	<b>516,04</b>	<b>519,38</b>	<b>519,38</b>	<b>609,26</b>	<b>714,34</b>
+20	530,17	530,28	531,51	616,65	716,62
$\Delta_0^{+20}$	+2,37	+2,10	+2,33	+1,21	+0,32
-20	499,77	508,29	508,38	602,11	712,05
$\Delta_0^{-20}$	-3,15	-2,13	-2,12	-1,17	-0,32

**4.2.4** Досліджується вплив лінійної змінності товщини на стійкість гладкої пологої панелі при дії тиску. Порівняльний аналіз розв'язків виконаний для розрахунків, що отримані за використання MSCЕ, із застосуванням ПК ЛІРА-САПР [92] та з результатами, що наведені в роботі Б.Я. Кантора [63]. В роботі [63] геометрично нелінійна задача теорії пологих оболонок розв'язана в осесиметричній постановці варіаційним методом. Математична модель пологої панелі подана як пластина з початковим прогином, а метрика криволінійної поверхні замінена метрикою площини. Технічна теорія побудована на гіпотезі прямих нормалей, у межах якої розглянуті згин, стійкість та закритична поведінка пологої оболонки.

Досліджується деформування та стійкість панелі з лінійним розподілом товщини за радіусом (рис. 4.18, а). Закон лінійної зміни товщини вздовж меридіана оболонки (радіусом  $r$ ) у загальному випадку може бути заданий за допомогою двох характерних параметрів: товщини панелі в центрі  $h_{\bar{r}=0}$  та на контурі  $h_{\bar{r}=1}$

$$h(\bar{r}) = h_{\bar{r}=0} + (h_{\bar{r}=1} - h_{\bar{r}=0})\bar{r}, \quad (4.1)$$

де  $\bar{r} = r/a$ .

Розглядається два способи лінійної зміни товщини оболонки. У першому способі товщина в центрі панелі  $h_{\bar{r}=0}$  є незмінною, а на контурі  $h_{\bar{r}=1}$  від задачі

до задачі приймає різні задані значення (рис. 4.18, б). Позначка на рисунках «◀▶». У другому способі, навпаки, була зафіксована товщина на контурі оболонки  $h_{\bar{r}=1}$ , а у центрі  $h_{\bar{r}=0}$  вона могла приймати різні задані значення (рис. 4.18, в). Позначка на рисунках «●».

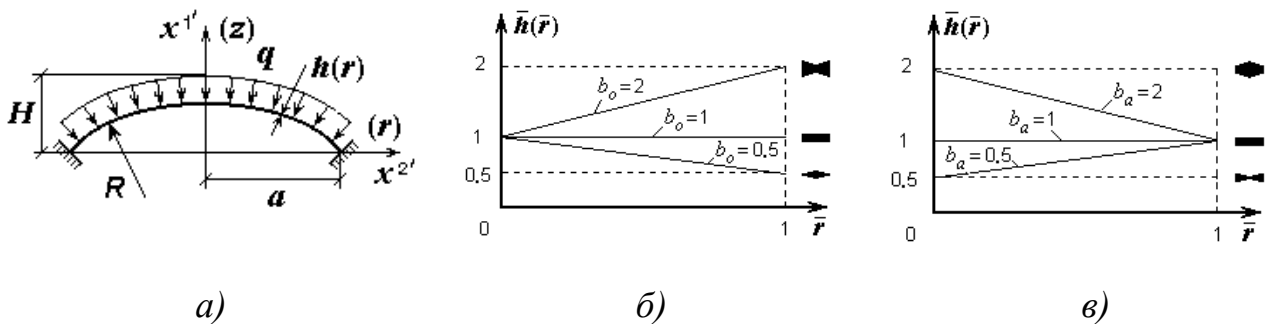


Рис. 4.18. Сферична панель лінійно-змінної товщини

Панель жорстко затиснута за контуром та навантажується рівномірним тиском інтенсивністю  $q$ . Вихідні дані: вихідна («базова») товщина  $h^* = 0,01$  м, стріла підйому  $H = 5h^*$ , радіус серединної поверхні  $R = 1002,5h^*$ , радіус опорного контуру  $a = 100h^*$ ,  $E = 19,6 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,3$ .

Введемо безрозмірний параметр  $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$  [63]. Цей параметр чисельно визначає ступінь лінійної змінності товщини панелі за радіусом, а саме, від її центра до контуру. Тоді загальна функція товщини (4.1) може бути записана так:

$$h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_o - 1)\bar{r}]. \quad (4.2)$$

За «базову» товщину панелі прийнято значення товщини в її центрі ( $h^* = h_{\bar{r}=0}$ ). Для цього способу зміни товщини при  $1 \leq b_o \leq 2$  існує розв'язок наданий в [63].

Введемо безрозмірний параметр  $b_a = h_{\bar{r}=0}/h_{\bar{r}=1}$ , який чисельно визначає ступінь лінійної змінності товщини від контуру до центра панелі. Тоді маємо:

$$h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_a - 1)(1 - \bar{r})], \quad (4.3)$$

де за «базову» товщину прийнято значення товщини на контурі ( $h^* = h_{\bar{r}=1}$ ). В частинному випадку, коли  $b_o = b_a = 1$ , отримуємо оболонку сталої товщини.

За розрахункову СЕМО прийнято чверть оболонки зі сіткою  $20 \times 20$  СЕ. Результати виконаних досліджень, відповідно до [63], наводяться у безрозмірному вигляді:

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left( \frac{a}{h^*} \right)^4, \quad \bar{u}^{1'} = \frac{u^{1'}}{h^*}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{h}(\bar{r}) = \frac{h(\bar{r})}{h^*}, \quad k = \frac{H}{h^*}. \quad (4.4)$$

Порівняльний аналіз нелінійних розв'язків МССЕ та роботи [63] (в діапазоні зміни параметра  $b_o$  від 1 до 2 з потовщенням від центра оболонки до краю) показав практично повний збіг на всіх ділянках діаграм «навантаження-прогин» (рис. 4.19, а; рис. 4.20, а).

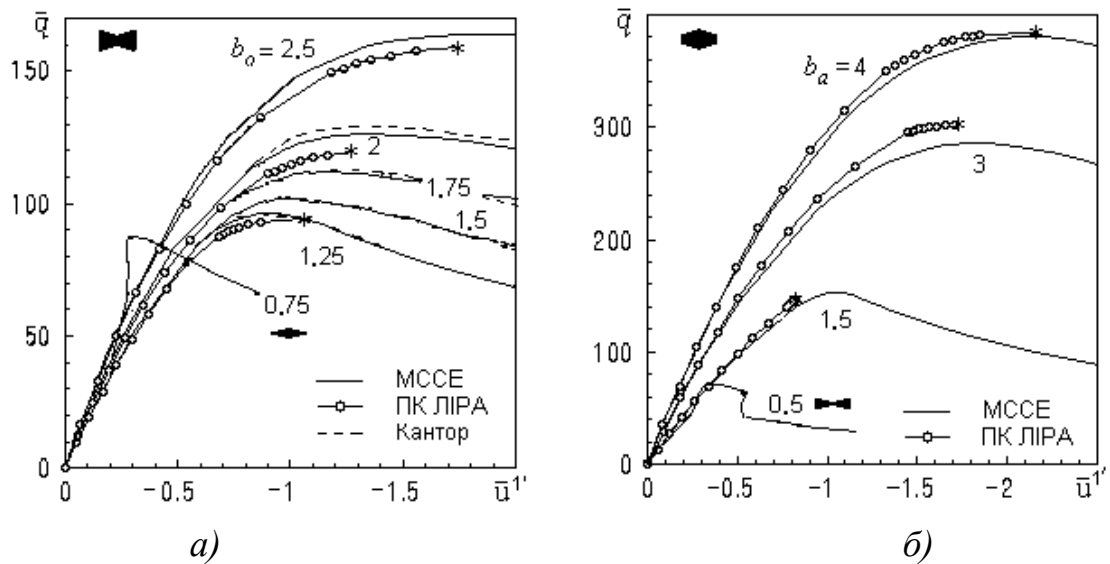


Рис. 4.19. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ » панелей різної змінної товщини

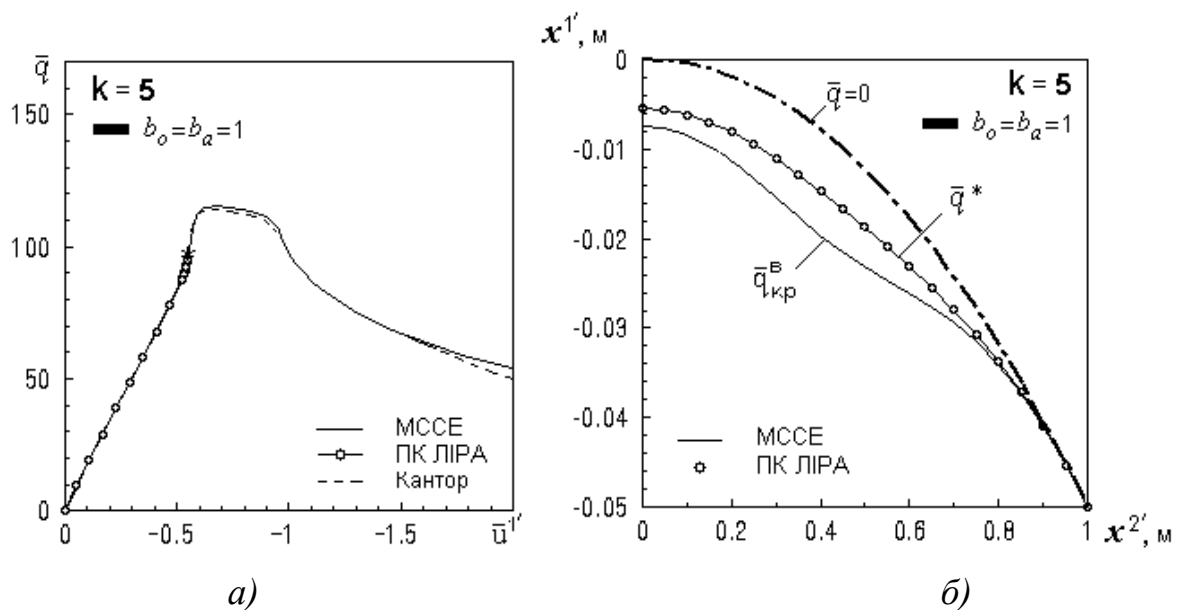


Рис. 4.20. Порівняння розв'язків для оболонки сталої товщини

Порівняння нелінійних розв'язків МССЕ і ПК ЛІРА-САПР виконано для параметрів товщини, що змінюються у межах  $1 \leq b_o \leq 2,5$  та  $1 \leq b_a \leq 4$ . Розглядаються відповідні пари оболонок, що мають однаковий об'єм (табл. 4.7). Параметр  $b_a = 4$  відповідає оболонці того ж об'єму першого варіанта лінійно-змінної товщини при  $b_o = 2.5$ . Розглянуто випадки  $b_o = 0.75$ , що відповідає стоншенню панелі на границі (➔) та  $b_a = 0.5$ , що відповідає стоншенню панелі в центрі (➔).

Таблиця 4.7

№	$b_o$	$b_a$	$V \times 10^5$ , м <sup>3</sup>	$\bar{q}^*$ $\bar{q}_{кр}^e(b_o)$	ПК ЛІРА- САПР	$\bar{q}^*$ $\bar{q}_{кр}^e(b_a)$	ПК ЛІРА- САПР
1	0,75	0,50	2622	80,25 87,96	–	58,80 61,83	–
2	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>3146</b>	94,4 115,3	94,9 –	94,4 115,3	94,9 –
3	1,25	1,50	3671	– 96,37	94,03 –	151,2 153,0	146,9 –
4	2	3	5244	– 126,20	– 128,00	– 286,3	– 302,7
5	2,5	4	6274	– 164,03	– 160,84	– 380,3	– 384,0

СЕМО гладкої сферичної панелі лінійно-змінної товщини при розрахунку за ПК ЛІРА-САПР моделювалася двома типами оболонкових елементів: № 344 – нелінійний трикутний СЕ та № 342 – нелінійний чотирикутний СЕ. У полюсі оболонки застосовувалися трикутні, а на її інших ділянках – чотирикутні елементи. В ПК ЛІРА-САПР відсутня можливість задавання в оболонках лінійної зміни товщини. Тому при розрахунках лінійно-змінна товщина панелі замінювалася ступінчасто-змінною. Для забезпечення точності апроксимації гладко-змінної товщини оболонки використовувалася густа сітка.

Зіставлення розв'язків за кривими « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » показало їх повний збіг у докритичній області та незначне розходження у верхній критичній точці (рис. 4.19, рис. 4.20). Аналіз розв'язків, отриманих за використання МССЕ і ПК ЛІРА-САПР, виявив наявність точок розгалуження для панелі сталої товщини ( $b_o = b_a = 1$ , рис. 4.20, а) і лінійно-змінної з параметром  $b_a = 1.5$  (рис. 4.19, б). У цих точках (табл. 4.7) розбіжність отриманих величин навантажень  $\bar{q} = \bar{q}^*$  становить 0,5 і -2,8%, відповідно.

Порівняння форм деформування та втрати стійкості показало також їх гарний збіг (рис. 4.21). Найбільше деформування панелей з параметрами товщини  $b_o = 1,5, 2, 2,5$  реалізується у полюсі (рис. 4.21, а). Для панелей лінійно-змінної товщини ( $b_a = 1,5, 3, 4$ ) втрата стійкості чиниться через проклацування центральної частини оболонки (рис. 4.21, б). Для панелі з параметром  $b_a = 1,5$  показана відмінність форм деформування в точці розгалуження ( $\bar{q}^*$ ) та у верхній критичній ( $\bar{q}_{кр}^B$ ). Для панелей сталої товщини ( $b_o = 1$ ), з потоншенням на краю ( $b_o = 0,75$ ) та з потоншенням в центрі ( $b_o = 0,5$ ) втрата стійкості відбувається з утворенням кільцевої вм'ятини посередині меридіану (рис. 4.21, а).

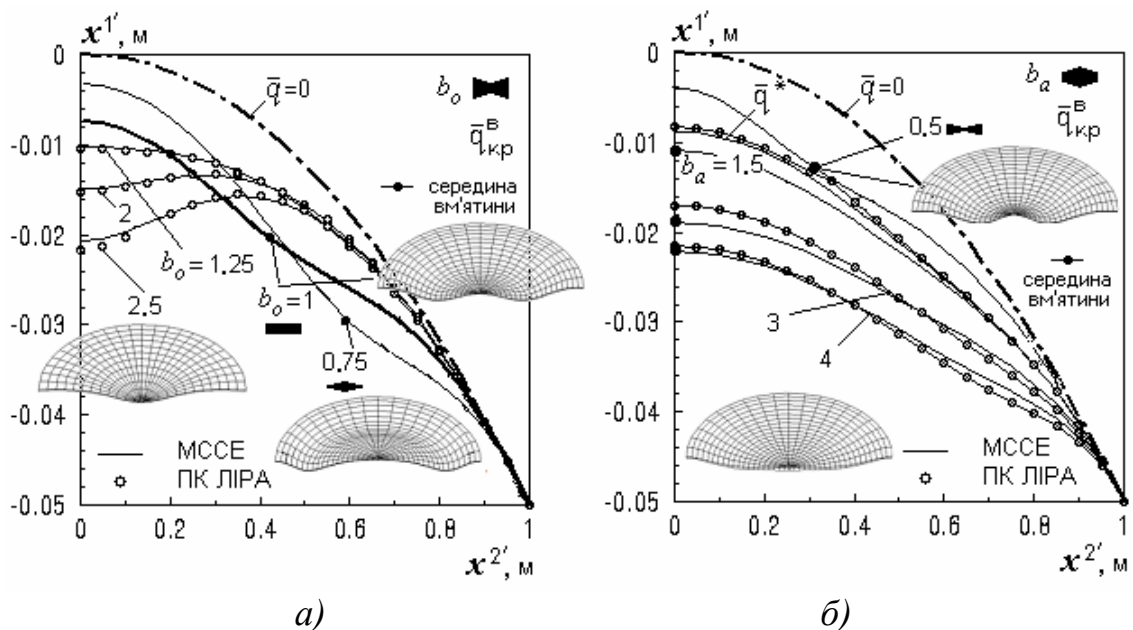


Рис. 4.21. Форми втрати стійкості оболонок лінійно-змінної товщини

На рис. 4.22 показано перерозподіл мембранних  $\sigma_m^{\alpha\alpha}$  і згинальних  $\sigma_3^{\alpha\alpha}$  напружень в СЕ у середній частині меридіану, що є найбільш напруженим місцем панелі. Тут  $\sigma^{22}$  – меридіональні,  $\sigma^{33}$  – колові напруження, що подані у безрозмірному вигляді  $\bar{\sigma}^{\alpha\alpha} = \sigma^{\alpha\alpha}/E$ . Можна зробити висновки, що у докритичній стадії деформування, мембранні та згинальні напруження збільшуються практично лінійно з перевагою мембранної складової. У закритичній області згинальні напруження змінюються нелінійно, перевищуючи мембранні напруження.

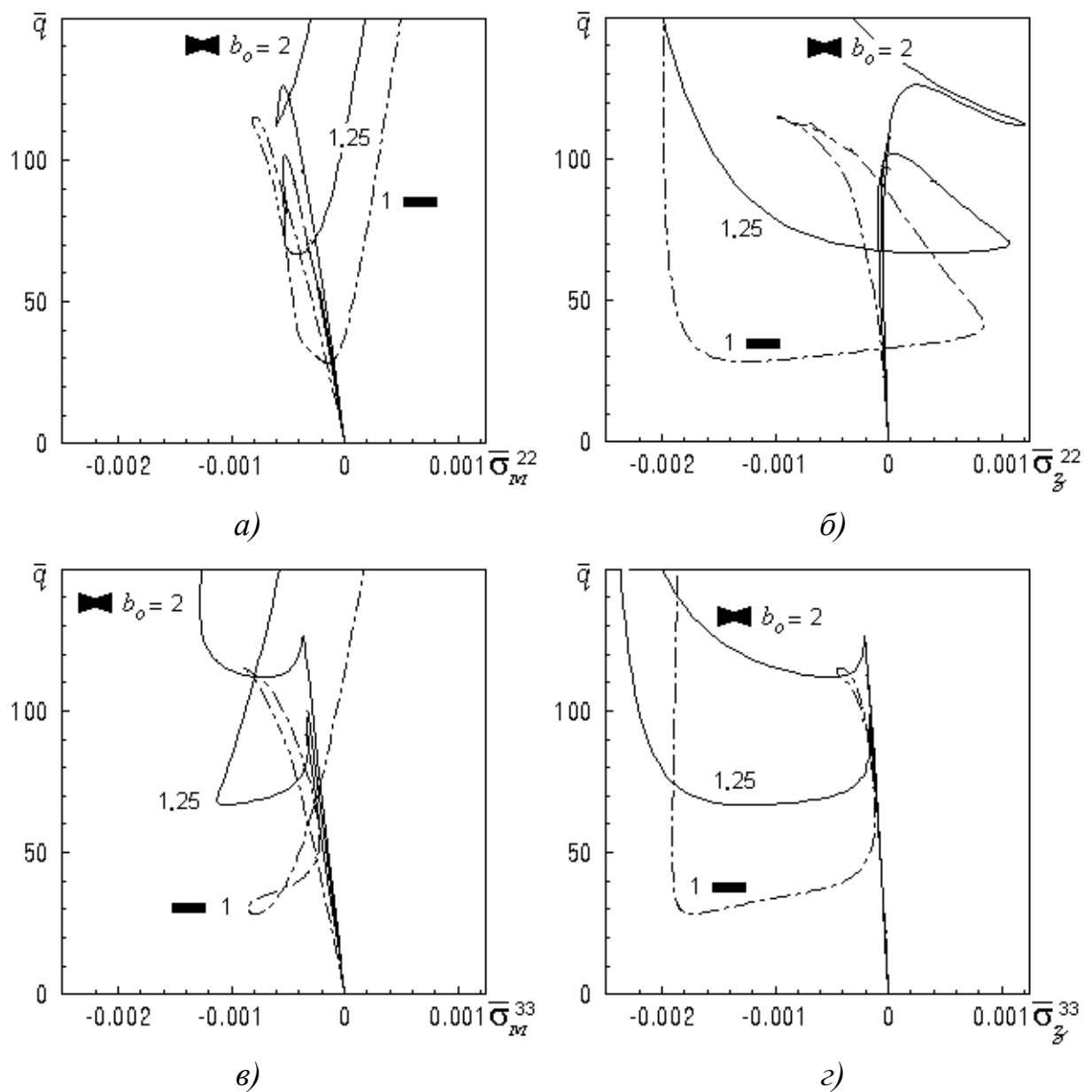


Рис. 4.22. Діаграми «навантаження - напруження» панелі з параметрами  $b_0$

**4.2.5** Проведені дослідження стійкості і власних коливань тонких пружних оболонок (гладких, лінійно- та ступінчасто-змінної товщини, з отвором) при дії термомеханічних навантажень показали, що розроблений метод є ефективним засобом комплексного дослідження стійкості та власних коливань неоднорідних оболонок при складних термомеханічних навантаженнях.

