

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Максим'юк Олександр Всеволодович

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ


ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФОРМОЗМІНЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ
НАШВАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Спеціальність: 131 – Прикладна механіка

Галузь знань: 13 – Механічна інженерія

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.


_____ О. В. Максим'юк

Науковий керівник: **Козак Андрій Анатолійович**

кандидат технічних наук, доцент

Київ 2024

АНОТАЦІЯ

Максим'юк О. В. Чисельне дослідження формозмінення просторових тіл напіваналітичним методом скінченних елементів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 131 «Прикладна механіка». – Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, 2024.

Серед просторових конструкцій, що широко застосовуються в різних галузях техніки, значне місце займають призматичні тіла, геометричні та фізико-механічні характеристики яких змінні за всіма трьома напрямками.

В рамках цієї роботи будуть розглянуті тривимірні об'єкти довільного, не обов'язково однозв'язкового, поперечного перерізу з деякими обмеженнями на характер зміни геометрії з деякими обмеженнями на характер зміни геометрії вздовж з координат, а саме, об'єкт можна представити як результат руху точок поперечного перерізу вздовж деяких просторових шматочків. -Гладких кривих. У тілах можуть бути також передбачені вирізи і отвори, контури яких паралельні координатним поверхням.

Такі просторові тіла будемо надалі називати криволінійними призматичними, а за наявності неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу - криволінійними неоднорідними тілами.

Велику кількість просторових конструкцій представляють призматичні тіла, геометричні та фізико-механічні характеристики яких змінні за всіма трьома напрямками. Об'єкти виділеного класу використовуються як природні конструкції, вузли і деталі в будівництві та різних галузях машинобудування. Наприклад, до них відносяться фундаменти промислових та цивільних будівель, елементи перекриттів та покриттів, арочні греблі, кронштейни, різці, зуби косозубих коліс тощо. Деформування конструкцій, що розглядаються, відбувається під дією силових і температурних факторів, причому, через наявність суттєвих перепадів температур можлива зміна фізико-механічних

характеристик матеріалу. На сучасному рівні розвитку техніки та технології в окремих елементах конструкцій допускається виникнення пластичних деформацій. Для ряду деталей у процесі експлуатації та виготовлення розвиток пластичних деформацій супроводжується суттєвою зміною первісної форми. Це характерно для процесів обробки металів тиском, наприклад, при виготовленні штампових підборів, протяжці смуг. Подальше вдосконалення конструктивних розв'язків розробки відповідальних вузлів і технологічних процесів багато в чому залежить від повноти та достовірності інформації про особливості зміни картини напружено-деформованого стану в процесі навантаження. У зв'язку з цим, розробка методів дослідження виділеного класу об'єктів є актуальною проблемою.

Необхідність вивчення характеру напружено-деформованого стану криволінійних неоднорідних призматичних тіл призводить до розв'язання складних просторових задач термопружності та термопластичності як при малих, так і великих пластичних деформаціях.

У вступі показано актуальність наряду намічених досліджень, виконано аналіз літературних джерел, поставлено мету роботи, розкрито її наукову новизну та практичну цінність.

Перший розділ присвячений отриманню розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінчених елементів для дослідження неоднорідних криволінійних призматичних тіл. Наведено основні співвідношення просторової задачі теорії пружності в прямокутній декартовій системі координат, теорії пластичного течії для ізотропного матеріалу, що зміцнюється за умови плинності Мізеса і теорії зміцнення. В усіх співвідношеннях враховується залежність властивостей матеріалу від температури. Запропоновано новий неоднорідний криволінійний призматичний скінчений елемент, матриця жорсткості якого отримана відповідно до методики моментної схеми скінчених елементів. Розроблений підхід поширений розв'язання геометрично нелінійних задач, причому вирішальні рівняння приведені до виду, аналогічному отриманому раніше для геометрично лінійної задачі.

У другому розділі описані алгоритми розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичний метод скінчених елементів, корекції напружень при виникненні деформацій пластичності та повзучості. Велику увагу приділено питанням ефективності застосування методу блокових ітерацій до розв'язання задач про пружно-пластичному деформуванні призматичних тіл із змінними уздовж координати розкладання параметрами. Описано схему обчислювального процесу та структуру реалізуючого її комплексу програм.

У третьому розділі виконано чисельне вивчення збіжності розв'язків, одержуваних з урахуванням розробленого підходу. Розглянуто широке коло тестових задач для тіл з плавно і стрибкоподібно мінливими фізичними та геометричними характеристиками в пружній та пружно-пластичній постановці. У всіх випадках напіваналітичний метод скінчених елементів за точністю апроксимації не поступається, а в деяких задачах в 1,5-2 рази перевершує традиційний метод скінчених елементів. Для обґрунтування достовірності результатів вирішені контрольні задачі в пружній, пластичній та геометрично нелінійній постановках.

У четвертому розділі викладено результати чисельного розв'язання задач, що мають прикладне значення. Вивчено напружено-деформований стан трубчастого елемента з прямокутним вирізом в умовах термосилового навантаження, дослідження впливу товщини фланця на характер розвитку зон пластичності в корпусній деталі, розглянуто напружено-деформований стан смуги у процесі протягування.

В результаті проведених досліджень створені на основі моментної схеми скінчених елементів та напіваналітичного методу скінчених елементів ефективної методики чисельного розв'язання задач термопружності та термопластичності для доволіно навантажених масивних та тонкостінних просторових призматичних тіл із змінними фізико-механічними та геометричними характеристиками. Розроблений підхід розвинений стосовно дослідження напружено-деформованого стану об'єктів з урахуванням великих пластичних деформацій і деформацій повзучості. Вирішено низку нових

складних задач пружно-пластичного деформування криволінійних неоднорідних призматичних тіл при термомеханічних впливах.

Ключові слова: метод скінчених елементів, напіваналітичний метод скінчених елементів, моментна схема скінчених елементів, напружено-деформований стан, масивні та тонкостінні просторові призматичні тіла, термопружність, термопластичність, великі пластичні деформації, деформації повзучості, формозмінення.

SUMMARY

Maksymiuk O.V. Numerical study of the shape change of spatial bodies using the semi-analytical method of finite elements. – Qualifying scientific work on manuscript rights.

Dissertation for the Doctor of Philosophy degree in specialty 131 "Applied Mechanics". - Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2024.

Among spatial structures widely used in various fields of technology, prismatic bodies occupy a significant place, the geometric and physical-mechanical characteristics of which are variable in all three directions.

Within the framework of this work, three-dimensional objects of an arbitrary, not necessarily single-link, cross-section with some restrictions on the nature of the geometry change will be considered with some restrictions on the nature of the geometry change along the coordinates, namely, the object can be represented as a result movements of cross-section points along some spatial pieces. -Smooth curves. The bodies can also have cutouts and holes, the contours of which are parallel to the coordinate surfaces.

Such spatial bodies will be called curvilinear prismatic bodies, and in the presence of inhomogeneity of physical and mechanical properties of the material - curvilinear heterogeneous bodies.

A large number of spatial structures are represented by prismatic bodies, the geometric and physical-mechanical characteristics of which are variable in all three directions. Objects of the selected class are used as natural structures, nodes and details in construction and various branches of mechanical engineering. For example, they include the foundations of industrial and civil buildings, elements of ceilings and coatings, arched dams, brackets, cutters, teeth of helical wheels, etc. Deformation of the considered structures occurs under the influence of force and temperature factors, and, due to the presence of significant temperature differences, a change in the physical and mechanical characteristics of the material is possible. At the current level of technical and technological development, plastic deformations are allowed in

individual structural elements. For a number of parts in the process of operation and manufacture, the development of plastic deformations is accompanied by a significant change in the original shape. This is typical for the processes of processing metals by pressure, for example, in the manufacture of stamp heels, stretching of stripes. Further improvement of constructive solutions for the development of responsible nodes and technological processes largely depends on the completeness and reliability of information about the peculiarities of the change in the picture of the stress-strain state during the loading process. In this regard, the development of research methods for a selected class of objects is an urgent problem.

The need to study the nature of the stress-strain state of curvilinear heterogeneous prismatic bodies leads to the solution of complex spatial problems of thermoelasticity and thermoplasticity both at small and large plastic deformations.

The introduction shows the relevance of the intended research direction, analyzes literary sources, sets the goal of the work, reveals its scientific novelty and practical value.

The first chapter is devoted to obtaining the solving equations of the semi-analytical method of finite elements for the study of inhomogeneous curvilinear prismatic bodies. The main relations of the spatial problem of the theory of elasticity in the rectangular Cartesian coordinate system, the theory of plastic flow for an isotropic material that strengthens under the condition of Mises yield and the theory of strengthening are given. All ratios take into account the dependence of material properties on temperature. A new non-homogeneous curvilinear prismatic finite element is proposed, the stiffness matrix of which is obtained according to the technique of the moment scheme of finite elements. The developed approach is a common solution of geometrically nonlinear problems, and the decisive equations are reduced to a form similar to that obtained earlier for a geometrically linear problem.

The second chapter describes the algorithms for solving systems of linear and nonlinear equations, the semi-analytical method of finite elements, stress corrections when plasticity and creep deformations occur. Much attention is paid to the question of the effectiveness of the block iteration method for solving problems of elastic-plastic

deformation of prismatic bodies with variable parameters along the decomposition coordinate. The scheme of the computational process and the structure of the complex of programs implementing it are described.

In the third section, a numerical study of the convergence of solutions obtained taking into account the developed approach is performed. A wide range of test tasks for bodies with smoothly and abruptly changing physical and geometric characteristics in elastic and elastic-plastic settings is considered. In all cases, the semi-analytical method of finite elements is not inferior in accuracy of approximation, and in some tasks it is 1.5-2 times superior to the traditional method of finite elements. To substantiate the reliability of the results, control tasks in elastic, plastic and geometrically nonlinear settings were solved.

In the fourth chapter, the results of the numerical solution of problems with applied value are presented. The stress-strain state of a tubular element with a rectangular cutout under the conditions of thermoforce loading was studied, the influence of the flange thickness on the nature of the development of plasticity zones in the body part was studied, and the stress-strain state of the strip during the drawing process was considered.

As a result of the research, effective methods for numerically solving problems of thermoelasticity and thermoplasticity for arbitrarily loaded massive and thin-walled spatial prismatic bodies with variable physical, mechanical and geometric characteristics were created on the basis of the moment scheme of finite elements and the semi-analytical method of finite elements. The developed approach is developed in relation to the study of the stress-strain state of objects, taking into account large plastic deformations and creep deformations. A number of new complex problems of elastic-plastic deformation of curvilinear inhomogeneous prismatic bodies under thermomechanical influences have been solved.