Також, проведені дослідження демонструють можливість, звичайно, в окреслених межах, залучання ПК ЛІРА-САПР та SCAD, як засобу підтвердження достовірності результатів, що отримуються, при дослідженні геометрично нелінійної поведінки тонких гнучких пружних оболонок.

Проте скінченні елементи ПК мають дещо обмежене застосування через особливості моделювання тонких оболонок. Оскільки СЕ є плоскими елементами сталої товщини, апроксимація оболонки як тривимірного тіла є недостатньо точною. Ці плоскі СЕ не можуть моделювати злам серединної поверхні без розривів і накладання об'єму, на відміну від тривимірного СЕ за методикою МССЕ [170]. Також через сталу товщину СЕ модель оболонки лінійно-змінної товщини в ПК необхідно замінювати ступінчасто-змінною СЕМО. При цьому для отримання достовірних результатів необхідно використовувати достатньо густу сітку. Крім того, всі вузли одного чотирикутного СЕ розміщуються в одній площині і не можуть утворювати гіпар. Через це сильно непологі криволінійні поверхні необхідно моделювати тільки трикутними СЕ. Такі обмеження не стосуються універсального тривимірного ізопараметричного восьмивузлового СЕ, що використовується в розрахунках за МССЕ.

В ПК при моделюванні температурного навантаження наявні деякі обмеження: в площині елемента доступним є задавання лише сталого значення температурного навантаження. Тому моделювання неоднорідного температурного навантаження серединної поверхні оболонки в рамках одного СЕ є неможливим. Задавання спільного термомеханічного навантаження також є неможливим. Проте можна адаптувати алгоритм до задавання попереднього нагріву оболонки з наступним силовим донавантаженням, що було виконано в



дисертації. В існуючих версіях ПК ЛІРА-САПР та SCAD на сьогодні немає можливості проводити модальний аналіз оболонок з урахуванням переднапруженого стану.

Відомо, що в задачах стійкості оболонок для нелінійних розв'язків у критичних точках і у точках розгалуження, матриця системи розв'язувальних рівнянь стає виродженою. Зазвичай, в нелінійних процесорах на кроці навантаження відстежується виродження матриці лінеаризованої системи розв'язувальних рівнянь, тобто наявність від'ємних значень коефіцієнтів на її діагоналі. В ПК ЛІРА-САПР та SCAD, на відміну від методології MSCЕ, тип особливих точок не визначається. Тому в ПК ЛІРА-САПР точка, в якій вироджується матриця, приймається за критичну. Вона може бути точкою критичною або розгалуження.

### **4.3 Вплив форми на стійкість нагрітих осесиметричних панелей при дії тиску**

В будівництві широко застосовуються оболонки обертання як перекриття великопрогонових споруд. Найбільшого застосування знаходять поверхні обертання зі сферичною, конічною, еліптичною, параболічною формами серединної поверхні. Через простоту форми, в порівнянні з іншими оболонками, найбільшого поширення в сучасному будівництві набули сферичні панелі.

Досліджується вплив термомеханічного навантаження на стійкість сферичної (рис. 4.23, а) та конічної (рис. 4.23, б) панелей обертання за однакової стріли підйому, товщини та ваги [127, 168]. Проведено порівняльний аналіз розв'язків, що отримані, з розв'язками Кантора [63] та з результатами розрахунків, одержаними автором за допомогою ПК ЛІРА-САПР [92].

Розглядаються панелі зі стрілою підйому  $k = H/h = 3$ . Оболонки жорстко затиснуті по контуру. Вихідні данні:  $h = 0,01$  м,  $a = 100h$ ,  $E = 19,6 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\alpha = 0,125 \cdot 10^{-4}$  град<sup>-1</sup> – коефіцієнт лінійного розширення. Оболонки знаходяться під дією спільного термомеханічного навантаження (попередній

рівномірний за об'ємом нагрів на  $T^{\circ}\text{C}$  з подальшим навантаження рівномірно розподіленим тиском).

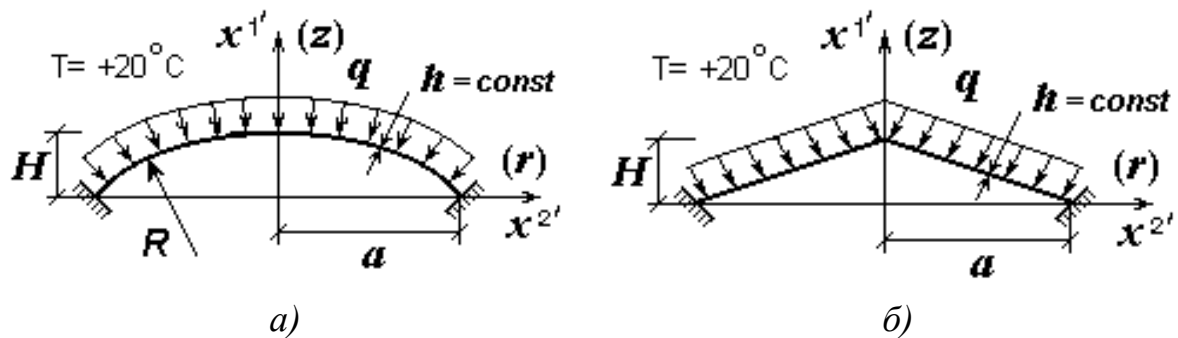


Рис. 4.23. Сферична (а) та конічна (б) круглі в плані панелі

Розв'язок цих задач був отриманий Б.Я. Кантором [63] варіаційним методом. Використовувалася нелінійна теорія пологих оболонок. Відповідно до [63] результати розрахунків наводяться у безрозмірному вигляді:

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4), \quad \bar{t} = 2\alpha T (a/h)^2, \quad k = H/h, \quad \bar{u}' = u' / h. \quad (4.5)$$

Нагрів оболонок реалізується до температури  $T = 20^{\circ}\text{C}$ , яка відповідає безрозмірному параметру нагріву  $\bar{t} = 5$ . Відповідно до результатів роботи [63], панелям характерне осесиметричне нелінійне деформування. Тому за розрахункову СЕМО сферичної оболонки було прийнято чверть оболонки з рівномірною сіткою  $20 \times 20$  СЕ (рис. 4.24, а). Згідно з даними [63] форма деформування конічної оболонки у закритичній області може мати складну форму. За розрахункову СЕМО було прийнято половину панелі з сіткою  $20 \times 40$  СЕ (рис. 4.24, б). Для оцінки впливу нагріву на поведінку оболонок наведено розв'язки для відповідних панелей при навантаженні лише тиском ( $T = 0^{\circ}\text{C}$ ). Для аналізу зміни форм деформування панелей на різних етапах термомеханічного навантаження на рисунках її вихідна форма показана штрихпунктирною лінією.

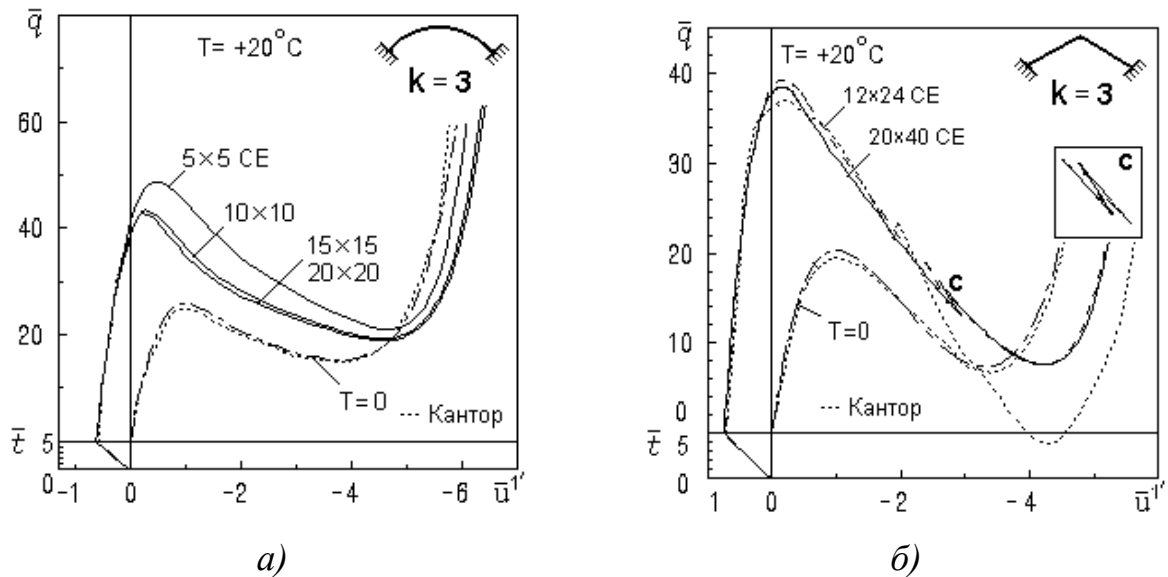


Рис. 4.24. Збіжність розв'язків за діаграми «навантаження – прогин» в центрі панелі (а) сферичної, (б) конічної

**4.3.1** Розглядається вплив комбінованого термомеханічного навантаження на поведінку *сферичної* осесиметричної оболонки. Дія прикладеного температурного поля приводить до підйому панелі в полюсі на величину  $0,65h$ . У моменти максимального нагріву оболонки ( $T = 20^\circ C$ ) та в докритичній області отримано повний збіг діаграм «навантаження  $\bar{q}$  – прогин  $\bar{u}^1$ » центра панелі (рис. 4.25, а) та форм деформування (рис. 4.25, б), які одержані з використанням МССЕ та ПК ЛІРА-САПР. У зоні  $\bar{q}_{кр}^6$  маємо деяке розходження діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ ». Причину розходження розв'язків у верхній критичній точці (табл. 4.8) можна пояснити різною точністю моделювання процесу температурного навантаження, а також тим, що в МССЕ застосовуються тривимірні СЕ, на відміну від плоских оболонкових СЕ у ПК ЛІРА-САПР. Порівняння розв'язків, отриманих за МССЕ та в [63], показує гарний збіг діаграм та величин верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  (табл. 4.8).

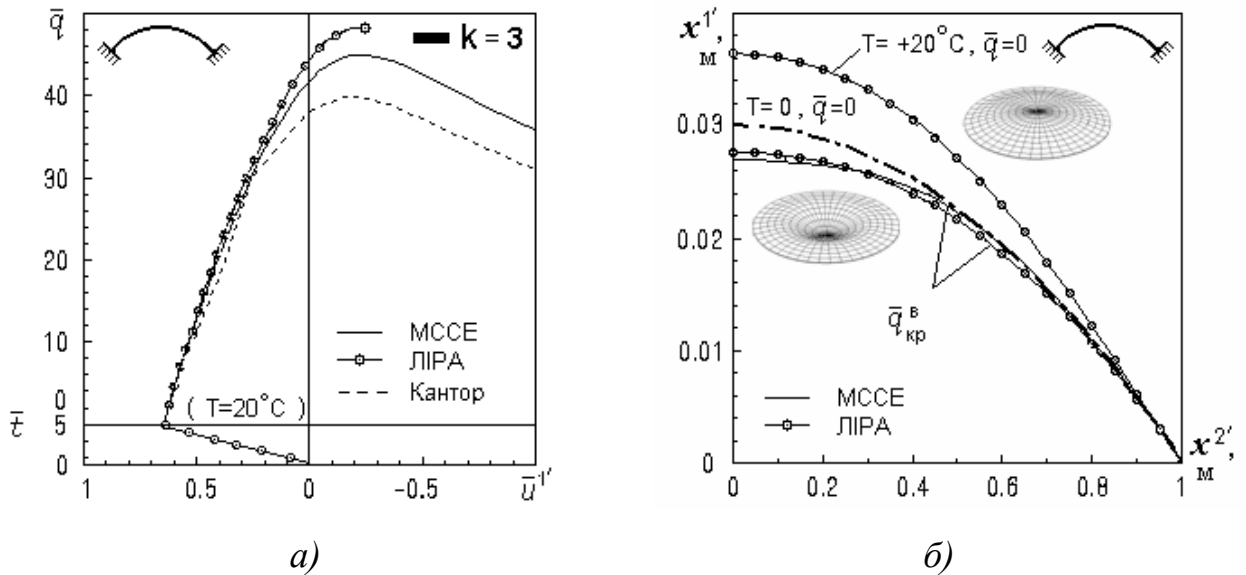


Рис. 4.25. Діаграми «навантаження – прогин» в центрі (а) сферичної панелі, форми деформування та втрати стійкості (б)

Таблиця 4.8

Форма панелі	$\bar{q}_{кр}^e / \bar{u}_{кр}^{1'e} (T = 20^\circ C)$				
	МССЕ	ЛІРА-САПР	$\Delta, \%$	Кантор	$\Delta, \%$
Сферична	$\frac{42,64}{-0,242}$	$\frac{48,37}{-0,230}$	$\frac{13,4}{-5,0}$	$\frac{39,8}{-0,1950}$	$\frac{-6,7}{-19,4}$
Конічна	$\frac{38,39}{-0,147}$	$\frac{34,23}{0,024}$	$\frac{-10,8}{-116,3}$	$\frac{37,00}{-0,200}$	$\frac{-3,6}{36,1}$

Одержані за МССЕ форми деформування панелі на різних етапах навантаження збігаються з відповідними, що отримані з використанням ПК ЛІРА-САПР (рис. 4.25, б). Втрата стійкості оболонки відбувається через проклацування її центральної частини, в полюсі.

**4.3.2** Розглядається вплив комбінованого термомеханічного навантаження на стійкість *конічної* оболонки. Як і вище, дія нагріву спричиняє підйом конічної панелі в полюсі на величину  $0,8h$ . У характерні моменти навантаження (після нагріву та у докритичній області) маємо також повний збіг діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » (рис. 3.26, а) та визначальних форм деформування (рис. 3.26, б) для розв'язків,

які отримані з використанням МССЕ та ПК ЛІРА-САПР. Як і вище, в околі критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  є деяке розходження розв'язків (табл. 4.8). Це явище також пояснюється різною точністю моделювання процесу нагріву. Порівняння розв'язків, отриманих за МССЕ та Кантором [63], показує гарний збіг діаграм та величин верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$ .

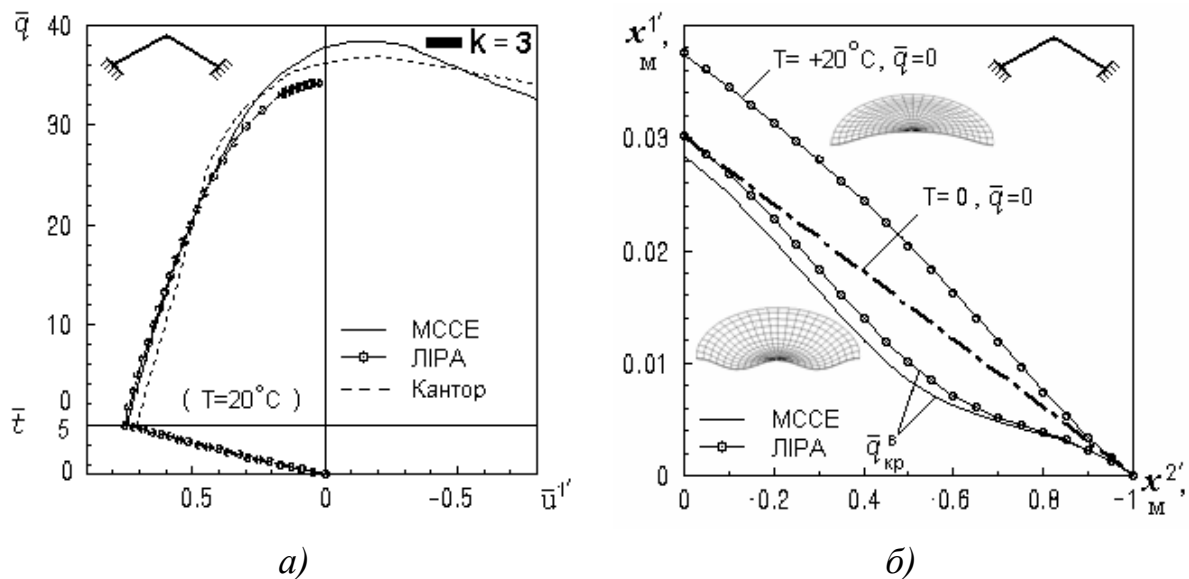


Рис. 4.26. Діаграми «навантаження – прогин» в центрі (а) конічної панелі та форми деформування і втрати стійкості (б)

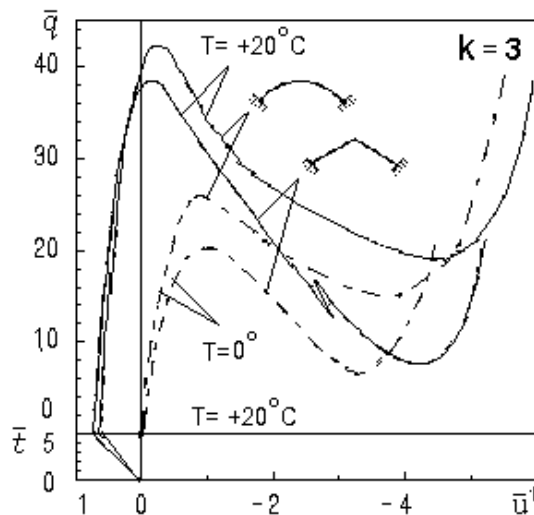
На всіх етапах навантаження, нелінійне деформування конічної панелі відбувається за осесиметричною формою (рис. 4.26, б). Через геометрію форми, конічна оболонка в полюсі має найбільшу жорсткість. Тому форма втрати стійкості оболонки характеризується осесиметричною вм'ятиною, яка розміщена у найбільш гнучкій частині панелі – посередині меридіану.

**4.3.3** Порівнюючи поведінку сферичної і конічної оболонок, можна зробити такий висновок: обидві панелі мають практично однакові об'єми, які різняться лише на 0,04% (табл. 4.9). Проте зміна форми оболонки з гладкої сферичної на конічну з особливістю у полюсі позначається на НДС конструкції. Величини  $\bar{q}_{кр}^6$  для конічної панелі менші за відповідні для сферичної оболонки на 21,59% ( $T=0^\circ\text{C}$ ) і 9,97% ( $T=20^\circ\text{C}$ ) (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

Форма панелі	$\bar{q}_{кр}^e$ ( $T = 0^\circ\text{C}$ )	$\Delta, \%$	$\bar{q}_{кр}^e$ ( $T = 20^\circ\text{C}$ )	$\Delta, \%$	Об'єм оболонки $V \cdot 10^6, \text{м}^3$	$\Delta, \%$
Сферична	25,85	0	42,64	0	31412	0
Конічна	20,27	-21,59	38,39	-9,97	31398	-0,04

Форма втрати стійкості сферичної панелі відбувається через «проклацування» у полюсі (рис. 4.25, б). На відміну від сферичної, конічна оболонка втрачає стійкість з утворенням осесиметричної вм'ятини посередині меридіану (рис. 4.26, б). У закритичній області діаграма « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » конічної панелі має більш складний вигляд. У точці «с» (рис. 4.24, б) відбувається перебудова форм деформування зі збереженням осесиметричного вигляду. Попередній нагрів значно підвищує жорсткість обох оболонок (рис. 4.27) як сферичної, так і конічної, при цьому величина  $\bar{q}_{кр}^e$  відповідно збільшуються в 1,65 і 1,89 рази (табл. 4.9) порівняно з ненагрітою панеллю ( $T = 0^\circ\text{C}$ ).

Рис. 4.27. Порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » для сферичної і конічної панелей

На рис. 4.28 подано діаграми «навантаження – енергія деформування» оболонки. Для сферичної і конічної панелей оцінюється вплив нагріву на поведінку потенціальної  $W_{II}$  (а), мембранної  $W_M$  (б) і згинальної  $W_3$  (в)

складових енергій. Залежності мають нелінійний характер. Аналіз діаграм надає додаткову інформацію про НДС та причини втрати стійкості пологих оболонок.

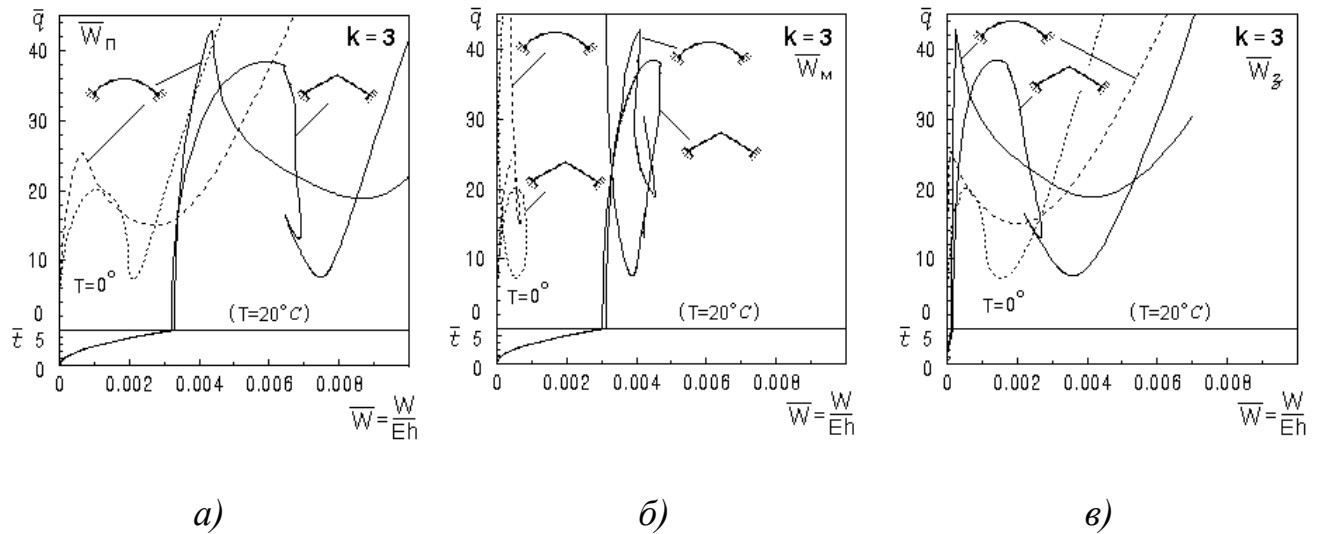


Рис. 4.28. Діаграми «навантаження-енергія деформування» сферичної і конічної панелі сталюї товщини: потенціальна (а), мембранна (б) та згинальна (в)

Мембранна складова енергії переважає в докритичній області. Врахування температурного нагріву значно підвищує рівень енергії деформування оболонки при дії тиску. Це стосується всіх складових енергій. Діаграми «навантаження-енергія деформування» панелі демонструють, що енергія конічної панелі на момент втрати стійкості є більшою.

#### 4.4 Оцінка впливу кривизни на стійкість, закритичну поведінку та власні коливання гладких і ребристих оболонок при термомеханічних навантаженнях

Тонкостінні оболонкові конструкції, що посилені ребрами, відносяться до одного з найпоширеніших класів комбінованих конструкцій, які застосовуються в різних областях сучасної техніки. Завдяки наявності ребер такі конструктивні елементи дають змогу найбільш раціонально розподілити матеріал в системі при забезпеченні умов міцності та стійкості. Постановка ребер істотно впливає на НДС, стійкість і власні коливання оболонки. Переваги

застосування ребристих оболонок стримуються труднощами їх розрахунку. Складнощі пов'язані не тільки з врахуванням роботи конструкції в геометрично нелінійній постановці, а й з дискретним розташуванням ребер. Використовуючи МССЕ, можна визначати НДС, стійкість і власні коливання ребристої оболонки на основі дискретної розрахункової моделі.

Несуча спроможність оболонкових конструкцій значно залежить від її геометричних параметрів, до яких в першу чергу відноситься стріла підйому. У квадратних за планом сферичних оболонок підйомність панелі характеризується параметром кривизни  $K = 2a^2/(Rh)$ , де  $h$  – товщина оболонки,  $a$  – розмір за планом,  $R$  – радіус серединної поверхні. Змінюючи кривизну оболонки, можна істотно впливати на її несучу спроможність. Тому дослідження впливу кривизни на стійкість, закритичну поведінку і коливання оболонок є важливою проблемою для практики.

Вивчається як впливає на стійкість і коливання конструкції перехід від гладких пологої ( $K = 32$ ) і непологої ( $K = 64$ ) оболонок до відповідних ребристих панелей. Розглядаються оболонки, що шарнірно оперті за контуром, при дії рівномірно розподіленого нормального тиску. Панелі підкріплено парою центральних ребер, які розташовані навхрест з боку увігнутості оболонки:  $h_r = 2h$  – висота ребра без товщини обшивки,  $b_r = 2h$  – ширина ребра. Матеріал обшивки і ребер однаковий:  $E = 19,6 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $h = 0,01$  м. Для оцінки впливу наявності ребер на процеси втрати стійкості і власних коливань оболонок, розв'язки для ребристих панелей порівняні з даними, отриманими для відповідної гладкої оболонки. На малюнках розв'язки, що отримані для ребристої панелі, мають позначку «**T**». Розв'язки, що відповідають гладкій оболонці, мають позначку «**—**». Виконано порівняння з відповідними розв'язками, отриманими за допомогою ПК ЛІРА-САПР та ПК SCAD [92, 184].

**4.4.1** Розглядається полого квадратна за планом панель ( $a = 60h$ ,  $R = 225h$ ,  $K = 32$ ) [81, 83]. Для гладкої панелі розв'язки наведено в підрозділі 4.2 (4.2.1). На базі отриманих результатів (рис. 4.6, рис. 4.9) і проведених для



ребристої панелі розрахунків, на (рис. 4.29, б) надано порівняння діаграм “ $\bar{q} - \bar{u}$ ” і “ $\bar{q} - \omega_1$ ” для гладкої та ребристої панелей.

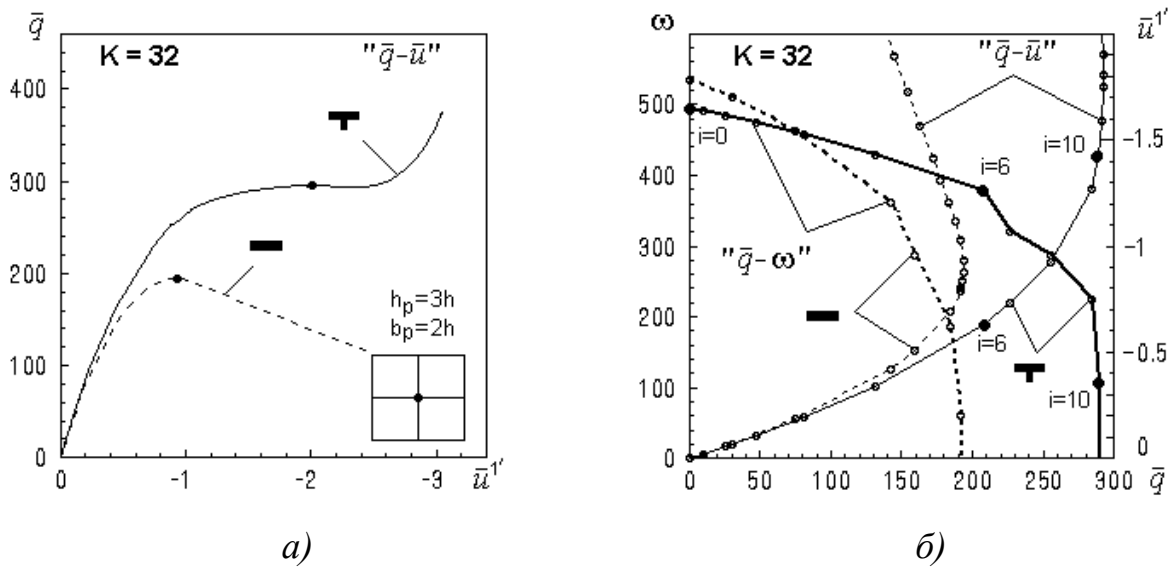


Рис. 4.29. Полога панель  $K = 32$ : порівняння відповідних діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » і « $\bar{q} - \omega_1$ » для гладкої та ребристої панелей

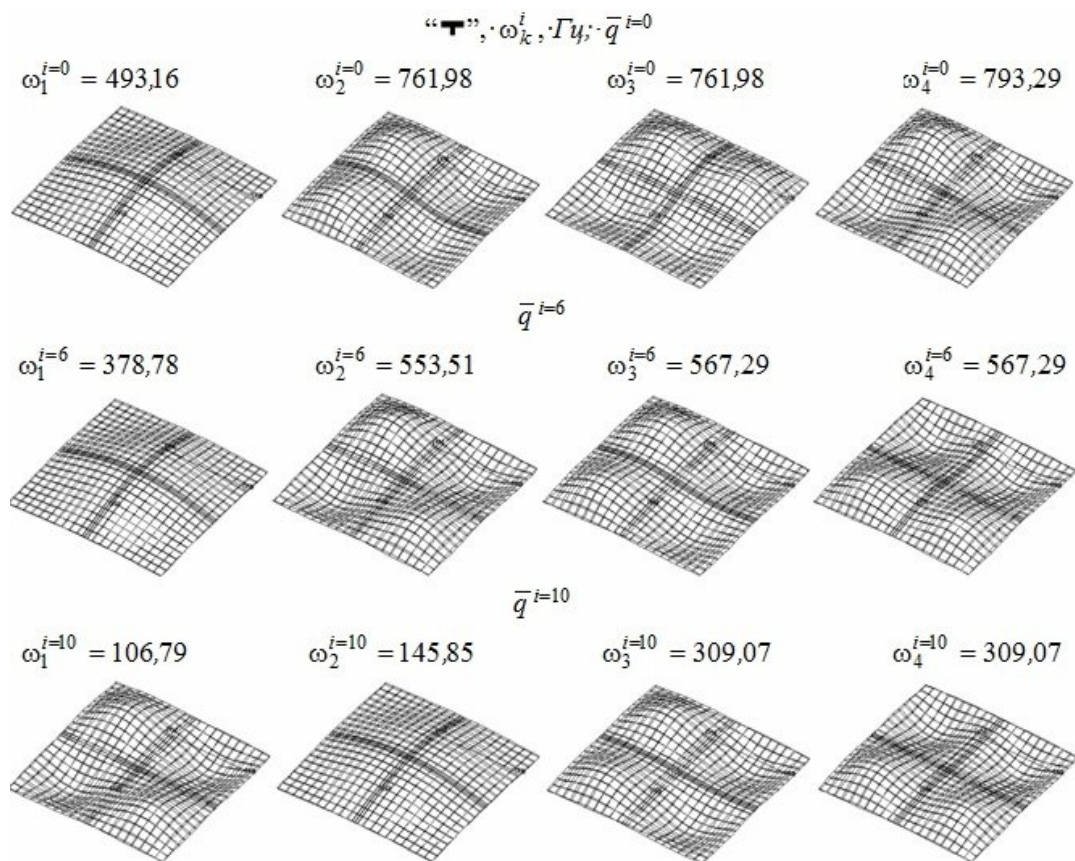
За рахунок встановлення двох ребер, маса панелі (тобто її об'єм) збільшилася на 19,3% (табл. 4.10). При цьому критичне навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  для ребристої панелі істотно зросло – в 1,5 рази порівняно з гладкою (рис. 4.29, а). Власна частота коливань  $\omega_1$  у вихідному стані ( $\bar{q}^{i=0}$ ) знизилась на 7,5%. Кружечками на діаграмах відмічені моменти навантаження  $\bar{q}^i$ , при яких виконувався розрахунок на власні коливання з урахуванням переднапруженого і деформованого станів. Починаючи з величини навантаження  $\bar{q} \approx 80 > \bar{q}^{i=4}$ , частота  $\omega_1$  для ребристої панелі є більшою за відповідну частоту для гладкої оболонки (рис. 4.29, б).

Для ребристої панелі “Т” у моменти навантаження  $\bar{q}^{i=6}$  і  $\bar{q}^{i=10}$  спостерігається перебудова характеру форм коливань (рис. 4.30). У вихідному стані  $i=0$  та при  $i < 6$  - кратними є частоти  $\omega_2 = \omega_3$  (рис. 4.31). При  $i \geq 6$  - кратними стають частоти  $\omega_3 = \omega_4$ . На відміну від ребристої панелі “Т”, для

гладкої оболонки “■” кратними є частоти  $\omega_1 = \omega_2$  і характер коливань не залежить від величини навантаження  $\bar{q}$  (рис. 4.8).

Таблиця 4.10

$K$	Об'єм оболонки $V \cdot 10^6, \text{м}^3$	$\Delta(V)_{\text{ребр}},$ %	$\bar{q}_{\text{кр}}^{\epsilon}$	$\Delta(\bar{q}_{\text{кр}}^{\epsilon})_{\text{ребр}},$ %	$\omega_1,$ Гц	$\Delta(\omega_1)_{\text{ребр}},$ %
Гладка панель						
32	3621	0	193,7	0	533,78	0
64	14486	0	777,7	0	220,32	0
Рєбрїста панель						
32	4487	19,3	291,4	33,5	493,16	-7,6
64	15906	8,9	804,4	3,3	232,80	5,7

Рис. 4.30. Перебудова форм власних коливань пологої ребристої панелі ( $K = 32$ )

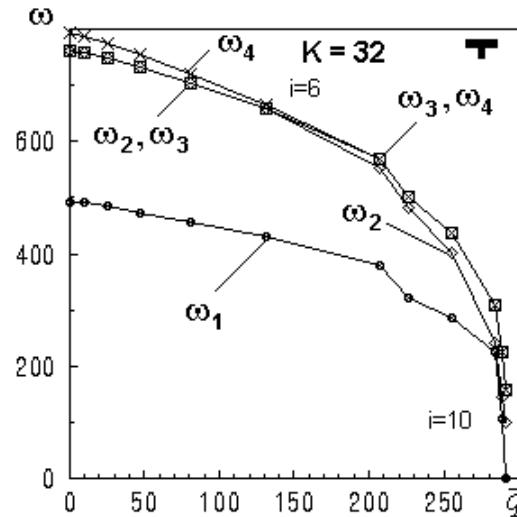


Рис. 4.31. Вплив навантаження на частоти пологої ребристої панелі ( $K = 32$ )

Для обох оболонок у докритичній області відсутні точки розгалуження розв'язків. Тому за статичним і динамічним критеріями отримано практично рівні відповідні величини критичних навантажень. Для гладкої панелі цим значенням є  $\bar{q}_{кр}^6 = 193.7$ , а для ребристої панелі –  $\bar{q}_{кр}^6 = 291.4$ .

**4.4.2** Розглянемо непологу панель ( $a = 120h$ ,  $R = 450h$ ,  $K = 64$ ) [81]. Порівняння діаграм “ $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ ” для гладкої панелі “—” і панелі, що підкріплена ребрами “—■—”, виконано для характерних точок “ $o$ ” та “ $b$ ” (рис. 4.32). У докритичній і закритичній областях діаграми «навантаження – прогин» для обох оболонок мають однаковий складний вигляд, втрата стійкості в обох випадках реалізується за два етапи. Спершу різко зростає прогин у середині чвертей панелі у точках “ $b$ ”. В той же час у центрі оболонки, точці “ $o$ ”, панель практично не деформується. Реалізується місцева втрата стійкості обшивки між ребрами та опорним контуром. Відповідні форми наведено на рис. 4.33. На діаграмах “ $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ ” (рис. 4.32, 4.34) цьому моменту відповідає точка “1” з такими характеристиками діаграм: для гладкої панелі маємо навантаження  $\bar{q} = 777.7$  (табл. 4.10), прогин у точці “ $o$ ”  $\bar{u}_o^{1'} = -0,1445$ , прогин у точці “ $b$ ”  $\bar{u}_b^{1'} = -0,6677$ ; для ребристої панелі відповідно маємо:  $\bar{q} = 804.4$ ,  $\bar{u}_o^{1'} = -0,3470$ ,  $\bar{u}_b^{1'} = -0,7087$ .