Keywords: finite element method, semi-analytical finite element method, moment diagram of finite elements, stress-strain state, massive and thin-walled spatial prismatic bodies, thermoelasticity, thermoplasticity, large plastic deformations, creep deformations, deformation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

a) статті у наукових виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України (в т.ч. включених до переліку наукових фахових видань України з присвоєнням категорії «А»):

1. Bazhenov V.A., Maksimiyuk Yu.V., Horbach M.V., Martyniuk I.Yu., Maksimiyuk O.V. Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUCA, 2021. – Issue 106. – P. 92-104. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.106.92-104> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором розглянуто велику кількість тестових задач для тіл з плавно і стрибкоподібно мінливим фізичними та геометричними характеристиками в пружній та пружно-пластичній постановці.
2. Vorona Y.V., Maksimiyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimiyuk O.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUCA, 2021. – Issue 107. – P. 184-192. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2021.107.184-192> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором показана ефективність застосування напіваналітичного методу скінченних елементів до розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних об'єктів.
3. Maksimiyuk Yu.V., Chuprina Yu.A., Kozak O.V., Martyniuk I.Yu., Maksimiyuk O.V. Investigation of the influence of flange thickness on the nature of the development of zones of plasticity in casing detail. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv:

- КНУСА, 2022. – Issue. 108. – P. 97-106. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.97-106> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором виконано чисельний аналіз напружено-деформованого стану просторового об'єкту, а саме дослідження впливу товщини фланця на характер розвитку зон пластичності в корпусній деталі.
4. Maksimyuk Yu.V., Kuzminets M.P., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Research of the stressed and deformed state of a metal strip in the broaching process. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUCA. – Issue 109. – P. 229-238. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.229-238> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором на основі напіваналітичного методу скінчених елементів розв'язання просторової задачі пластичного формозмінення призматичного тіла і проведено аналіз процесу протягування смуги в процесі обробки металом тисненням.
 5. Maksimyuk Yu.V., Kozak O.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUCA, 2023. – Issue 110. – P. 199-206 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.199-206> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором вивчено напружено-деформований стан трубчастого елемента з прямокутним вирізом в умовах термосилового навантаження.
 6. Maksimyuk Yu.V., Andriievskiy V.P., Martyniuk I.Yu., Maksimyuk O.V. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUCA, 2023. – Issue 111. – P. 140-146. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.111.140-146> (Видання включено до міжнародних наукометричних баз). Особисто автором у

процесі розв'язання нових задач оцінка збіжності результатів проводилася на основі послідовного збільшення скінченних елементів і утримуваних членів розкладання, підвищення точності систем лінійних і нелінійних рівнянь, а також перевірялася точність задоволення природним граничним умовам.

б) статті у науковому виданні, включеному до переліку наукових фахових видань України категорії «Б» :

7. Максим'юк Ю., Козак А., Максим'юк О. Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування. Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.4.2019.10-20> *Особисто автором отримані розрахункові співвідношення моментної схеми скінчених елементів для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням пошкодженості матеріалу.*
8. Гуляр О., Максим'юк Ю., Козак А., Максим'юк О. Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних. Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 6. – С. 72–84. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.6.2020.72-84> *Особисто автором на основі високо ефективною моментної схеми скінчених елементів побудовані розв'язувальні співвідношення для універсального призматичного СЕ загального типу.*
9. Максим'юк Ю., Гончаренко М, Мартинюк І., Максим'юк О. Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл. Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 7. – С. 101–108. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.7.2020.101-108> *Особисто автором реалізовано алгоритм методу блочних ітерацій*

розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл

10. Максим'юк Ю., Козак А., Мартинюк І., Максим'юк О. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами. Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108. <https://doi.org/10.32347/2522-4182.8.2021.97-108> *Особисто автором виведені формули обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами для дослідження масивних, тонкостінних і комбінованих конструкцій.*

в) Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

11. Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Напіваналітичний метод скінчених елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури – Київ: Вид-во “Каравела”, 2021. – 280с. ISBN 978-966-8019-59-3 *Одноосібно три глави у колективній монографії*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

12. Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В. Напіваналітичний метод скінчених елементів в лінійних і нелінійних задачах деформування, руйнування та формозмінення просторових тіл з урахуванням неканонічності форми та складної структури. III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» – К.: КНУБА., 25-25.09.2021 – 73-74с.
13. Максим'юк Ю., Мартинюк І., Максим'юк О. Моментна схема скінчених елементів в геометрично та фізично нелінійних задачах деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням континуального

руйнування. IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023.

14. Maksimyyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyyuk O.V. Research of convergence, reliability and efficiency of the results obtained using the given finite elements. Materiály XX Mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti», Volume 4 : Praha. 2023. Pp. 91-94. Publishing House «Education and Science» -96 s. ISSN 1561-6940 (online).
15. Maksimyyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyyuk O.V. The effectiveness of the algorithm for solving nonlinear equations in isotropic load. Scientific progress: innovations, achievements and prospects. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023. Pp. 117-120.
16. Maksimyyuk Yu.V., Martyniuk I.Yu., Maksimyyuk O.V. Study of the influence of taking into account geometric nonlinearity on the value of the resource of a christmas tree joint under creep conditions. Modern research in science and education. Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. BoScience Publisher. Chicago, USA. 2023. Pp. 148-150.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ.....	17
ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1. РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ФІЗИЧНО І ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ.....	29
1.1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності, пластичності і повзучості.....	29
1.2. Криволінійний неоднорідний призматичний скінчений елемент.....	35
1.3. Вектор вузлових реакцій і матриця жорсткості скінчений елемент.....	41
1.4. Вивід визначальних рівнянь з урахуванням великих пластичних деформацій.....	49
РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ.....	62
2.1. Розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь.....	62
2.2. Ефективність використання напіваналітичного методу скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл в пружній та пружно-пластичній постановці.....	68
2.3. Структура обчислювального комплексу.....	75
РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ І ДОСТОВІРНОСТІ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ.....	82
3.1. Порівняння збіжності методу скінчених елементів і напіваналітичного методу скінчених елементів.....	83