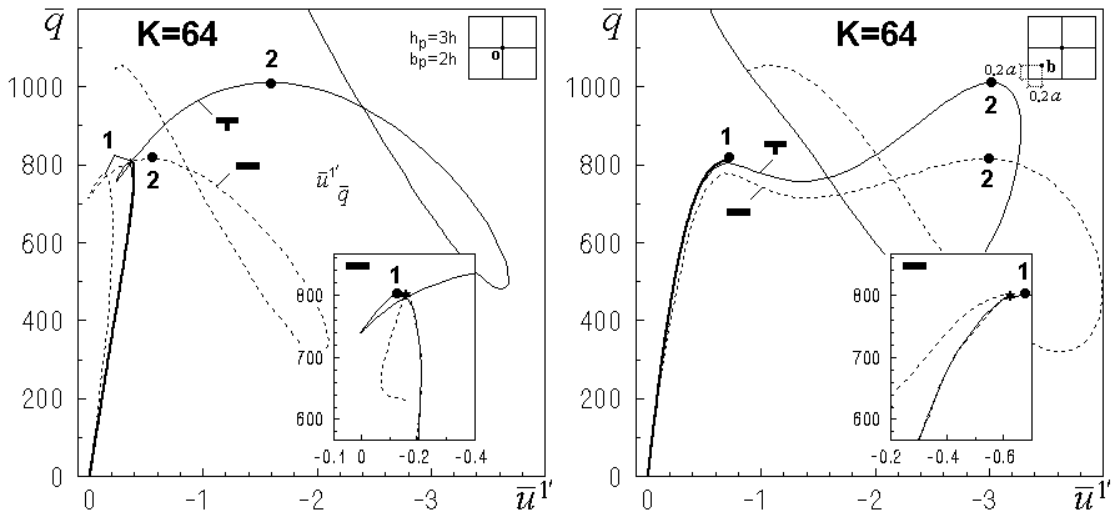


Рис. 4.32. Неполога панель  $K = 64$ : діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в точках «o» (а) і «b» (б)

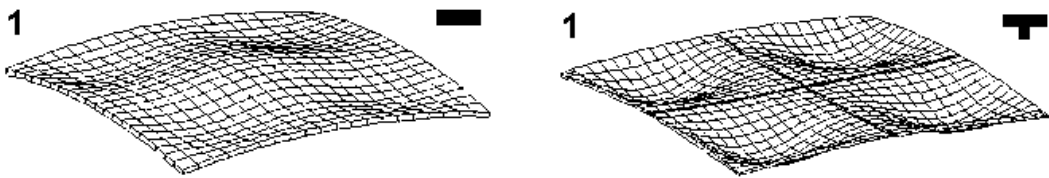


Рис. 4.33. Форма деформування гладкої і ребристої оболонок в точці «1» діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ »

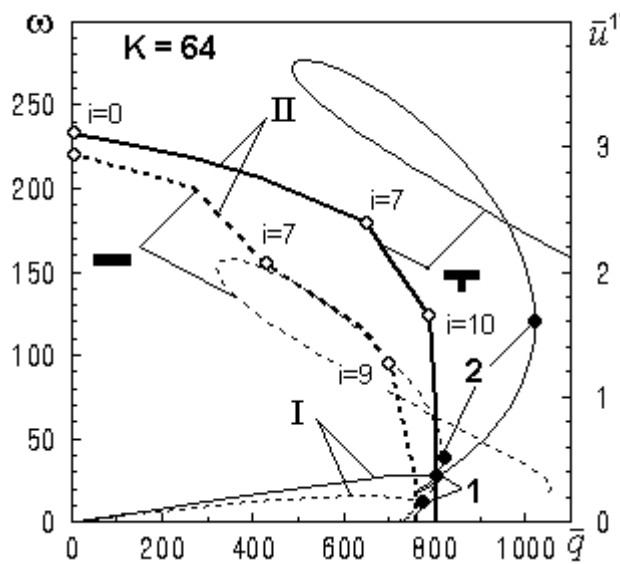


Рис. 4.34. Неполога панель  $K = 64$ : порівняння відповідних діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » та « $\bar{q} - \omega_1$ » для гладкої і ребристої панелей

Потім настає загальна втрата стійкості панелі (точка “2”) з проклацуванням центра: при  $\bar{q} = 815.0$  (для гладкої оболонки) і  $\bar{q} = 1012.0$  (для ребристої оболонки).

Алгоритм МССЕ дає змогу знаходити точки розгалуження розв’язків і визначати суміжні форми деформування в їх околі. Для цього застосовується якісна теорія. Для обох оболонок у докритичній області було виявлено можливу точку розгалуження «\*». Для її точного визначення, в ідеальну форму серединної поверхні оболонки було внесено мале несиметричне збурення. Внесена початкова недосконалість форми серединної поверхні оболонки точно засвідчила точку «\*» як точку біфуркації панелі ідеальної форми, розв’язок якої має розгалуження. На рис. 4.32, як приклад, штрих-пунктирною лінією для гладкої панелі «—» показано криву відгалуження з точки «\*» при навантаженні  $\bar{q}^* = 775.6 < \bar{q}_{кр}^e$ . Для ребристої панелі також виявлено точку розгалуження при  $\bar{q}^* = 800.2$ . Порівняння з даними, отриманими за допомогою ПК ЛІРА-САІР (жирна крива), показало повний збіг кривих « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » у докритичній області.

На діаграмах « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » (рис. 4.34) та « $\bar{q} - \omega_1$ » кружечками позначено моменти навантаження, при яких відбувається перебудова мод коливань. Ця перебудова істотно залежить від зміни кратності частот в процесі навантаження. Діапазон зміни власних частот  $\omega_k^i$  для обох панелей при різних рівнях навантаження  $\bar{q}^i$  досить щільний (рис. 4.35, рис. 4.36). На рисунках для обох оболонок показана перебудова в різні моменти навантаження перших чотирьох форм власних коливань.

Для гладкої панелі “—” (рис. 4.35) у вихідному (ненавантаженому) стані  $\bar{q}^{i=0}$  частоти  $\omega_1 = \omega_2$  є кратними. При  $\bar{q} \geq \bar{q}^{i=7}$  характер коливань першої моди не змінюється. При навантаженнях  $\bar{q}^{i=7}$  та  $\bar{q}^{i=9}$  спостерігається перебудова вищих форм коливань у відповідності до характеру значень  $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ .

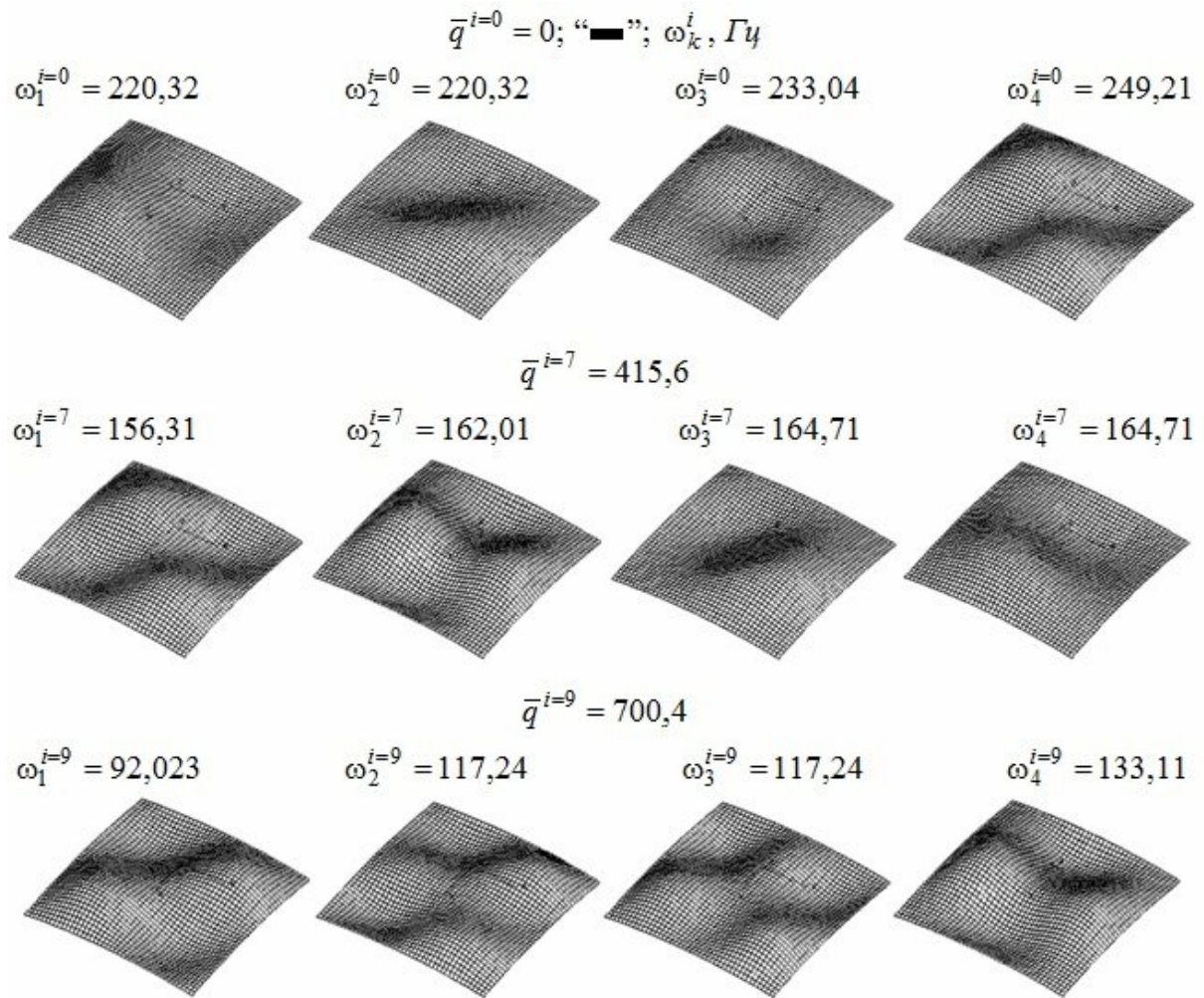


Рис. 4.35. Перебудова форм власних коливань непологої гладкої панелі  $K = 64$

Для ребристої оболонки “■” (рис. 4.36) при навантаженнях  $\bar{q}^{i=0} \leq \bar{q} < \bar{q}^{i=7}$  кратними є частоти  $\omega_2 = \omega_3$ . При навантаженнях  $\bar{q}^{i=7} \geq \bar{q}$  - кратними стають частоти  $\omega_3 = \omega_4$ . Перебудова форм коливань відбувається при навантаженнях  $\bar{q}^{i=7}$  та  $\bar{q}^{i=10}$ .

**4.4.3** Підсумовуючи проведені дослідження можна зробити такі основні висновки (табл. 4.10). Постановка двох перехресних ребер в центрі пологої панелі ( $K = 32$ ) з метою підвищення величини критичного навантаження є менш ефективною операцією, ніж збільшення її кривизни – перехід до непологої гладкої панелі ( $K = 64$ ). У першому випадку відбувається зростання  $\bar{q}_{кр}^6$  у 1,5 рази при збільшенні маси конструкції на 19,3%. У другому – величина  $\bar{q}_{кр}^6$

зростає у 4 рази. Підкріплення непологої панелі ( $K = 64$ ) парою центральних ребер практично не впливає на величину критичного навантаження, яке зростає лише на 3,3%. Це спричинено тим, що ребра розміщуються в області оболонки, де у процесі деформування з'являються природні гребені жорсткості, які підвищують її жорсткість. Для непологої панелі, на відміну від пологої, втрата стійкості відбувається у два етапи: спочатку, реалізується місцева втрата стійкості обшивки між ребрами та опорним контуром, потім настає загальна втрата стійкості оболонки з проклацуванням центральної частини.

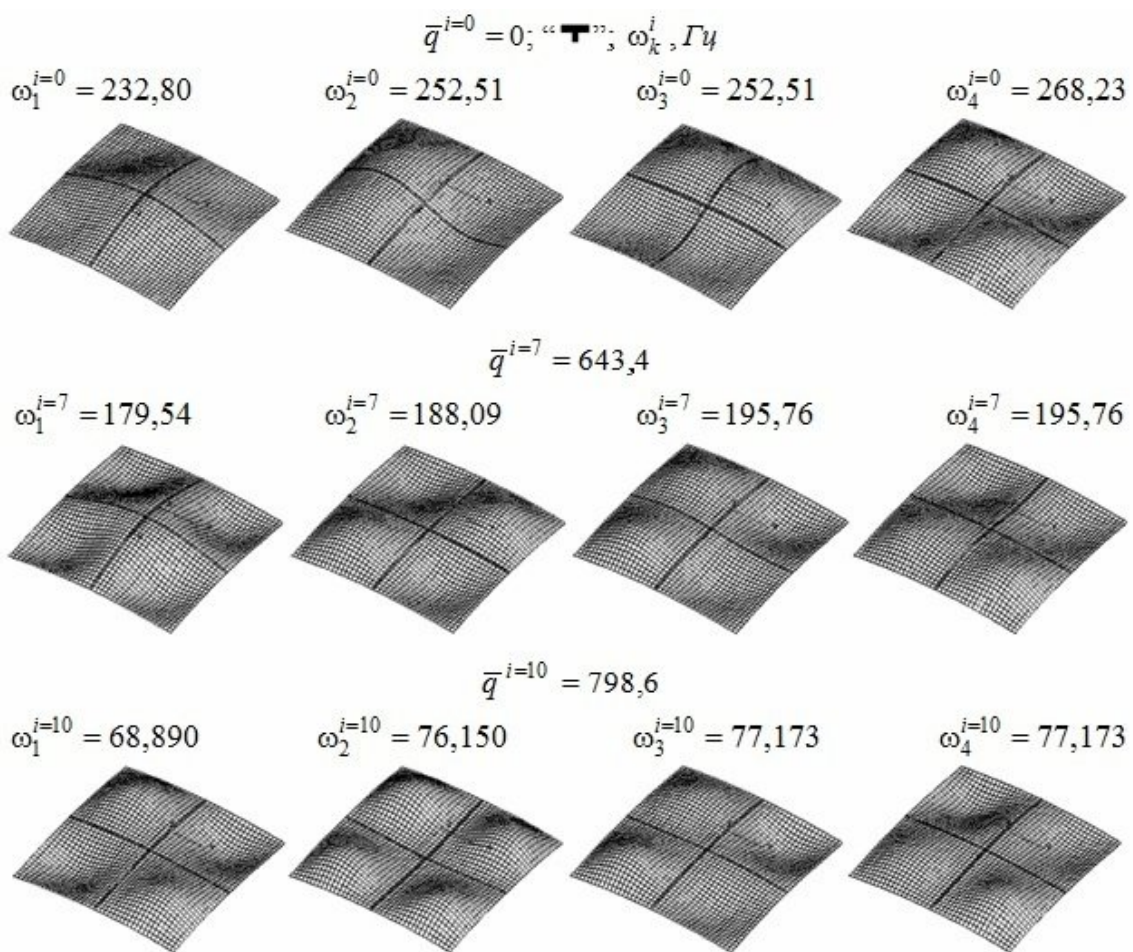


Рис. 4.36. Перебудова форм власних коливань непологої ребристої панелі ( $K = 64$ )

Для непологої панелі діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^i$ » мають складний вигляд, для яких в докритичній області існує точка розгалуження. Існування цієї точки також

підтверджується розрахунком з використанням ПК ЛІРА-САПР. Процес розв'язування задачі за допомогою ПК зупинився саме в цій точці. За динамічним критерієм на підставі аналізу власних коливань конструкції, який виконаний за МССЕ, цю точку можна вважати критичною.

Відмітимо, що при збільшенні кривизни ребристої оболонки на зростання величини верхнього критичного навантаження одночасно впливають два фактора: збільшення кривизни самої обшивки та збільшення кривизни ребер. Зважаючи на те, що збільшення кривизни оболонки та підсилення оболонок ребрами практично не збільшують сумарний об'єм матеріалу конструкції, збільшення кривизни ребристої оболонки є ефективним засобом підвищення верхнього критичного навантаження.

#### **4.5 Аналіз стійкості оболонок послаблених каналами при експлуатаційних режимах термомеханічного навантаження**

Оболонкові елементи конструкції з технологічних причин можуть мати ненаскрізні послаблення у вигляді каналів і виїмок. Вплив цих факторів, як конструктивних особливостей оболонки, на величину критичного навантаження в наявній літературі досліджено недостатньо. У цьому випадку оболонку необхідно розглядати як оболонку ступінчасто-змінної товщини.

Реальні оболонкові конструкції при експлуатації часто перебувають під дією складних термомеханічних навантажень [13, 26]. Температурні поля можуть істотно впливати на НДС, стійкість і власні коливання оболонок. Важливим є аналіз поведінки конструктивно неоднорідних оболонок, що знаходяться під спільною складною дією температури та тиску. Такі навантаження зустрічаються, наприклад, при розрахунку космічних апаратів (з ребрами та каналами), які повертаються до атмосфери [26]. В обшивці можуть згенеруватися значні напруження через різну швидкість нагріву обшивки оболонки та її конструктивних елементів, а саме ребер і каналів. Так, при наявності в конструкції каналів і виїмок, на початковій стадії входу космічного



апарату до атмосфери стоншені ділянки з каналами швидше нагріваються ніж сама обшивка, яка деякий час залишається відносно холодною. Холодна обшивка перешкоджає температурному розширенню нагрітих ділянок, що може призвести до їх стиснення та можливої спільної нестійкості оболонки. Пізніше ділянки з каналами можуть охолоджуватися швидше ніж обшивка. Холодні ділянки з каналами обмежують всебічне розширення обшивки. Це може призвести до локального випучування обшивки через стискуючі напруження, що виникають. При наявності ребер, що підкріплюють оболонку, при дії складного термомеханічного навантаження відбуваються подібні за характером процесу деформування та втрати стійкості [13].

Досліджується вплив різних режимів термомеханічного навантаження на втрату стійкості оболонки з каналами [58, 59, 127]. Розглядається полого сферична квадратна за планом панель ( $K = 32$ ) завтовшки  $h$ . Обшивка оболонки має послаблення чотирма перехресними каналами: завширшки  $b_k = 2h$  та завглибшки  $h_k = 0.3h$  (рис. 4.37). Осі каналів розташовуються на відстані  $a/3$  від опорного контуру оболонки. Панель шарнірно оперта вздовж контуру. Послаблення оболонки визначається трьома способами розташування каналів на поверхні (рис. 4.10). Збіжність і точність розв'язків для цієї панелі при дії тиску розглянуто вище (п/р 4.2.2).

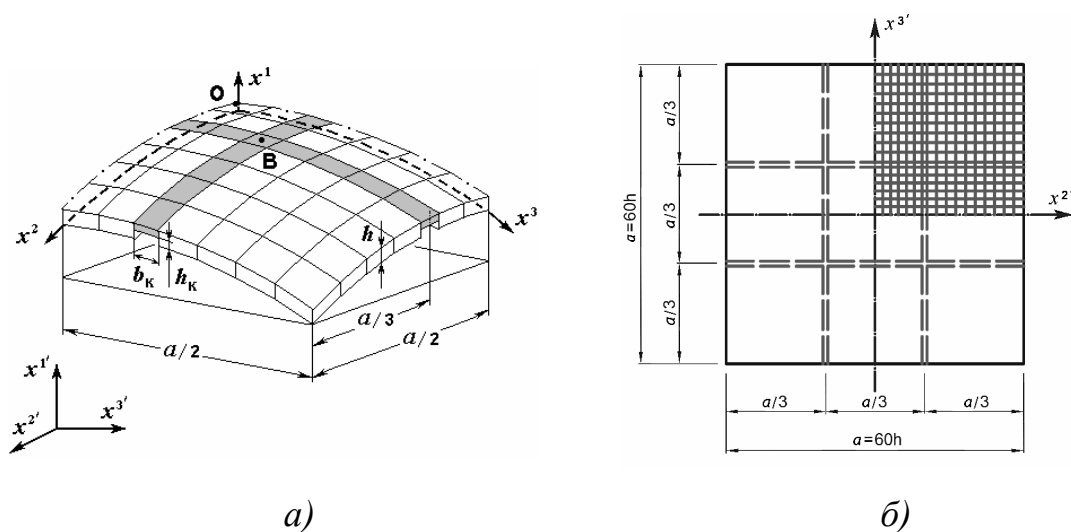


Рис. 4.37. Панель з каналами

Вивчається вплив двох факторів на деформування та стійкість панелі, а саме, (1) розташування каналів на поверхні обшивки оболонки; (2) різних варіантів складного термомеханічного навантаження. Спочатку панель рівномірно нагрівається за товщиною і нерівномірного за планом, потім донавантажується рівномірно розподіленим тиском. Аналізується вплив на поведінку оболонки чотирьох видів комбінованого термомеханічного навантаження.

1. Панель навантажується лише рівномірно розподіленим тиском (позначення на рисунках 1.  $q$ ). Цей варіант використовується як порівняльна база для аналізу впливів, що вивчаються.

2. Ділянки з каналами нагріваються на  $T^k = 40^\circ\text{C}$ , а обшивка залишається ненагрітою ( $T^o = 0^\circ\text{C}$ ). Після нагріву оболонка донавантажується тиском (позначення 2.  $T_{40}^k + q$ ).

3. Обшивка нагрівається на  $T^o = 40^\circ\text{C}$ , а ділянки з каналами залишаються ненагрітими ( $T^k = 0^\circ\text{C}$ ). Після нагріву оболонка донавантажується тиском (позначення 3.  $T_{40}^o + q$ ).

4. Попередньо нагрівається вся конструкція. Ділянки з каналами та тіло обшивки нагріваються разом на  $T = 40^\circ\text{C}$ : ( $T^k = 40^\circ\text{C}$  та  $T^o = 40^\circ\text{C}$ ) (позначення 4.  $T_{40}^k + T_{40}^o + q$ ).

На рис. 4.38 для кожного з режимів термомеханічного навантаження показана зміна діаграм « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » в залежності від способу послаблення оболонки каналами. Для всіх варіантів нагріву спосіб послаблення мало позначається на величині  $\bar{q}_{кр}^g$  (табл. 4.11). На величину  $\bar{q}_{кр}^g$  найбільше впливає третій варіант розміщення каналів, а саме, на зовнішній поверхні обшивки (■). Величина  $\bar{q}_{кр}^g$  є меншою на 10 – 12% відносно інших способів розміщення каналів (рис. 4.39).

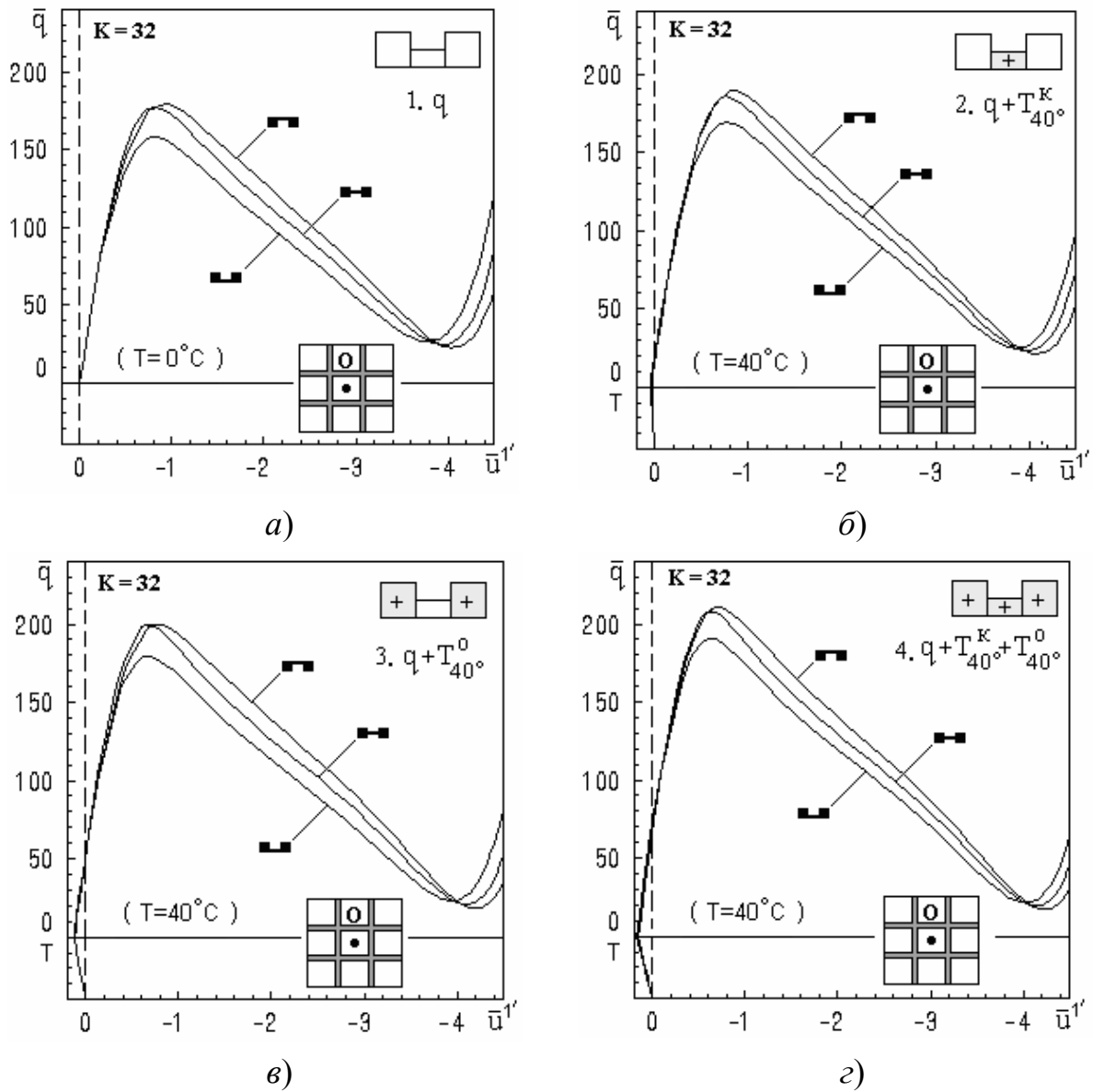



Рис. 4.38. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » центра панелі для чотирьох варіантів нагріву

Таблиця 4.11

Варіант навантаження	Розташування каналів на обшивці					
	з внутрішньої сторони 		симетрично 		з зовнішньої сторони 	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$
1. $q$	178,8	0	177,3	0	157,4	0
2. $T_{40}^K + q$	189,1	5,8	185,6	4,7	168,8	7,2
3. $T_{40}^O + q$	199,8	11,7	198,9	12,2	179,1	13,8
4. $T_{40}^K + T_{40}^O + q$	210,7	17,8	207,8	17,2	190,4	21,0

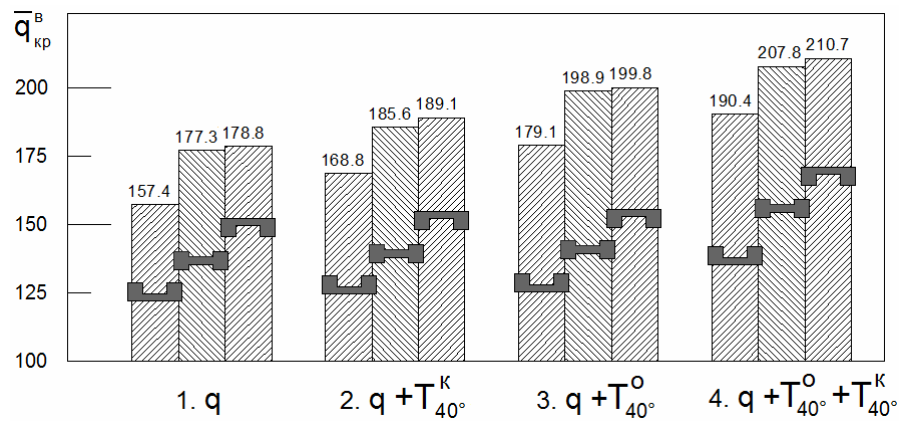


Рис. 4.39. Гістограми  $\bar{q}_{кр}^e$  для різних способів розташування каналів

На рис. 4.40 для трьох способів розташування каналів на обшивці показано вплив способу спільного комбінованого термомеханічного навантаження на втрату стійкості відповідної послабленої панелі. Звичайно, найбільший вплив на величину  $\bar{q}_{кр}^e$  справляє попередній нагрів всієї оболонки, причому при всіх видах послаблення панелі. Цей нагрів приводить до найбільшого збільшення жорсткості оболонок, особливо з каналами, розташованими з внутрішньої поверхні обшивки (■). Для наочності ці впливи відображені на гістограмах (рис. 4.41).

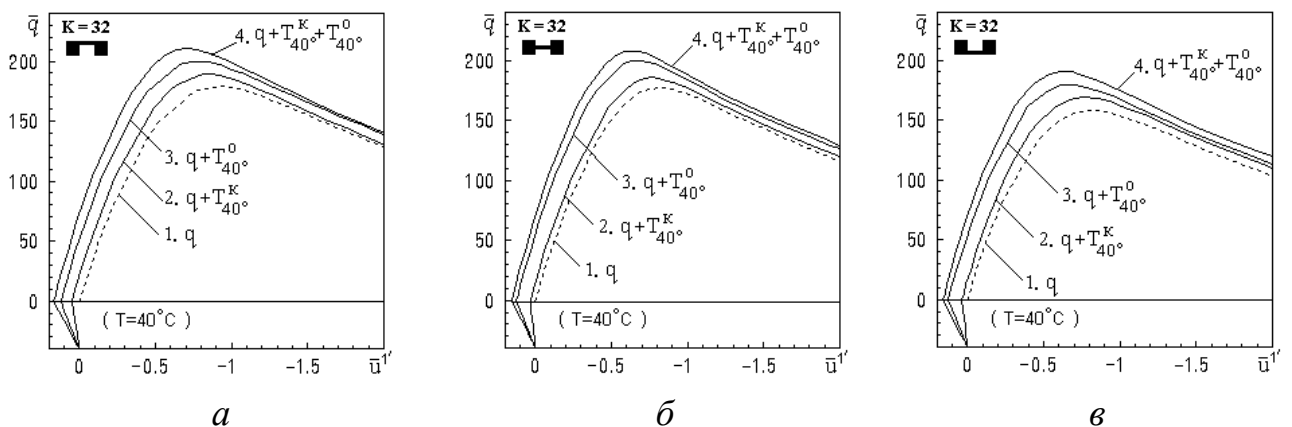


Рис. 4.40. Діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ » центра панелі для чотирьох варіантів нагріву при трьох способах розташування каналів

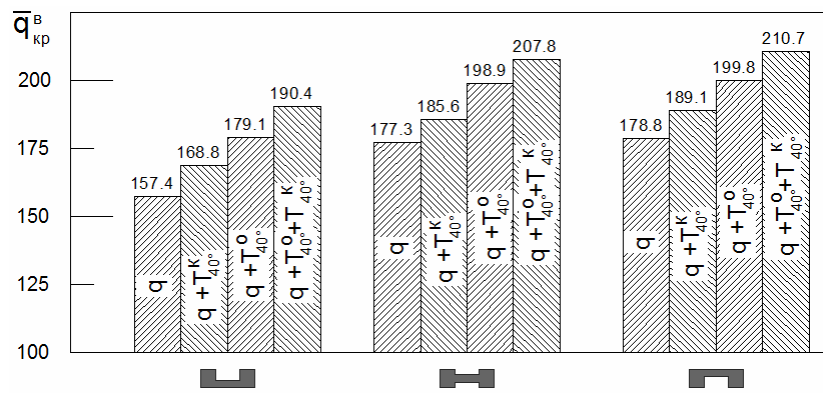


Рис. 4.41. Гістограми  $\bar{q}_{кр}^v$  для різних варіантів нагріву

Таким чином, виконаний для всіх режимів термомеханічного навантаження аналіз впливу розміщення каналів на обшивці показав: найбільш стійкою є оболонка з каналами на її внутрішній стороні; симетричне розміщення каналів на поверхнях обшивки викликає незначне зниження величини  $\bar{q}_{кр}^v$ ; найменшу несучу спроможність мають оболонки, в яких канали знаходяться на зовнішній поверхні обшивки.

У всіх випадках, деформування оболонок реалізується через прогин їх центральних частин, що є характерною формою деформування та втрати стійкості для пологих панелей (рис. 4.42).

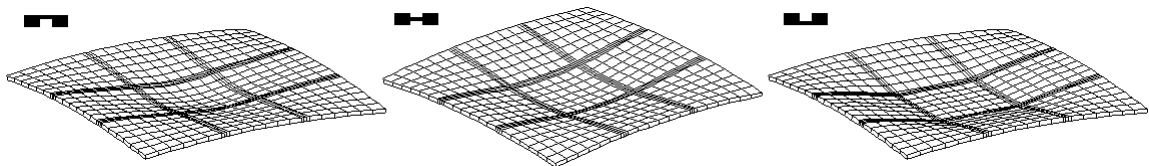


Рис. 4.42. Характерна форма деформування та втрати стійкості панелі з каналами


Проведені дослідження продемонстрували ефективність методу при розв'язанні складних задач з вивчення нелінійної поведінки оболонок неоднорідної структури, що знаходяться під комплексною дією термомеханічного навантаження. Розроблений у роботі метод задавання навантаження як складної функції надав можливість моделювати різні режими механічного і температурного впливу, що є близькими до експлуатаційних.

#### 4.6 Вплив способу закріплення контуру на втрату стійкості сферичної осесиметричної оболонки при термомеханічних навантаженнях

Деформування, втрата стійкості та власні коливання оболонки, навіть однорідної структури, при дії силового і температурного навантаження залежить від багатьох чинників. До факторів, що істотно впливають на поведінку тонкої пружної оболонки, відносяться умови закріплення конструкції. Аналізується вплив типу закріплення контуру оболонки на процеси її деформування та втрати стійкості на прикладах жорсткого затиснення і шарнірного опираювання, як найпоширеніших типів граничних умов [83, 165, 169].


Розглядається полога осесиметрична сферична панель сталої товщини. Матеріал оболонки – ізотропний. Прийняті наступні вихідні данні:  $E = 19.6 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4}$  град $^{-1}$ ,  $h = 0,01$  м,  $a = 100h$ ,  $R = 1252h$ , стріла підйому  $H = 4h$ . Результати розрахунків наводяться у безрозмірному вигляді (4.1). СЕМО – половина панелі з сіткою  $20 \times 40$  СЕ. Це забезпечує можливість отримання як осесиметричних, так і неосесиметричних форм деформування. Дослідження показали, що прийнята сітка гарантує збіжність розв'язків.

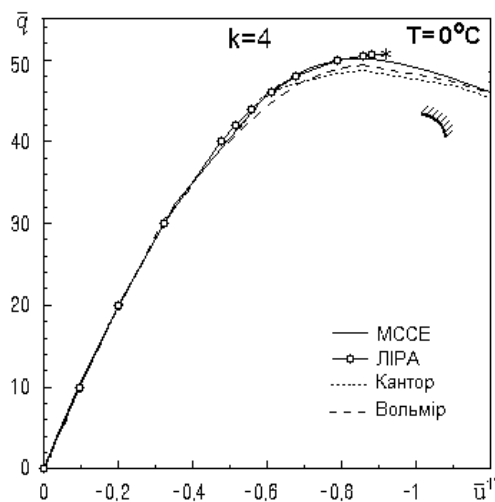
Оболонка знаходиться під дією комбінованого термомеханічного навантаження. Навантаження панелі відбувається у два етапи. Спочатку оболонка нагрівається на задану температуру  $T$ , а потім довантажується рівномірно розподіленим нормальним тиском  $q$ . При дії тиску температурне поле залишається сталим. Аналізується вплив на стійкість панелі двох факторів: величини попереднього нагріву і типу закріплення контуру (жорстке та шарнірне). Розглядається три варіанти нагріву оболонки на:  $T = 0, 20, 40^\circ \text{C}$ .

**4.6.1** Варіант *жорсткого* затиснення опорного контуру панелі на рисунках має позначення (). Проведений порівняльний аналіз розв'язків, що одержані при дії на оболонку лише тиску ( $T = 0^\circ \text{C}$ ), показує гарний збіг діаграм «навантаження – прогин», одержаних за МССЕ, з даними, отриманими за

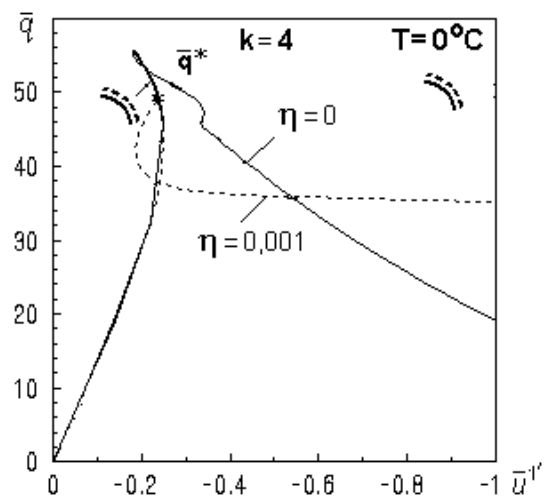
допомогою ПК ЛІРА-САПР та аналітичним і чисельним розв'язками [35, 63] (рис. 4.43, а). Спостерігається незначне розходження всіх результатів з аналітичним розв'язком А.С. Вольміра [35] (табл. 4.12). За величиною верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  розбіжність менша за 3%, за переміщенням  $\bar{u}_{кр}^{1'6}$  в центрі панелі менша за 7%. Форма втрати стійкості панелі характеризується прокладуванням її центральної частини (рис. 4.44) ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^6$ ). На рисунках вихідна форма панелі позначена жирною штрих-пунктирною лінією і має позначку ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $q = 0$ ).

Таблиця 4.12

Метод розв'язання ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  )	$\bar{q}_{кр}^6$	$\Delta$ , %	$\bar{u}_{кр}^{1'6}$	$\Delta$ , %
МССЕ	50,12	1,46	-0,882	2,56
ЛІРА-САПР	50,70	2,63	-0,920	6,98
Кантор [63]	48,80	-1,21	0,859	-0,12
Вольмір [35]	49,40	-	-0,860	-



а)



б)

Рис. 4.43. Діаграми «навантаження – прогин» в полюсі панелі при жорсткому затисненні (а), при шарнірному опиранні (б)

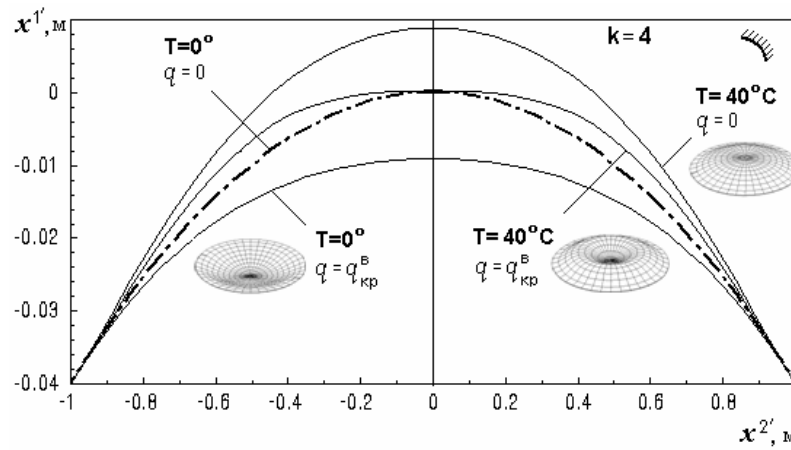


Рис. 4.44. Форми деформування та втрати стійкості жорстко закріпленої панелі

Діаграми «навантаження – прогин» для попередньо нагрітих оболонок наведені на рис. 4.45. Попередній нагрів панелі приводить до її випучування в бік протилежний дії тиску (табл. 4.13). Наприклад, при нагріві оболонки на  $T = 40^\circ\text{C}$  стріла підйому панелі збільшується на 22% (позначка  $T = 40^\circ\text{C}$ ,  $q = 0$ ). Втрата стійкості ( $T = 40^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$ ) відбувається через проклацування незначної області панелі в полюсі. Форма втрати стійкості оболонки є спученою з центральною вм'ятиною невеликого діаметру. При цьому глибина деформування досягає вихідної стріли підйому панелі (рис. 4.44).