3.2. Достовірність напіваналітичного методу скінчених елементів при розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних тіл.....	96
РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ТА СТРУКТУРИ.....	103
4.1. Напружено-деформований стан трубчатого елемента.....	103
4.2. Дослідження впливу товщини фланця на напружено-деформований корпусної деталі.....	109
4.3. Аналіз процесу протяжки полоси прямокутного перерізу.....	118
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	130
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	133
ДОДАТКИ.....	157

ПЕРЕЛІК ПРИЙНЯТИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

МСЕ – метод скінчених елементів;

НМСЕ – напіваналітичний метод скінчених елементів;

МССЕ – моментна схема скінчених елементів;

СЕ – скінчений елемент;

НДС – напружено-деформований стан;

ОК – обчислювальний комплекс;

ПК – програмний комплекс;

КПП – комплекс прикладних програм;

МБІ – метод блочних ітерацій.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Необхідність вивчення характеру напружено-деформованого стану криволінійних неоднорідних призматичних тіл призводить до розв'язання складних просторових задач термопружності та термопластичності як при малих, так і великих пластичних деформаціях.

Великий внесок у розробку теорії пластичності та термопластичності як за малих, так і за великих пластичних деформацій.

Великий внесок у розробку теорії пластичності та термопластичності зробили праці Бобиря, Біргера, Ілюшина, Качанова, Ковальчука, Коротких, Новожилова, Прагера, Соколовського, Шевченка та ін. [20, 21, 41, 118, 122, 124-126, 128-131, 133, 136-138, 141-145, 147, 159, 160, 162-164, 166-170]. Розвиток теорії пластичності на випадок великих деформацій та успіхи в галузі дослідження процесів пластичного формозміни пов'язані з роботами Амандосова, Баженова, Горлача, Гуляра, Кукоджанова, Левитаса, Малініна, Lee [9, 10-12, 33, 72, 80, 139-140]. У більшості випадків розгляд пружно-пластичного деформування просторових об'єктів як при малих, так і при великих пластичних деформаціях, пов'язаний із значними математичними та експериментальними труднощами. Такі дослідження найбільше доцільно проводити на основі залучення чисельних методів.

Широке коло питань, що належать до вдосконалення сучасних чисельних методів, знайшло відображення в дослідженнях [1-8, 23, 31, 39, 40, 44, 45, 55, 67, 91, 93, 101-103, 148, 181-184]. Найбільшого поширення при аналізі напружено-деформованого стану просторових конструкцій набув методом скінчених елементів (МСЕ). Його розвитку та вдосконаленню присвячені багато праць вітчизняних та зарубіжних авторів [22, 25, 26, 38, 53, 57, 78-84, 87, 100, 114, 149, 191, 186-188, 190]. У цих роботах розглянуто важливі теоретичні аспекти МСЕ щодо розробки спеціальних типів скінчених елементів, обґрунтування методики виведення матриці жорсткості, створення підходів до розв'язання нових класів задач механіки.

Однак, при розгляді складних просторових задач МСЕ має дуже обмежені можливості, що пов'язано з нестачею ресурсів ПК. Ці труднощі проявляються в першу чергу при необхідності ускладнення постановки задачі, наприклад, у разі коли потрібно враховувати пластичні деформації та залежність зміни фізико-механічних властивостей матеріалу від температури. Так, незважаючи на значну кількість публікацій, присвячених рішенням на базі МСЕ просторових задач термопластичності [18, 19, 24, 27, 34, 46, 48, 52, 54, 69, 86, 94-96], більшість авторів розглядають призматичні тіла досить простої геометрії. Дослідження процесів формозміни, що супроводжуються великими пластичними деформаціями та осесиметричною постановкою [50, 51, 68, 73, 88-90, 97, 104, 107, 119-121]. Тільки останніми роками з'явилася обмежена кількість робіт, що стосуються застосування МСЕ до аналізу формозміни тривимірних об'єктів [135, 178].

Значно розширити можливості МСЕ на дослідження просторових тіл дозволив його напіваналітичний варіант [14, 16, 70, 71]. Суть НМСЕ полягає у поєднанні скінченно-елементної дискретизації в площині одного з перерізу тіла з розкладанням у ряд за безперервними, гладкими базисними функціями вздовж третьої координати.

Відомі два підходи побудови систем розв'язувальних рівнянь НМСЕ, перший з яких запропонований [109, 110] і забезпечує приведення просторової задачі теорії пружності до системи управлінь алгебри. Напіваналітичний варіант МСЕ в диференціальному формулюванні [123, 134] на відміну від традиційного МСЕ передбачає розв'язання систем диференціальних рівнянь для стовпчастих СЕ. Проте більшість робіт, пов'язаних з розвитком НМСЕ, відносяться до першого напрямку.

Традиційно НМСЕ застосовується при розгляді однорідних осесиметричних об'єктів, оскільки в цьому випадку досягається його найбільша ефективність за рахунок зведення вихідного просторової задачі до ряду двовимірних. Розвитку теоретичних положень методу та його практичної реалізації в рамках виділених класів задач присвячено низку досліджень

радянських та зарубіжних авторів [117, 132]. У більшості зазначених робіт наведено результат чисельного дослідження тонкостінних осесиметричних оболонок в пружній постановці. Питання, що стосуються розвитку НМСЕ на складніші класи об'єктів у рамках вісесиметричного підходу, розглянуті в публікаціях [29, 35, 36, 47, 49, 56, 58, 60, 62-66, 77, 171]. Випадок неоднорідності властивостей матеріалу оболонки вздовж окружної координати, обумовлених тепловими впливами та пластичним деформуванням, досліджено в [92, 156-158]. Методика аналізу циклічно неоднорідних оболонок розглянута у публікації [85]. Дослідження потужних вісесиметричних об'єктів у межах пружного розрахунку з урахуванням НМСЕ наведено у роботах [116, 177].