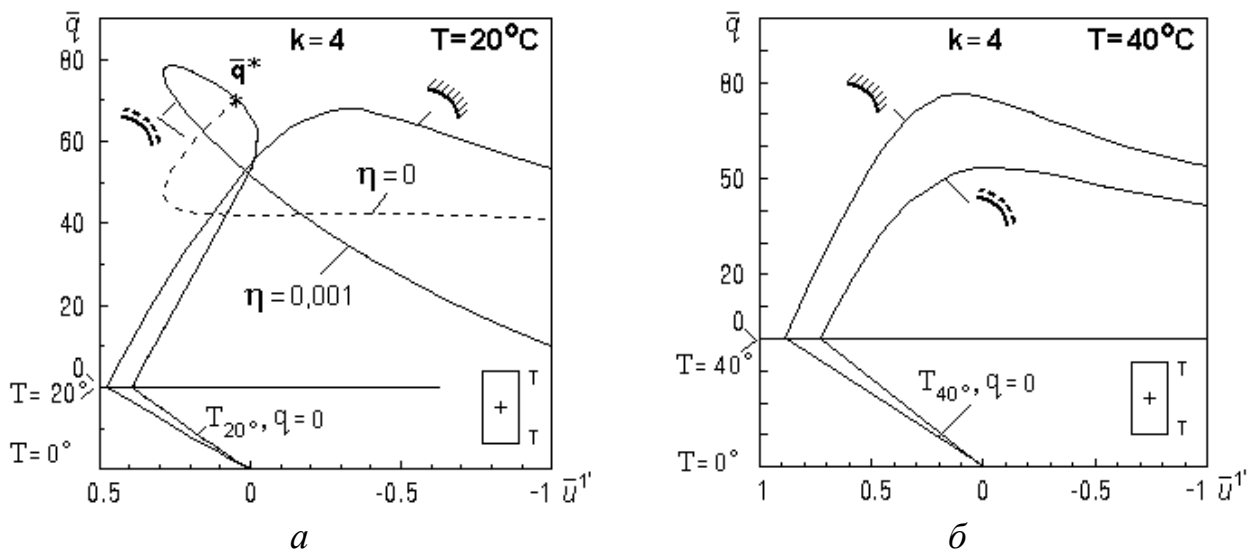


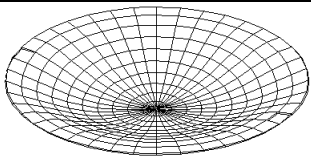
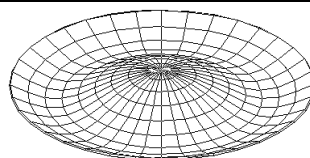
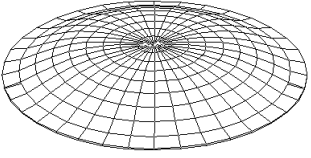
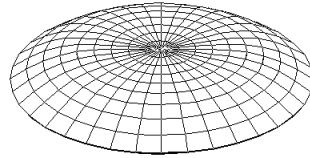
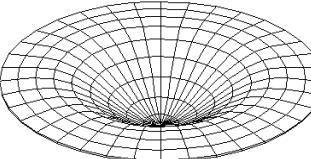
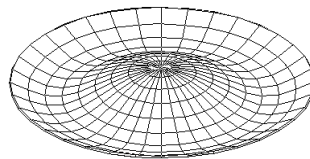
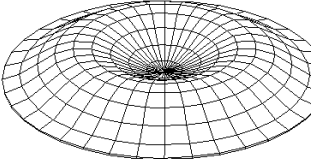
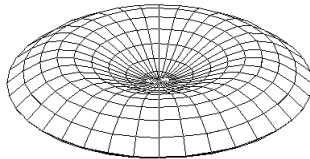



Рис. 4.45. Порівняння діаграм «навантаження – прогин» в центрі панелі при нагріві на  $T = 20^\circ\text{C}$  (а) та  $T = 40^\circ\text{C}$  (б)



Втрата стійкості панелі, яка попередньо нагріта на  $T = 20^\circ \text{C}$ , також відбувається через проклацування в полюсі незначної її області ( $T = 20^\circ \text{C}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$ ), проте оболонка не є випнутою (табл. 4.13). Для цього випадку стріла підйому панелі після нагріву зростає на 12%.

Таблиця 4.13

Жорстке затиснення 		Шарнірне опирання 	
$T = 0^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$		$T = 0^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$	
$\bar{q} = 0$ $T = 20^\circ \text{C}$ ( $T = 40^\circ \text{C}$ )		$\bar{q} = 0$ $T = 20^\circ \text{C}$ ( $T = 40^\circ \text{C}$ )	
$T = 20^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$		$T = 20^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$	
$T = 40^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$		$T = 40^\circ \text{C}$ $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^e$	

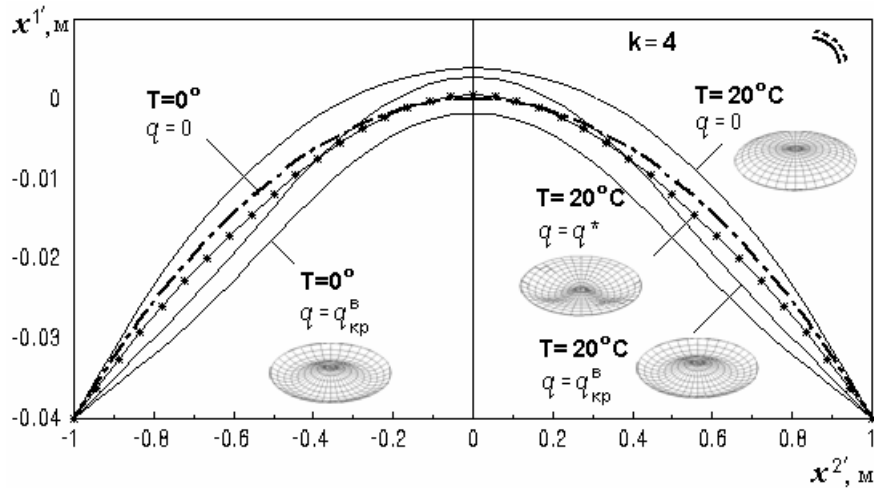
**4.6.2** Варіант *шарнірного* опирання опорного контуру панелі на рисунках має позначення () . Порівняння діаграм «навантаження – прогин» в центрі панелі при дії на оболонку лише тиску ( $T = 0^\circ \text{C}$ ) показує, що розв'язки, отримані за використання МССЕ та за допомогою ПК ЛІРА-САПР, збігаються в докритичній області (рис. 4.43, б). Алгоритм ПК ЛІРА-САПР припинив

розрахунки у точці розгалуження. На рисунку ця точка має позначення «\*». Ця точка алгоритмом ПК ЛІРА-САПР приймається за верхню критичну. Алгоритм МССЕ також виявив можливе існування у докритичній області точки розгалуження розв'язку. Як зазначалось вище (підрозділ 4.4, 4.4.2), в процесі розрахунку алгоритм МССЕ за якісною теорією може знаходити точки розгалуження, проте з деякою незначною похибкою. Для уточнення та ідентифікації цієї точки, в початкову ідеальну форму серединної поверхні оболонки, згідно з розробленою методикою, вноситься несиметрична недосконалість  $\eta \sin(\pi r/a) \cos(\varphi)$ , де  $\eta = 0.001$  – малий параметр збурення форми;  $r$ ,  $\varphi$  – полярні координати. Внесена недосконалість дозволяє точно визначити точку «\*» як точку біфуркації ідеальної панелі, яка для панелі зі збуреною формою вважається критичною. Осесиметрична форма деформування панелі трансформується в суміжну неосесиметричну форму (рис. 4.46; табл. 4.13;  $T = 0^\circ \text{C}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}^*$ ). На рис. 4.43, б пунктиром показано отриману гілку розв'язку, що відгалужується з точки «\*» при навантаженні  $\bar{q}^* = 50.05 < \bar{q}_{кр}^6$ , що на 9,78% менше за критичне навантаження  $\bar{q}_{кр}^6 = 55.48$  оболонки ідеальної форми (табл. 4.14). Форма втрати стійкості ідеальної панелі характеризується утворенням кільцевої осесиметричної вм'ятини посередині меридіану (рис. 4.46; табл. 4.13;  $T = 0^\circ \text{C}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^6$ ).

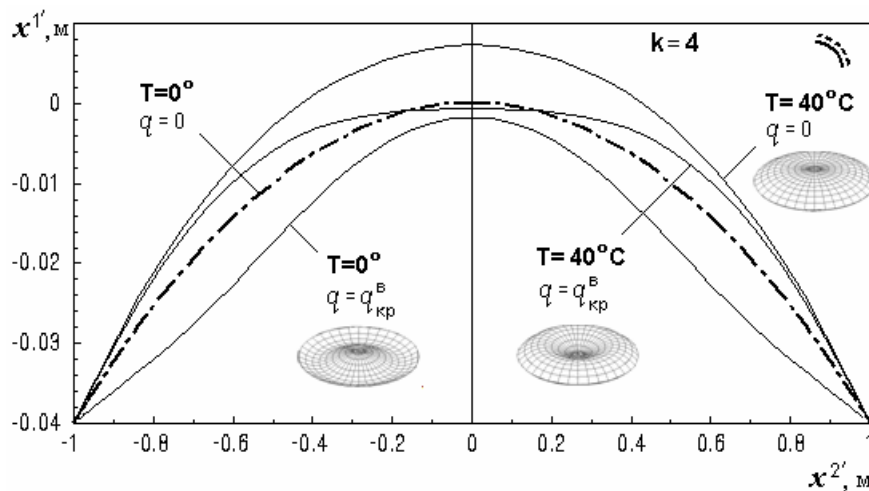
Величина попереднього нагріву оболонки істотно впливає на характер діаграм «навантаження – прогин» (рис. 4.45). При нагріві панелі з шарнірним опиранням, як і при затисненні краю, відбувається її випучування (табл. 4.13). Проте цей процес здійснюється більш рівномірно за об'ємом, що приводить до меншого зростання стріли підйому. При нагріві оболонки на  $T = 20^\circ \text{C}$  і  $T = 40^\circ \text{C}$  стріла підйому панелі у цьому випадку збільшується на 9,8 і 18%, відповідно.

Незначний нагрів оболонки ( $T = 20^\circ \text{C}$ ) мало змінив загальний складний характер діаграм «навантаження – прогин» (рис. 4.45, а). При навантаженні

$\bar{q}^* = 69.82 < \bar{q}_{кр}^6 = 78.35$  виявлена точка розгалуження «\*» (табл. 4.14). Форми деформування та втрати стійкості мають антологічний вигляд як у випадку оболонки, що не нагрівалася ( $T = 0^\circ \text{C}$ ) (рис. 4.46, а; табл. 4.13).



а)




б)



Рис. 4.46. Форми деформування та втрати стійкості шарнірно закріпленої панелі


При нагріві оболонки на  $T = 40^\circ \text{C}$  ( ) діаграма «навантаження – прогин» приймає простий вигляд (рис. 4.45, б). Точки розгалуження «\*» у докритичній області відсутні. Форми деформування та втрати стійкості наведені на рис. 4.46, б та в табл. 4.13.

**4.6.3** Аналіз проведених досліджень показав, що тип закріплення контуру та величина попереднього нагріву значно впливають на поведінку оболонки, яка розглядається.

При жорсткому затисненні краю панелі () , діаграми «навантаження – прогин» мають простий вигляд, у докритичній області точки розгалуження відсутні. Зі зростанням величини попереднього нагріву, величина критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  зростає на 34,5 і 51,6 % відносно ненагрітої панелі ( $T = 0^\circ\text{C}$ ) (табл. 4.14). Форма втрати стійкості відбувається через проклацування центральної частини оболонки (табл. 4.13).

Таблиця 4.14

Тип закріплення	$T = 0^\circ\text{C}$		$T = 20^\circ\text{C}$		$T = 40^\circ\text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^6$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^6)$ , %	$\bar{q}_{кр}^6$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^6)$ , %	$\bar{q}_{кр}^6$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^6)$ , %
	50,40	–	67,82	–	76,40	–
	55,48	10,08	78,35	15,53	53,50	-29,97
	$\bar{q}_{МССЕ}^* = 50,05$	-9,79	$\bar{q}_{МССЕ}^* = 69,82$	-10,89		
	$\bar{q}_{ЛІРА}^* = 49,90$	-10,06	$\bar{q}_{ЛІРА}^* = 68,63$	-12,40		

При шарнірному опиранні оболонки () , діаграми «навантаження – прогин» мають складніший вигляд. У випадках відсутності нагріву ( $T = 0^\circ\text{C}$ ) та при нагріві панелі на  $T = 20^\circ\text{C}$  , діаграми характеризуються петлями в зоні верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6$  та наявністю точки розгалуження при  $\bar{q}^* < \bar{q}_{кр}^6$  . При нагріві оболонки на  $T = 40^\circ\text{C}$  діаграми набувають найпростішого вигляду, у докритичній області точки розгалуження відсутні, величина  $\bar{q}_{кр}^6$  стає меншою на -3,6% відносно відповідної ненагрітої панелі ( $T = 0^\circ\text{C}$ ) (табл. 4.13). Форми деформування та втрати стійкості оболонки при шарнірному опиранні значно ускладнюються (рис. 4.46; табл. 4.13).

Проведені дослідження дали змогу виявити існуючі нелінійні закономірності деформування та втрати стійкості пологих сферичних осесиметричних панелей при попередніх нагрівах і двох способах закріплення контуру. Отримані результати є важливими при проектуванні несучих оболонкових конструкцій та їх елементів.

#### **4.7 Власні коливання складеної композитної оболонки головного обтічника ракети-носія**

У сучасній техніці поряд з гладкими оболонками та оболонками ступінчасто-змінної товщини широко використовуються складені (зчленовані, сполучені) оболонки. До цього класу оболонок також можна віднести сегментовані оболонки [157]. Зчленовані оболонки є особливим класом конструктивних елементів, що складаються з декількох частин, утворюючи разом тонкостінну конструкцію. Елементами складеної оболонки можуть бути оболонки конічної, циліндричної, сферичної та інших форм. Найчастіше вони є осесиметричними оболонками. Останніми роками велика увага приділяється дослідженню зчленованих оболонок з різними складовими елементами [21, 79, 135, 139, 146]. Спостерігається зростання досліджень вібраційних характеристик конічно-циліндричних складених оболонок на основі використання чисельних методів [135, 194]. Підвищена увага до цього типу оболонок пов'язана з їх практичним використанням. Наприклад, сферично-конічно-циліндричні оболонки відносяться до важливого класу конструктивних оболонок, які, в основному, є спрощеними моделями аеро-космічних апаратів, ракет та корпусів підводних човнів.

Взагалі, задачі з аналізу стійкості та власних коливань зчленованих оболонок є досить складними. Це пов'язано зі складністю математичного моделювання цих конструкцій, а також описом умов стикування оболонок різної конфігурації [21]. Звичайно, на границі стику різних гладких оболонок є злам серединної поверхні. Метод, що використовується в роботі, не має цих проблем.

Це обумовлено застосуванням тривимірного скінченноелементного підходу та використання на цій основі універсального просторового СЕ. Розробка тривимірного універсального СЕ спирається на застосуванні неklasичної гіпотези деформівної прямої, яка природнім шляхом забезпечує стикування просторових елементів у зламах і на ділянках ступінчасто-змінної товщини без порушення сумісності переміщень, і координат у процесі деформування (рис. 2.5). При аналізі поведінки складених оболонок типу обтічника, задача ускладнюється ще й тим, що з метою зменшення питомої ваги, створення термостабільних конструкцій в ракетній техніці, як матеріал оболонок використовуються полімерні композити, зокрема волокнисті вуглепластики в термореактивній епоксидній матриці [79]. Розроблена нова модифікація (Розділ 3) універсального тривимірного СЕ дає змогу вивчати стійкість і власні коливання такого типу об'єктів. Важливим елементом динамічного аналізу поведінки оболонки є визначення частот і форм власних коливань конструкції. Проте сучасні дослідження коливань складених оболонок в основному використовують чисельно-аналітичні методики [21, 135], що дещо обмежують коло і клас задач через спрощення розрахункової моделі.

Щоб проілюструвати ефективність і універсальність наданого в роботі методу, виконаний модальний аналіз складеної оболонки, яка являє собою дві усічені конічні оболонки з наконечником у вигляді сферичної панелі. Таким чином, тонкостінна конструкція є осесиметричною сферично-біконічною оболонкою, що має злами серединної поверхні у місцях стику. Розглядувана оболонка за своєю геометричною формою та параметрами матеріалу є наближеною моделлю обтічника головного блоку ракети-носія «Циклон-4» (рис. 4.47) [79]. Основні технічні дані прийняті у відповідності до роботи [79]. Висота відсіку  $H=4,6$  м, радіус опорного контуру  $R=2,0$  м, радіус основи другого конуса  $R_1=1,2$  м, висота конусів:  $H_1=3,2$  м та  $H_2=1,0$  м, кут нахилу твірних конусів:  $\alpha_1=25^\circ$  та  $\alpha_2=15^\circ$ , радіус поверхні сферичного наконечника  $R_s=0,72$  м, товщина обтічника  $h=0,01$  м, щільність матеріалу  $\rho=1600$  кг/м<sup>3</sup>

(рис. 4.48). Матеріал односпрямований волокнистий вуглець/епоксидний композит AS4/3501-6 (табл. 3.1). Напрямок укладки волокон перпендикулярний до твірної оболонки. За розрахункову СЕМО прийнято половину оболонки з двома площинами симетрії (рис. 4.48) з сіткою  $20 \times 20$  СЕ. Прийнята СЕМО забезпечує збіжність розв'язків.