Пружно-пластичному деформуванню тіл обертання присвячено ряд статей [13, 15, 175, 189], а в [76] вирішено задачі термопластичності з урахуванням залежності фізико-механічних параметрів від температури.

Реалізація в рамках НМСЕ підходу, що дозволяє з єдиних позицій досліджувати тонкостінні та масивні вісесиметричні об'єкти в пружній та пружно-пластичній постановці запропонована в [68]. Основні принципи узагальнення даної модифікації НМСЕ на розв'язання задач пружного та пружно-пластичного деформування циклічних об'єктів із змінними вздовж окружної координати фізичними та геометричними параметрами викладено в [71]. Розвитку та реалізації запропонованої методики стосовно розв'язання задач термопружності та термопластичності для неоднорідних тіл обертання присвячені роботи [16, 17]. Об'єкти з циклічно змінною геометрією розглянуті у [14].

Незважаючи на те, що напіваналітичний метод скінчених елементів отримав досить широкий розвиток при розгляді пружного деформування призматичних у плані оболонок і пластин [105, 106, 109, 111, 117, 165, 176], його застосування до більш складних класів призматичних об'єктів обмежено. Питання докладання НМСЕ до розрахунку складних конструкцій та пластин на пружній підставі викладені в [74, 112]. Дослідження оболонок і пластин у геометрично нелінійній постановці виконано в [42]. Неоднорідність

властивостей матеріалу, викликана фізичною нелінійністю, врахована у роботі [37].

Ще менше публікацій присвячено дослідженню НМСЕ масивних призматичних об'єктів. Розв'язання в рамках єдиного підходу задач пружного та пружно-пластичного деформування прямолінійних призматичних тіл як масивних, так і тонкостінних наведено в роботі [75]. Слід зазначити, що у всіх розглянутих раніше публікаціях як координатні використовуються системи функцій, що дозволяють моделювати лише часті види граничних умов на торцях призматичних конструкцій. Розвитку напіваналітичного методу для розрахунку масивних і тонкостінних призматичних тіл з постійними вздовж координати розкладання фізичними умовами на торцях присвячені публікації [111, 112].

Як показує аналіз літературних джерел, в даний час задач термопружнопластичності і формозміна для криволінійних неоднорідних призматичних теля Так, застосування традиційного МСЕ до розгляду виділеного класу задачі в силу своєї трудомісткості дозволяє вирішувати задачі термопластичності, розмірність яких не перевищує 4000-6 1000 невідомих. Напіваналітичний метод скінчених елементів ефективності перевершує його традиційний варіант, проте дослідження НМСЕ призматичних тіл обмежується однорідними прямолінійними об'єктами. Застосування відомих раніше методик НМСЕ до розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних тіл не є можливим, оскільки необхідність урахування зміни геометрії та фізико-механічних властивостей матеріалу призводить до суттєвого ускладнення розв'язувальних управлінь. Існуючі методики для однорідних призматичних задач, розгляд термопружнопластичних процесів та процесів формозміни, що супроводжуються великими пластичними деформаціями, досі НМСЕ не проводилося.

Мета роботи полягає у створенні на основі напіваналітичного методу скінчених елементів ефективною методикою чисельного дослідження напружено-деформованого стану масивних і тонкостінних доволно навантажених криволінійних неоднорідних тіл з урахуванням залежності характеристик

матеріалу від температури, його пластичних матеріалів від температури, його пластичних властивостей, а такі можливості виникнення великих пластичних деформацій та деформацій повзучості та розв'язання на цій основі нових складних задач, що становлять практичний інтерес.

Реалізація просторової мети здійснюється шляхом послідовного розв'язання наступних основних задач:

- виведення матриці жорсткості та управлінь рівноваги криволінійного призматичного скінченого елемента;
- побудова рівнянь рівноваги, дозволяють розглядати процеси деформування з урахуванням великих пластичних деформацій;
- розробка та дослідження ефективних алгоритмів розв'язання лінійних та нелінійних задач з урахуванням деформацій пластичності та повзучості;
- створення на основі отриманих співвідношень та алгоритмів обчислювального комплексу, що відповідає сучасним вимогам до програмного забезпечення простих розрахунків;
- апробація розробленої методики та реалізація її комплексу на контрольних та тестових задачах;
- чисельне дослідження напружено-деформованого стану реальних, що застосовуються у різних галузях техніки.

При побудові розв'язувальних управлінь НМСЕ як вихідні прийняті співвідношення теорії пружності прямокутної декартової системі координат. Оскільки передбачалося моделювати процеси деформування як із малих, і великих пластичних деформаціях, і навіть за наявності деформацій повзучості, особливе значення має питання зв'язку напружень і деформацій поза пружності. У відомих публікаціях для описів поведінки матеріалу за пружністю використовується деформаційна теорія [14], теорія пластичного течії [68], теорія, що описує процеси деформування по траєкторіях середньої кривизни [16].

У цій роботі для опису процесу пружно-пластичного деформування використовується теорія течії для ізотропно зміцнюється матеріалу, оскільки в рамках від простого. При виникненні деформацій повзучості рівняння стану

прийняті відповідно до теорії зміцнення, що справедливо при виконанні умови дециці кривизни деформування [28]. Вибір теорії зміцнення матеріалу при реальних процесах навантаження, ніж теорії старіння та течії [83].

При великих пластичних деформаціях визначальні співвідношення мають бути об'єктивними, тобто не залежати від накладання жорстких рухів або заміни системи відліку. Отже, під час виборів заходів деформацій і напружень, і навіть їх похідних за часом необхідно враховувати вимогу індеферентності [59]. У цьому роботі як міри деформацій використовується міра Фингера, як міри напружень – тензор істинних напружень Коші [115]. Однак, відповідні заходи швидкості деформацій та швидкості зміни напруженого стану не є індеферентними. Для усунення необ'єктивності застосовується похідна олддріда, індеферентність який показана в [68].

У цій роботі рівняння стану будуються для ізотропного пружнопластичного середовища при малих пружних та великих пластичних деформаціях. Як показано в [68] у цьому випадку відрізняється між застосуванням теорії скінчених пружно-пластичних деформацій і підходом, в якому на кожному кроці за часом використовують теорію течії при малих деформаціях, полягає в заміні у визначальних співвідношеннях матеріальних похідних на об'єктивні.

Орієнтація на дослідження з єдиних позицій масивних та тонкостінних конструкцій потребує розробки універсального скінченого елемента. Ефективність застосування універсальних скінчених елементів визначається формою SE, законом розподілу переміщень та методики виведення матриці жорсткості.

Використання як універсального SE елемента трикутного поперечного перерізу небажано, оскільки такі SE в задачах вигину значно поступаються чотирикутним [14]. У тонкостінних об'єктах переміщення за товщиною розподіляється за лінійним законом. У зв'язку з цим оптимальним слід вважати універсальний скінчений призматичний елемент з білінійним законом заповнення переміщень в площині поперечного перерізу. Виведення матриці

жорсткості неоднорідного криволінійного скінченного елемента виконано відповідно до методики МССЕ [65, 73]. Такий підхід дозволяє значно поліпшити збіжність результатів, а при розрахунку тонкостінних конструкцій ефективності не поступається спеціальним оболонковим СЕ [74]. Крім того, застосування МССЕ дозволяє задовольняти зміщення елемента як жорсткого цілого, що є необхідним при моделюванні процесів формозміни.

Для призматичних тіл із змінними фізико-механічними та геометричними параметрами матриця системи розв'язувальних рівнянь є повністю заповненою і знизити розмірність задачі не вдається. Обумовленість матриці системи розв'язувальних рівнянь НМССЕ залежить від раціонального вибору системи координатних функцій. Досягти високої ефективності методу можна лише, забезпечивши переважання діагональних елементів.

У більшості робіт, присвячених застосуванню НМССЕ до розрахунку призматичних об'єктів як базисні, як правило, застосовуються тригонометричні [105, 106, 108] та балкові функції [14, 16]. Є публікації, в яких запропоновано використовувати сплайнову апроксимацію [113, 146, 180] або розкладання в ряд за поліномами [49, 53]. Балкові функції, поліноми Хорві [127], а також деякі види тригонометричних розкладів, наприклад, запропоновані Філоненко-Бородичем [72] орієнтовані на розрахунок лише тонкостінних об'єктів. Вони, будучи ортогональними, не мають властивість повноти в енергетичному просторі оператора теорії пружності і не можуть бути використані при побудові розв'язувальних співвідношень універсального скінченного елемента, орієнтованого на розрахунок масивних і тонкостінних тіл. Використання апроксимації переміщень відрізками ряду Фур'є 28 забезпечує прямолінійних призматичних тіл повний поділ змінних, проте така система координатних функцій дозволяє моделювати граничні умови тільки приватного виду. Оскільки передбачається розглядати криволінійні неоднорідні тіла з довільними граничними умовами, у роботі прийнято систему базисних функцій [72], перші два члени якої є поліномами Лангранжа нульового і першого порядку, інші – поліномами Міхліна [68]. Такий підхід дозволяє задовольняти довільні граничні

умови традиційним для МСЕ способом, що полягає у виключенні відповідних рівнянь.

Від правильного вибору алгоритму розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь залежить ефективність застосування НМСЕ до розв'язання просторових задач. У роботах [1, 2, 19, 21, 54, 77, 161] міститься огляд літератури за методами розв'язання МСЕ нелінійних задач. Аналіз основних показників, таких як забезпечення точності розв'язків та обчислювальні витрати, показує, що найбільш ефективними є комбіновані алгоритми, що базуються на поєднанні крокових та ітераційних методів. Для матриць систем дозволяють рівнянь НМСЕ характерна блокова структура. Для розв'язання систем з такою матрицею найбільше природно застосовувати метод блокових ітерацій. При розгляді фізично та геометрично нелінійних задач розв'язання здійснювалося кроковим методом інтегрування за параметром у поєднанні з МБІ.

Можливості чисельного дослідження просторових об'єктів складної форми значною мірою визначаються раціональною організацією обчислювального комплексу. Застосування комплексів, орієнтованих розв'язання просторових задач для тіл загального виду до розгляду приватних класів об'єктів, представляється нераціональним.

Одним із ефективних обчислювальних комплексів, що реалізують співвідношення МСЕ, є система «Міцність» [72], основні принципи побудови якої використані в цій роботі при організації пакета прикладних програм «PRIZ», орієнтованого на дослідження криволінійних неоднорідних призматичних тіл у фізично та геометрично нелінійній постановці.

Об'єктом дослідження є фізично і геометрично нелінійні процеси деформування деталей машинобудування.

Предметом дослідження є параметри фізично і геометрично нелінійного деформування, термопружні та термопластичні деформації, напруження, переміщення.

Методи досліджень. Для дискретизації об'єктів використовується метод скінченних елементів та напіваналітичний метод скінчених елементів.

Визначення напружено-деформованого стану базується на основні класичних співвідношень будівельної механіки, механіки суцільних середовищ.