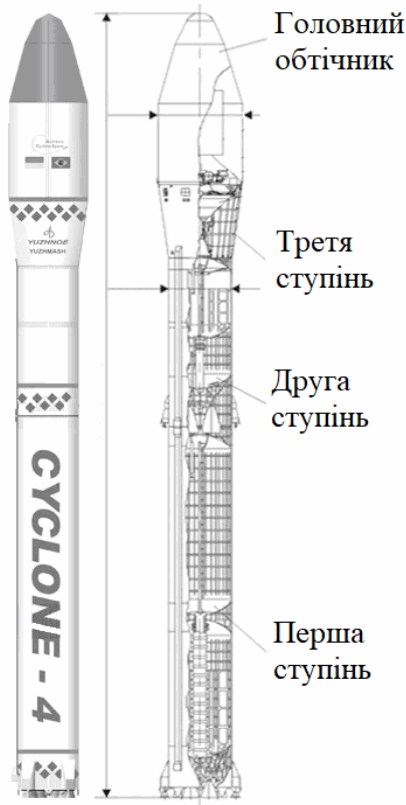


Рис. 4.47. Ракета-носієй «Циклон-4»

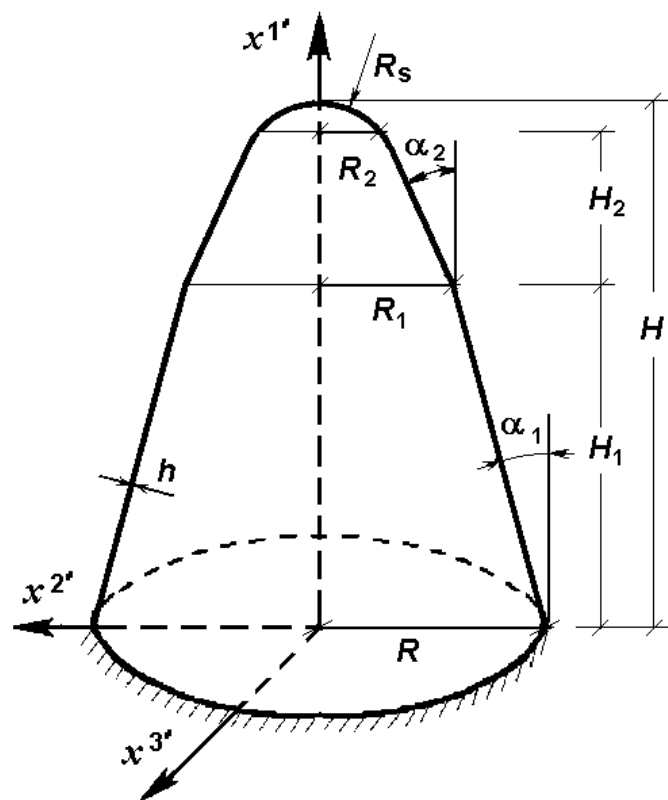


Рис. 4.48. Розрахункова модель складеної оболонки обтічника

Результати модального аналізу у вигляді перших 4-х форм та частот власних коливань приведені на рис. 4.49.

Аналіз форм деформування показав наявність найбільших амплітуд коливань в середній частині оболонки ближче до защемлення – в районі нижнього конуса. Така поведінка є характерною для такого класу оболонок [139]. Таким чином продемонстрована можливість проведення модального аналізу складеної оболонки обертання, виконаної з однонаправленого композитного матеріалу.

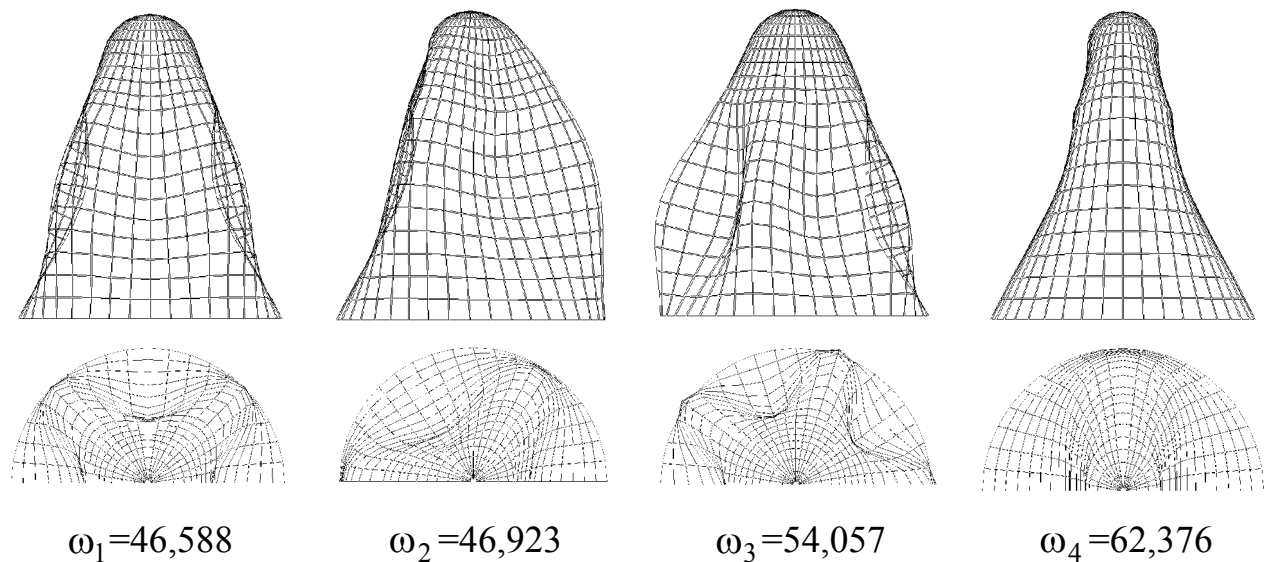


Рис. 4.49. Форми та частоти (Гц) власних коливань обтічника

Показано, що розроблений в роботі метод є ефективним інструментом для вивчення поведінки оболонок складної форми, матеріалами яких є композити. Виходячи з універсальності підходу, метод також може бути з успіхом застосований при дослідженні стійкості та власних коливань конструкцій, оболонкові елементи яких виконані з різних матеріалів.

#### 4.8 Основні висновки по розділу

Створення методики комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок при термомеханічних навантаженнях та розробка нової модифікації тривимірного багат шарового СЕ дозволили модернізувати існуючу методику на принципово новий розширений клас задач.

Шляхом проведення численних досліджень неоднорідних оболонок на спеціально підібраних задачах обґрунтовано достовірність розв'язків, підтверджено ефективність підходу та досліджено комбінований вплив параметрів термомеханічного навантаження, форми та умов закріплення оболонкових конструкцій на їх НДС, стійкість, закритичну поведінку та власні коливання. Можливості методики були продемонстровані на задачах нелінійного деформування різних класів тонких пружних оболонок неоднорідної



структури. Для підтвердження достовірності розв'язків, що отримуються, залучалися сертифіковані вітчизняні ПК ЛІРА-САПР та SCAD. Для можливого їх використання до розв'язання поставлених задач були вивчені можливості цих ПК, на цій основі виконана адаптація способів моделювання в них оболонок гладко- і ступінчасто-змінної товщини та крокових алгоритмів розрахунку. Проведений порівняльний аналіз з чисельними та аналітичними розв'язками показав гарний збіг результатів для широкого класу тонких неоднорідних оболонок.

Результат розрахунків поданий у вигляді діаграм, що надають залежності характеристик прогинів, енергії, частоти власних коливань оболонок від величини прикладеного статичного термомеханічного навантаження.

Запропонований підхід забезпечив проведення комплексного дослідження процесів нелінійного деформування та втрати стійкості з фіксацією точок розгалуження та побудови відповідних суміжним форм деформування в їх околі. Застосування розвиненого алгоритму МССЕ при проведенні модального аналізу оболонок з урахуванням переднапруженого стану, дозволило визначити стійкість оболонок одночасно за статичним і динамічним критеріями.

На прикладі аналізу власних коливань складеної оболонки обтічника ракети-носія, виготовленого з односпрямованого волокнистого вуглець/епоксидного композиту, показана ефективність і дієвість розробленого методу.

Проведені оцінки ступеня впливу різних параметрів комбінованого термомеханічного навантаження, геометричної форми, наявності неоднорідностей оболонок на розглядувані процеси нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонких пружних оболонок сталої та лінійно-змінної товщини. Проведені дослідження не тільки підтвердили надійність і ефективність запропонованого підходу, а і дали змогу комплексно описати процеси та визначити характер нелінійного деформування та втрати стійкості широкого класу оболонок, що є обов'язковим при розрахунках та проектуванні просторових конструкцій складної форми.

## ВИСНОВКИ

В результаті виконання дисертаційної роботи досягнуто поставлену мету та вирішено основні завдання.

1) На базі існуючої скінченноелементної моделі оболонки розроблено методологію одночасного аналізу стійкості та власних коливань неоднорідних оболонкових конструкцій, що знаходяться в термомеханічних умовах експлуатації. На цих засадах побудовано і реалізовано метод комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження. Розроблений підхід надає можливість як спільно досліджувати нелінійне деформування, стійкість та власні коливання оболонок при дії термомеханічних навантажень, так і визначати момент втрати стійкості конструкції одночасно за статичним та динамічним критеріями.

2) Розв'язування задач нелінійного деформування та власних коливань оболонок побудовано як двохетапний алгоритм, який реалізується на кожному кроці приросту термомеханічного навантаження. Розроблено метод дослідження власних коливань оболонки надає можливість виконувати модальний аналіз конструкції для деформованого стану, яке спричинено дією статичного термомеханічного навантаження, з урахуванням великих переміщень і переднапруженого стану. Такий підхід дає змогу визначати вплив переднапруженого стану оболонки на частоти та форми власних коливань конструкції, що деформується.

3) У рамках скінченноелементної моделі багат шарової оболонки розроблена методика моделювання властивостей односпрямованого волокнистого КМ. Визначення ефективних характеристик КМ реалізується за структурними мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування термопружних сталей для даної моделі композиту. Це дало змогу поширити метод аналізу поведінки пружних

оболонок, виготовлених з традиційних матеріалів, на задачі дослідження стійкості та власних коливань багат шарових волокнистих композитних оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термомеханічного навантаження.

4) Створена нова модифікація універсального тривимірного багат шарового СЕ, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити. СЕ побудований у відповідності до моментної схеми скінченних елементів. Додаткові змінні параметри СЕ доповнені новими складовими, наявність яких дозволяє використовувати в шарах композитні матеріали поряд із традиційними. Розроблений підхід розширив функціональність вихідного тривимірного скінченного елемента та дозволив розповсюдити розрахункову скінченноелементну модель на широкий клас неоднорідних обolonкових конструкцій з традиційних, композитних та гібридних матеріалів.

5) Проведений чисельний аналіз НДС багат шарових оболонок, матеріали шарів яких є волокнистими композитами. Оцінено дієвість розглянутих у роботі мікромеханічних методів прогнозування характеристик композитів та підтверджено ефективність використання універсального багат шарового СЕ нової модифікації.

6) Виконано адаптацію можливостей ПК ЛІРА-САПР та SCAD до розв'язування задач стійкості пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термомеханічних навантажень. Це надало змогу виконати порівняльний аналіз розв'язків, що отримуються. Доведено вірогідність і ефективність розробленого методу комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань оболонок неоднорідної структури при дії термомеханічних навантажень. Показано переваги розробленого методу, який дає змогу досліджувати значно ширший клас задач в рамках одної розрахункової схеми, включаючи особливості структури оболонок, складніші види навантаження, а також проводити комплексне дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях загального виду.

7) Досліджено вплив параметрів комбінованої дії термомеханічного

навантаження, геометричної форми конструкції, умов закріплення на нелінійне деформування, стійкість, закритичну поведінку і власні коливання різних класів тонких пружних оболонок: пологих і непологих, лінійно-змінної товщини, підкріплених ребрами, послаблених отворами і каналами. Виявлені особливості та існуючі закономірності їхнього деформування, втрати стійкості і власних коливань. Можливості методу продемонстровано на прикладі розв'язання задачі щодо власних коливань складеної композитної оболонки – обтічника літального апарату.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала. *Механика полимеров*. 1965. №4. С. 52–59.
2. Алумяэ Н.А. Теория упругих оболочек и пластинок. *Механика в СССР за 50 лет*. 1972. Т.3. Москва: Наука. С. 227–266.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва: Машиностроение, 1984. 264 с.
4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974. 446 с.
5. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Учебник для университетов. Москва: Высшая школа, 1976. 272 с.
6. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 368 с.
7. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (Обзор). *Прикладная механика*. 1998. № 3. С. 3–22.
8. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Экспериментальные исследования устойчивости ребристых оболочек (обзор). *Прикладная механика*. 1996. № 9. С. 3–15.
9. Ашмарин Ю.А., Гузь А.Н. Устойчивость оболочек, ослабленных отверстиями (обзор). *Прикладная механика*. 1973. Т.9. № 4. С. 3–15.
10. Баженов В.А., Ворона Ю.В. Будівельна механіка. Динаміка: Підручник. Київ: Каравела, 2014. 288 с.
11. Баженов В.А., Кривенко О.П. Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях. Київ: Каравела, 2020. 187 с.

12. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд* 2013. №. 91. С. 114–125.
13. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. Київ: Віпол, 2010. 316 с.
14. Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. Киев: НИИ строительной механики, 1994. 264 с.
15. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. Київ: Каравела; 2010. 352 с.
16. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., Калашніков О.Б. Дослідження стійкості тонких пружних оболонок сталої та лінійно-змінної товщини. *Строительная механика и строительные конструкции. Сборник статей*. СКАД СОФТ, 2013. С. 27-33.
17. Баженов В.А., Гуляев В.И., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Львов: Вища школа, 1976. 190 с.
18. Бате К., Вилсон Р. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. 448 с.
19. Безсмертний Я.О., Красовський В.Л. Аналіз деформування та стійкості пологих тонкостінних конічних оболонок при комбінованому навантаженні рівномірним тиском та сконцентрованою у точці силою у середовищі програмного комплексу ANSYS. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2020. № 79. С.27–33.
20. Белова О.В., Прокопало Є.Ф. Устойчивость цилиндрических оболочек с круговыми вырезами при поперечном изгибе. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2013. Вип. 21. С. 45–56.

21. Беспалова Е.И., Борейко Н.П. Собственные частоты составных анизотропных оболочечных систем на основе разных моделей деформирования. *Прикладная механика*. 2019. Т. 55, № 1. С. 44–59.
22. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3-х т. Москва: Машиностроение, 1968.
23. Блох В.И. Теория упругости. Харьков: ХГУ, 1964. 483 с
24. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. 340 с.
25. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение, 1980. 376 с.
26. Бушнелл Д. Исследование подкрепленных кольцами оболочек вращения, находящихся под совместным действием температурных и механических нагрузок *Ракетная техника и космонавтика*. 1971. № 3. С. 64–77.
27. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. Москва: Машиностроение, 1976. 278 с.
28. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
29. Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев: Наукова думка, 1978. 212 с.
30. Варяничко М.А., Нагорный Д.В., Стукалова И.В., Марченко В.А. Устойчивость при внешнем давлении пологих конструкций, состоящих из конических оболочек. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. Дніпро, 2005. № 3. С. 24–32.
31. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры. Сумы: СумГУ, 2009. 286 с.
32. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек. *Строительная промышленность*. 1932. № 11. С. 33–37.

33. Внутрішньоструктурні термонапруження в композитах з термомеханічно несумісними параметрами їх фракцій / Гуляєв В.І. та ін. Київ: Ліра-К, 2023. 302 с.
34. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва: Наука, 1972. С .432.
35. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
36. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. Москва: Наука, 1989. 376 с.
37. Вычислительный комплекс SCAD. / Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. СКАД СОФТ, 2009. 656 с.
38. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. Киев: Наукова думка, 1989. 176 с.
39. Гавриленко Г.Д., Трубицина О.А. Колебания и устойчивость ребристых оболочек вращения. Днепропетровськ: Барвікс, 2008. 155 с.
40. Гнатюк В.В., Улитин В.В., Снитко А.Н. Экспериментально-теоретическое исследование влияния неправильностей на устойчивость цилиндрических панелей при нагребке. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1987. № 6. С. 35–38.
41. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинова А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва: Физматлит, 2006. 392 с.
42. Головкин К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Киевский университет, 2012. 541 с.
43. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2007. 394 с.
44. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978, 360 с.



45. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. *Прикладная механика*. 1972. № 6. С. 3–17.
46. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. Москва: Машиностроение, 1988. 288 с.
47. Григолюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. Москва: Наука, 1988. 232 с.
48. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно–аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. Киев: Академперіодика, 2006. 472 с.
49. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 286 с.
50. Гузь А.Н. О численных методах в трехмерной теории устойчивости. *Прикладная механика*. 1988. Т.24. №1. С. 3–8.
51. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев: Вища школа, 1980. 168 с.
52. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механических систем. Львов: Вища школа, 1982. 255 с.
53. Гуляев В.І., Шлюнь Н.В. Три механізми виникнення термонапружень і терморуйнувань у пружних тілах. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки»*. Київ: НТУ, 2023. Вип. 3 (57). С. 427–432.
54. Дзюба А.П., Прокопало Є.Ф., Дзюба П.А. Несуча здатність циліндричних оболонок з отворами. Дніпро: Ліра, 2014. 224 с.
55. Добриденко О.М., Скляр О.І., Турчин В.М., Бєлінська Р.Б. Аналіз існуючих композитних матеріалів та оцінка їх застосування у конструкціях планерів літальних апаратів військової авіації України. *Зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту авіації*, 2012. Вип. 15. С. 147–152.

56. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.
57. Каиров А.С., Моргун С.А. Свободные колебания конструктивно неоднородных подкрепленных цилиндрических оболочек. *Методи розв'язування приклад. задач механіки деформ. твердого тіла*. 2010. Вип. 11. С. 111–118.
58. Калашніков О.Б. Порівняльний аналіз напружено-деформованого стану і стійкості пружних оболонок з каналами та ребрами. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА*: матеріали конф., м. Київ, 6-8 лист. 2012 р. Київ, 2012. С. 44–45.
59. Калашніков О.Б., Верюжська Т.Ю. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок, послаблених каналами, виїмками та отворами. *74-та Науково-практична конференція КНУБА*: матеріали конф., м. Київ, 9-12 квітня 2013 р. Київ, 2013 С. 122.
60. Калашніков О.Б., Гусар П.П. Аналіз задач нелінійного деформування та стійкості тонких пружних оболонок, що розв'язані за МССЕ та ПК ЛІРА. *Наукова конференція молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА*: матеріали конф., м. Київ, 16-18 лист. 2010 р. Київ, 2010. С. 32.
61. Калашніков О.Б., Кривенко О.П. Врахування термопружних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Енергоощадні машини і технології*: матеріали міжн. науково-практичної конф. Київ, КНУБА. 2023. С. 153–156.
62. Калашніков О.Б., Солоденко А.Д. Стійкість пружних пологих оболонок ступінчасто-змінної товщини. *73-тя Науково-практична конференція КНУБА*: матеріали конф., м. Київ, 3-7 квітня 2012 р. Київ, 2012. С. 102.
63. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наукова думка, 1974. 136 с.

64. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Москва: Машиностроение, 1975. 376 с.
65. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с. Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 248 с.
66. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. *Теория пластин и оболочек*. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58–69.
67. Кильчинский А.А. Об одной модели для определения термоупругих характеристик материалов, армированных волокнами. *Прикладная механика*. 1965. Т.1, № 12. С. 65–74.
68. Киричевський В.В., Стреляєв Ю.М. Розв'язок інтегральних рівнянь методом скінчених елементів у програмному комплексі «Мірела+». *Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя, 2006. № 1. С. 62–66.
69. Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек. *Проблемы прочности*. 1977. № 7. С. 25–32.
70. Клаф Р., Пеизиен Дж. Динамика сооружений. Москва: Стройиздат, 1979. 320 с.
71. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів: монографія. Херсон: Гельветика, 2019. 300 с.

72. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Богуславська А.М. Термопружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально ізотропними матрицею і волокном. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2017. № 27. С. 75–90.
73. Козуб Г.О., Козуб Ю.Г. Моделювання теплових процесів у шаруватих тілах. *Геотехнічна механіка*. 2020. № 151. С. 234–244
74. Козуб Ю.Г., Солодей І.І. Використання MSCSE для обчислення термопружного стану пневматичних шин. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. № 102. С. 232–242.
75. Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. *Механика: Сборник переводов иностранных статей*. 1960. № 5. С. 99–110.
76. Композиционные материалы: Справочник / Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.; Под общ. ред. Васильева В. В., Тарнопольского Ю.М. Москва: Машиностроение, 1990. 512 с
77. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса, АН УССР. Ин-т проблем материаловедения. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
78. Кондратенко А.Н., Голубкова Т.А. Полимерные композиционные материалы в изделиях зарубежной ракетно-космической техники (Обзор). *Конструкции из композиционных материалов*, 2009. № 2. С. 24–35.
79. Кондратьев А.В., Коваленко В.А. Оптимизация проектных параметров композитного головного обтекателя ракеты-носителя при одновременном силовом и тепловом нагружении. *Космічна наука і технологія*. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–21.
80. Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О.Б. Використання моментної схеми скінчених елементів при дослідженні тонких пружних оболонок. Управління розвитком складних систем. 2023. №53. С. 52–62.

81. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б.  
Моделювання процесів нелінійного деформування, втрати стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури. *Прикладна механіка*. 2024. Вип.60, № 4. С. 91–107.
82. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б.  
Моделювання термопружних властивостей композитного матеріалу в задачах стійкості багат шарових оболонок. *Управління розвитком складних систем*. 2023. № 54. С. 77–89.
83. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б. Скінченно-елементний аналіз коливань і стійкості пружних оболонок при дії термосилових навантажень. *Проблеми будівельного та транспортного комплексів: матеріали. міжн. науково-технічної on-line конф.* Кропивницький: ЦНТУ, 2023. С. 82–85.
84. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Калашніков О.Б. Універсальний тривимірний скінченний елемент для розрахунку пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2024. №112. С. 93–107.
85. Кривенко П.В., Пушкарьова К.К., Барановський В.Б. та ін. Будівельне матеріалознавство: Підручник. Київ: ЕксОб, 2006. 704 с.
86. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982, 336 с.
87. Кролл Дж. Г.А., Гавриленко Г.Д. Метод уменьшенной жесткости в теории выпучивания гладких оболочек и классический анализ устойчивости (обзор). *Проблемы прочности*.1999. № 2. С. 45–66.
88. Кудинов А.Н. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления в условиях нагрева. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1966. № 6. С.213–218.

89. Кучер М.К., Заразовський М.М. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2010. №58. С.24 – 29.
90. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
91. Лира 9.4 Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие / Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. и др. Киев: Факт, 2008. 164 с.
92. ЛИРА–САПР. Книга I. Основы / Стрелец–Стрелецкий Е.Б, Журавлев А.В., Водопьянов Р.Ю. Под ред. Академика РААСН, д.т.н, проф. Городецкого А.С. Киев: LIRALAND, 2019. 154с.
93. Лук'янченко О.О., Геращенко О.В., Палій О.М. Нелінійний динамічний аналіз оболонки резервуара зі змодельованими недосконалостями форми. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2022. №. 109. С. 129–140.
94. Лурье А.И. Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Ленинград: 1948. 28 с.
95. Львов Г.И. Численная гомогенизация теплофизических свойств волокнистых композитов. *Механика композитных материалов*. 2022. Т. 58, № 5. С. 883–904.
96. Маневич А.И., Ракша С.В. Оптимальное проектирование тонкостенных конструкций с учетом взаимодействия форм потери устойчивости. *Theoretical foundations of Civil Engineering*. XI. Ed. by W. Szcześniak, OW PW. Warsaw 2003 P.167–176.
97. Масько О.М., Сухов В.В. Досвід застосування композиційних матеріалів у конструкції експериментальних БПЛА контейнерного старту класу «міні». *Інформаційні системи, механіка та керування*, 2017. Вип. 16. С. 79–88.
98. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Сахаров А.С., Кислоокій В.Н., Киричевский В.В. и др. Киев: Вища школа, 1982. 480 с.

99. Механика композитов. В 12 томах. / ред. А.Н. Гузя. 1993-2003. Т. 1-4. Киев: Наукова думка, т 5-12. Киев: АСК.
100. Моссаковский В.И., Ободан Н.И., Фридман А.Д. Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с большими прямоугольными вырезами. *Прикладная механика*. 1980. Т.16. № 2. С. 51–56.
101. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 432 с.
102. Нарусберг Н.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига: Зинатне, 1988. 299 с.
103. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. 872 с.
104. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Судпромгиз, 1962. 431 с.
105. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва: Мир, 1976. 464 с.
106. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
107. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
108. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е., Присяжнюк В.К., Сипетов В.С. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов: Монография. Киев: Вища школа, 1987. 200с.
109. Погорелов А.В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. Москва: Наука, 1966. 296 с.
110. Погорелов А.В., Бабенко В.И. Геометрические методы в теории устойчивости тонких оболочек (обзор). *Прикл. механика*. 1992. Т. 28. №1. С. 3–22.
111. Преображенский И.Н. Об исследованиях устойчивости тонкостенных оболочек с вырезами (обзор). *Проблемы прочности*. 1982. № 1. Часть 1, С. 21–32; № 2. Часть 2, С. 74–81.

112. Преображенский И.Н., Грищак В.З. Устойчивость и колебания конических оболочек. Москва: Машиностроение, 1986. 240 с.
113. Прокопало Є. Ф., Сиволоб О.А. Експериментальне дослідження стійкості конічних оболонок з круговими отворами. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. Вип. 19. С. 261–270.
114. Работнов Ю.Н. Механика твердого деформируемого тела. Москва: Наука, 1988. 712 с.
115. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1986. 191 с.
116. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, А.И. Оглобля и др. Киев: Будівельник, 1992. 136 с.
117. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с.
118. Ричардсон М. Промышленные полимерные композиционные материалы. Перевод с англ. Под ред. Бабаевского П.Г. Москва: Химия, 1980. 472 с.
119. Рубашевський В.В., Заразовський М.М., Шукаєв С.М. Аналіз методів визначення констант пружності однонаправленого шару композиційних матеріалів. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2017. №2 (80). Р. 107–112.
120. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Киев: НТУУ «КПИ», 2011. 317 с.
121. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов. Москва: Наука, 1989. 432 с.
122. САПР. Чисельне моделювання нелінійного деформування та руйнування багатошарових елементів хімічного обладнання. Частина 1. Пружні муфти. / Гондляр О.В., Сахаров О.С., Чемерис А.О. та ін. Київ: Едельвейс, 2011. 172 с.
123. Сафронова І.А. Моделі і алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів в задачах розрахунку і оптимізації оболонкових елементів конструкцій: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04. Дніпро, 2021. 147 с.



124. Сахаров В.О. Сучасні методики дослідження динамічних задач взаємодії елементів системи "основа – фундамент - будівля" *Основи та фундаменти*. 2015. № 37. С. 15–26.
125. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. Москва: Наука, 1983. 528 с.; Т.2. Москва: Наука, 1984. 560 с.
126. Семенюк М.П., Жукова Н.Б. Стійкість композитних циліндричних оболонок з геометричними та структурними недосконаlostями при осьовому стиску. *Прикладна механіка*. 2022. Т. 58, № 3. С. 68–81.
127. Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б. Вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пологих оболонок при дії тиску. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. № 90. С. 143–157.
128. Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б. Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 83. С.63–73.
129. Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Тамілко О.А. Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини *Опір матеріалів і теорія споруд*. № 84. С.89–96.
130. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., Калашніков О.Б. Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2012. №89. С. 172-180.
131. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик для односпрямованого волокнистого композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С. 30–49.
132. Сторожук Є.А. Сумісні скінченні елементи з векторною апроксимацією невідомих для розрахунку тонких оболонок складної геометрії. *Доповіді Національної академії наук України*. 2020. № 1. С. 39–48.
133. Термопружний стан багатошарових дорожніх покриттів: монографія / Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Шлюнь Н.В. та ін. Київ: НТУ, 2018. 252 с.

134. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.
135. Троценко Ю.В. Собственные колебания составной оболочки «усечённый конус-цилиндр». *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2019, т. 16, №2, с.167–176.
136. Углеродные волокна и углекомпози́ты: Пер. с англ. / Под ред. Э.Фитцера. Москва: Мир. 1988. 336 с.
137. Феодосьев В.И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. Москва: Наука, 1969. 174 с.
138. Хорошун Л.П., Козлов С.В., Иванов Ю.А., Кошевой И.К. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1988. 152 с.
139. Чернобрышко М. В., Аврамов К. В. Собственные колебания параболических оболочек. *Математические методы и физико-механические поля*. 2014. Вып. 57. № 3. С. 78–86.
140. Шалашин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. Москва: Эдиториал, 1999. 224 с.
141. Шлюнь Н.В., Заець Ю.О. Про внутрішній механізм термопошкоджень в армованих композитах з термомеханічною несумісністю їх фаз. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки»*. Київ: НТУ, 2022. Вип. 3 (53). С. 43–49.
142. Юскаев В.Б. Композиційні матеріали: Навчальний посібник. Суми: СумДУ, 2006. 199 с.
143. Agarwal B.D., Broutman L.J., Chandrashekhara K. Analysis and Performance of Fiber Composites. Third Edition. Hoboken NJ: John Wiley & Sons, 2006. 562 p. (Authorized reprint by Wiley India Pvt. Ltd. New Delhi, 2015).
144. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014. Vol. 58. P. 233–257.

145. ANSYS Mechanical User's Guide. Release 16.2. Mechanical Analysis Guide. 2015. 1796 p.
146. Avramov K.V., Sakhno N.H., Uspenskyi B.V. Static Buckling of a Pre-loaded Complex Nano-composite Shell. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2021. Vol. 24, № 1. P. 28-35.
147. Bathe K.J. The subspace iteration method – Revisited. *Computers & Structures*. 2013. №126 P. 177–183.
148. Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. Saarbruken, Deutchland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018. 97 p.
149. Bazhenov V.A., Kozub Yu.G., Solodei I.I. Thermoelasticity of elastomeric constructions with initial stresses *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2020. № 104. P. 299–308.
150. Bazhenov V.A., Solovei N.A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, № 9. P 923–953.
151. Bossak M.A., Zienkiewicz O.C. Free vibration of initially stressed solids with particular referents to centrifugal force in rotation machinery. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1973. Vol.8, №4. P. 245–252.
152. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic interferometry study of the free vibrations of cylindrical shells of constant and variable thickness. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, No 1. P. 68–74.
153. Bushnell D. Computerized Buckling Analysis of Shells. Amsterdam: Martinus Nijhoff Publishers, 1985. 423 p.
154. Cowep G.R., Lindberg G.M., Olson M.D. A shallow shell finite element of triangular shape. *International Journal of Solids and Structures*. 1970. Vol.6, №8. P 1133–1156.

155. Doleman B.R. Thermal Characterization Of As4/3501-6 Carbon-Epoxy Composite : Thesis, North Carolina Agricultural and Technical State University, 2017. 112 p.
156. Dzyuba A.P., Dzyuba P.A., Iskanderov B.A. Experimental research of cylindrical shells stability with rectangular holes of different sizes under transversal bending. *Technical and Physical Problems of Engineering*. 2022. Iss. 52. Vol. 14, № 3. P. 94–99.
157. Etraim E., Eisenberger M. Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2006. №44. P. 281 – 289.
158. Ghosh A.K., Dey S.S. A simple finite element for the analysis of laminated plates. *Computers & Structures*. 1992. Vol.44, Issue 3. P. 585–596
159. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review). *International Applied Mechanics*. 2013. Vol. 49, No 2. P. 123–193.
160. Harris B. Engineering Composite Materials. The Institute of Materials. London, 1999. 195 p.
161. Herakovich C.T. Mechanics of composites: A historical review. *Mechanics Research Communication*. 2012. Vol. 41. P. 1–20
162. Hutchinson J.W., Thompson J.M.T. Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 84, № 6. P.061001/1–061001/11
163. Ifayefunmi O., Ismail, M.S., Othman M.Z.A. Buckling of unstiffened cone-cylinder shells subjected to axial compression and thermal loading. *Ocean Engineering*. 2021. Vol 225. P.1–14.
164. Kalashnikov O., Krivenko O., Lizunov P. (2024). Modification of a universal three-dimensional finite element for modeling multilayer composite shells. *Diversity and inclusion in scientific area: IV International scientific and practical conference, Warsaw, 26-28 March 2024*. P. 461–463.

165. Kalashnikov O., Krivenko O., Lizunov P. Comprehensive investigation of the buckling and natural vibrations of thin elastic shells under the action of thermomechanical loads. *Science in the Environment of Rapid Change: IV International scientific and practical conference, Brussels, 6-8 April 2024*. P. 407–410.
166. Karasev A., Varianychko M., Bessmertnyi Y., Krasovsky V., Karasev G. Numerical analysis of experimental research on buckling of closed shallow conical shells under external pressure. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2020. Vol. 58, No.1. P. 117–126.
167. Khoa N.N. and Thinh T.I. Finite element analysis of laminated composite plates using high order shear deformation theory. *Vietnam Journal of Mechanics*. 2007. №29. P. 47–57.
168. Krivenko O., Lizunov P., Kalashnikov O. The influence of geometrical shape on the buckling of thin-walled axisymmetric shells. *Management of Development of Complex Systems*. 2024. №57. P. 102–106.
169. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., Kalashnikov O.B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures*. Kyiv: KNUBA, 2023. №110. P. 131–149.
170. Krivenko O.P.; Lizunov P.P.; Vorona Yu.V.; Kalashnikov O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2023. № 111. P. 49-64.
171. Krivenko O.P., Vorona Yu.V. Comparative Analysis of Nonlinear Deformation and Buckling of Thin Elastic Shells of Step-Variable Thickness. *Strength of Materials and Theory of Structures*. Kyiv: KNUBA, 2022. №108. P. 107–118.
172. Lvov G.I. Numerical Homogenization of the Thermophysical Properties of Fibrous Composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2022. Vol. 58. P. 613–628.

173. MacKay J.R., van Keulen F. A review of external pressure testing techniques for shells including a novel volume-control method. *Experimental Mechanics*. 2010. Vol. 50. №. 6. P. 753–772.
174. Marthelot J., Jiménez F.L., Lee A., John W. Hutchinson J.W., Reis P.M. Buckling of a Pressurized Hemispherical Shell Subjected to a Probing Force. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 84, № 12. P. 121005/1–121005/9.
175. Mawenya A.S., Davies J.D. Finite element bending analysis of multilayered plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1974. Vol.8. P. 215– 225.
176. Muradova, A.D.; Stavroulakis, G.E. Mathematical Models with Buckling and Contact Phenomena for Elastic Plates: A Review. *Mathematics. Applied Mathematical Methods in Mechanical Engineering*. 2020. №8(4), 566.
177. Okhten I.O., Lukianchenko O.O. Some aspects of consideration of initial imperfections in the calculations of stability of thin-walled elements of open profile. *Strength of materials and theory of structures*. 2021. № 106. P. 122–128.
178. Olson M.D., Linberg G.M. Vibration analysis of cantilever plates, using a new cylindrical shell finite elements. *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AF base Wright. Peterson. Otto, 1968. P. 247–269.
179. Pagano N.J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. *Journal of Composite Materials*. 1970. Vol. 4, P.20–34.
180. Panda S.C., Natarajan R. Finite element analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979. Vol.14. P. 69–79.
181. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press 2003. p. 831.
182. Reddy, J.N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *The Journal of Applied Mechanics*. 1984; Vol. 51, №4. P. 745–752.

183. Rosen B.W. Thermomechanical properties of fibrous composites. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1970. Vol. 319, № 1536. P. 79–94.
184. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++ / Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А. и др. Киев: СКАД СОФТ, 2015. 848 с.
185. Schapery R.A. Thermal Expansion Coefficient of Composite Materials Based on Energy Principles. *Journal of Composite Materials*, №2, 1968, P. 380–404.
186. Semenyuk M.P., Zhukova N.B. Stability of Composite Cylindrical Shells with Geometrical and Structural Imperfections Under Axial Compression. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58 (3). P. 307–319.
187. Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B. The Theory of Stability of Cylindrical Composite Shells Revisited. *International Applied Mechanics*, 2015. Vol. 51 (4) P 449–460.
188. Shahmohammadi M.A., Azhari M.M., Sarrami-Foroushani S. Stability of laminated composite and sandwich FGM shells using a novel isogeometric finite strip method. *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering*, 2019. Vol. 37 (4). P 1369–1395.
189. Sheikh A.H., Chakrabarti A. A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2003. Vol.39, Issue 9. P. 883–903
190. Soden P.D., Hinton M.J. and Kaddour A.S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*. 1998, № 58 p. 1011–1022.
191. Sweedan A. M.I., El Damatty A.A. Simplified procedure for design of liquid-storage combined conical tanks. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2009. Vol. 47, No. 6–7. P. 750–759.

192. Thermoelasticity of constructions from elastomers and elastomer composites with initial stresses / Bazhenov V.A., Kozub Yu.G. and others. Dudweiler, Germany: LAP LAMBERT Academic Publ. 2021. 310 p.
193. Thornton Earl A. Thermal Buckling of Plates and Shells *Applied Mechanics Reviews*. Oct. 1993, Vol. 46, No10. P.485–506.
194. Tian-xia, S., Qing-hua, Q. Equilibrium and buckling of combined shells under uniform external pressure. 1987. *Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 8, P. 57–70.
195. Xianjie Shi, Peng Zuo, Rui Zhong, Chenchen Guo, Qingshan Wang. Thermal vibration analysis of functionally graded conical-cylindrical coupled shell based on spectro-geometric method. *Journal of Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 175, P. 109–138.
196. Zhang H, Gao Y, He D, Yang W. Free vibration and buckling analysis of composite laminated shells using the refined zigzag theory. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2022. Vol. 60(3). P 435–48.





МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ, 03037, тел. (044)241-55-80,  
e-mail: knuba\_admin@ukr.net, web: http://www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

**Довідка**

про впровадження результатів дисертаційної роботи Калашнікова О.Б. на тему «Стійкість та власні коливання пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях» у наукових дослідженнях та науковому процесі кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) та Науково-дослідного інституту будівельної механіки (НДІБМ) КНУБА

Результати дисертаційної роботи Калашнікова О.Б. на тему «Стійкість та власні коливання пружних неоднорідних оболонок при термомеханічних навантаженнях» впроваджені при виконанні науково-дослідних робіт, що виконувалися в НДІБМ КНУБА за напрямком 05 – «Нові комп'ютерні засоби та технології інформатизації суспільства» за дорученням Міністерства освіти і науки України: «Теоретичні основи аналізу нелінійного деформування та стійкості пружних неоднорідних оболонок складної структури при дії навантажень різної природи» (№ ДР 0111U002219); «Нелінійне деформування, стійкість, закритична поведінка та коливання оболонкових конструкцій спеціальної техніки в екстремальних термосилових умовах експлуатації» (№ ДР 0121U001004).

Здобувач брав безпосередню участь у виконанні цих робіт як співвиконавець.

Основний науковий внесок Калашнікова О.Б. полягає у побудові і реалізації методу комплексного дослідження нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок з неоднорідною за товщиною геометричною та фізичною структурою при статичній дії складного термомеханічного навантаження; у розробці нової модифікації універсального тривимірного багатоплощового скінченно елемента, матеріалами шарів якого є односпрямовані волокнисті композити; в адаптації програмних комплексів ЛІРА-САПР і SCAD до аналізу поведінки оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термомеханічних навантажень та проведенні за їх допомогою порівняльного аналізу стійкості конструкцій.

Результати дисертаційної роботи були використані у навчальному процесі КНУБА при виконанні кваліфікаційних магістерських робіт 2009-2013 рр. під керівництвом д.т.н., проф. Солов'я М.О. та за участю Калашнікова О.Б.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 за місцем захисту дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата наук.

Проректор з наукової роботи та  
інноваційного розвитку



Олександр КОВАЛЬЧУК