Наукова новизна роботи полягає у створенні на основі МССЕ та НМСЕ ефективної методики чисельного розв'язання задач термопружності та термопластичності для довільно навантажених масивних та тонкостінних просторових призматичних тіл із змінними фізико-механічними та геометричними характеристиками. Розроблений підхід розвинений стосовно дослідження напружено-деформованого стану об'єктів з урахуванням великих пластичних деформацій і деформацій повзучості. Вирішено низку нових складних задач пружно-пластичного деформування криволінійних неоднорідних призматичних тіл при термомеханічних впливах.

Достовірність результатів, отриманих на основі розробленої методики, підтверджена шляхом їх порівняння з аналітичними, експериментальними та чисельними даними інших авторів для значної кількості контрольних задач. При розрахунку реальних конструкцій проводилися дослідження збіжності результатів залежно від кількості скінчених елементів і членів розкладання, що утримуються, від величини кроку за параметром, від точності розв'язання систем лінійних рівнянь, а також перевірялася точність задоволення природним граничним умовам.

Практична цінність дисертації полягає в тому, що розроблена методика реалізована у вигляді комплексу програм та може бути використана у проектно-конструкторській практиці при аналізі напружено-деформованого стану криволінійних призматичних конструкцій з урахуванням залежності характеристик матеріалу від температури, великих пластичних деформацій та деформацій повзучості. Широкі можливості застосування методики та програм ілюструються розв'язанням низки складних прикладних задач.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи представлені та обговорені на наступних наукових конференціях (конгресах, симпозіумах, семінарах тощо):

- III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» – К.: КНУБА., 25-25.09.2021;
- IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023;
- Materiály XX Mezinárodní vědecko - praktická konference «Věda a technologie: krok do budoucnosti», Volume 4 : Praha. 2023.
- Scientific progress: innovations, achievements and prospects. Proceedings of the 6th International scientific and practical conference. MDPC Publishing. Munich, Germany. 2023.
- Modern research in science and education. Proceedings of the 2nd International scientific and practical conference. BoScience Publisher. Chicago, USA. 2023.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 158 сторінки, у тому числі, основна частина складає 121 сторінок. Основна частина, крім тексту, включає таблиці, рисунки, формули.

Робота виконана на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури під керівництвом кандидата технічних наук, доцента Козака Андрія Анатолійовича.

Подяка. Висловлюю глибоку подяку науковому керівнику – кандидату технічних наук, доценту Козаку Андрію Анатолійовичу. Окремо хочу подякувати завідувачу кафедри будівельної механіки КНУБА, директору НДІБМ КНУБА, доктору технічних наук, професору Лізунову Петру Петровичу за настанови, всебічну підтримку та сприяння. Також завдячую всьому колективу кафедри будівельної механіки та НДІ БМ за неоціненну допомогу при написанні дисертаційної роботи.

З глибоким сумом та скорботою хочу згадати своїх наукових керівників з якими розпочинав роботу над дисертацією доктора технічних наук, професора

Баженова Віктора Андрійовича та кандидата технічних наук, старшого наукового співробітника Ворону Юрія Володимировича.

РОЗДІЛ 1.

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ФІЗИЧНО І ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

При розробці нових типів СЕ в рамках НМСЕ, основним фактором для досягнення високої ефективності їх використання являється вибір системи координатних функцій і методики виведення матриці жорсткості. Апроксимація переміщень вздовж координати розкладу виконувалась змішаною системою координатних функцій, перші два члена, які належать поліномам Лагранжа, а інші – Міхліна. На основі високо ефективною МССЕ побудовані розв'язувальні співвідношення для криволінійних неоднорідних призматичних тіл.

1.1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності, пластичності і повзучості

Розглянемо криволінійне призматичне тіло складної форми (рис.1.1.) з перемінними геометричними і фізичними характеристиками в базисній системі координат $z^{i'}$. Вона використовується для опису граничних умов, зовнішніх впливів і конфігурації об'єкта. На рисунку показана також місцева криволінійна система координат x^i , яка зв'язана з його геометрією.

Нехай у кожній точці тіла відомий тензор перетворення, який визначає зв'язок між місцевою і базисною системою координат:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j} \quad (1.1)$$

Індекси, приймають значення 1, 2, 3, тут і в подальшому, позначення латинськими літерами, індекси, приймають значення 1, 2- грецькими.

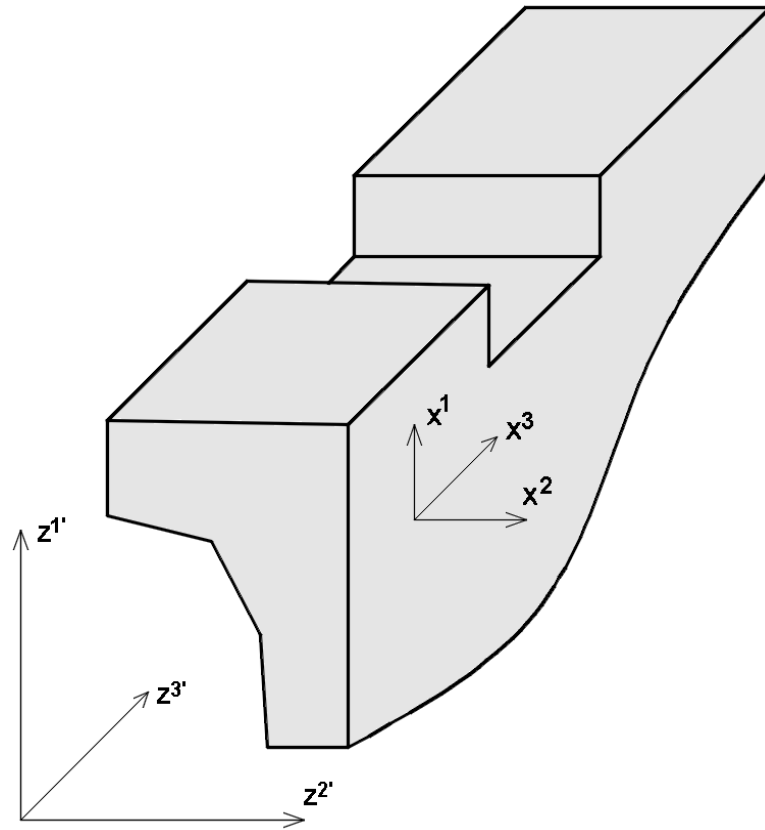


Рис. 1.1. Криволінійне призматичне тіло складної форми.

Коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат представимо через коваріантні компоненти метричного тензора базисної системи координат:

$$g_{ij} = z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} g_{mn} \quad (1.2)$$

Для дослідження призматичних тіл в якості базисної найбільше доцільно використовувати декартову систему координат. В цьому випадку відмінні від нуля три компоненти метричного тензора:

$$g_{1'1'} = 1, \quad g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = 1 \quad (1.3)$$

Тоді коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат визначаються по формулі:

$$g_{ij} = z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \quad (1.4)$$

Контрваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат знаходимо, використовуючи наступне співвідношення:

$$g^{ij} = \frac{A(g^{ij})}{g} \quad (1.5)$$

де $A(g^{ij})$ - алгебраїчне доповнення елемента в матриці, складеної з коваріантних компонент метричного тензора, $g = \det(g_{ij})$ - його визначник.

Зв'язок між компонентами тензора деформацій і переміщень в місцевій системі координат представляється у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k \quad (1.6)$$

де Γ_{ij}^k – символи Крістофеля другого роду.

В базисній декартовій системі координат символи Крістофеля дорівнюють нулю, а переміщення в місцевій і базисній системі координат зв'язані співвідношеннями:

$$u_k = u_{m'} z_{,k}^{m'} \quad (1.7)$$

На основі формул (6) і (7) отримаємо вираз компонент тензора деформацій в місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{m',i} z_{,j}^{m'} + u_{m',j} z_{,i}^{m'} \right) \quad (1.8)$$

В задачах термопружності компоненти тензора повної деформації дорівнює сумі пружних та температурних складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T \quad (1.9)$$

де $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T T g_{ij}$, α_T - коефіцієнт температурного розширення.

Компоненти тензора напружень в пружній області навантаження через компоненти тензора деформацій у відповідності із законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijmn} \varepsilon_{mn}^e \quad (1.11)$$

або з урахуванням (1.7)

$$\sigma^{ij} = C^{ijmn} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^T) \quad (1.12)$$

Компоненти тензора пружності постійних для ізотропних тіл знаходимо із співвідношень:

$$C^{ijmn} = \lambda g^{mn} g^{ij} + \mu (g^{mi} g^{nj} + g^{mj} g^{ni}) \quad (13)$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i'}, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i'}, T)$, що залежать від температури T :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.14)$$

Для опису процесу деформування за границею пружності матеріалу, фізичні властивості якого залежать від температури, використаємо теорію пластичної течії [30, 72].

Матеріал тіла, однорідний і ізотропний у вихідному стані пластично нестиснуваний і зміна його об'єму являється лінійно-пружним:

$$d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e \quad (1.15)$$

Повний приріст деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних, пластичних і температурних складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^T \quad (1.16)$$

Пружні деформації зв'язані з напруженням закону Гука (1.11). Область пружних деформацій обмежується в просторі напружень поверхністю текучості:

$$f_p(\sigma^{ij}, \chi, T) = 0 \quad (1.17)$$

У відповідності із гіпотезою ізотропного зміцнення при умовах текучості Мізеса рівняння поверхні текучості мають вигляд:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2(\chi, T) = 0 \quad (1.18)$$

де $\tau_s(\chi, T)$ - межа текучості при чистому зсуві, χ - параметр зміцнення Одвіста:

$$\chi = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_p^{ij} \quad (1.19)$$

Компоненти дівіатора напружень, що входять у вираз (1.18), визначають по формулі:

$$s^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \sigma^{mn} g^{ij} \quad (1.20)$$

Дівіатор напружень зв'язаний з приростом пластичних деформацій у відповідності з асоційованим законом пластичної течії:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij} \quad (1.21)$$

При наявності деформацій повзучості рівняння стану прийняті у відповідності з теорією спочнення [72].

В такому випадку передбачається, що повні прирости деформацій визначаються як сума чотирьох складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c \quad (1.22)$$

Рівняння поверхні повзучості має вигляд:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_c^2(\psi, T, \varepsilon_i) = 0 \quad (1.23)$$

Границя повзучості визначається по формулі:

$$\tau_c = \left[\frac{\varepsilon_i^c}{\alpha} (\psi)^\beta \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (1.23)$$

де α , β , γ – компоненти, які залежать від температури; ψ – параметр зміцнення:

$$\psi = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon_c^{ij} \quad (1.24)$$

Приріст деформацій повзучості знаходимо по компонентам дівіатора напружень:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s_{ij}} = \lambda_c s_{ij} \quad (1.25)$$

1.2. Криволінійний неоднорідний призматичний скінчений елемент

Для дослідження призматичних тіл зі змінними геометричними і фізичними характеристиками розроблений скінчений елемент у вигляді криволінійної призми (рис. 1.2).

У місцевій системі координат елемент являє собою прямокутний паралелепіпед, поперечний переріз якого - квадрат з одиничними сторонами, а довжина дорівнює двом. Уздовж осі елемента x^3 розташована деяка кількість точок інтегрування K_i ($i=1,2,\dots,L$), положення яких визначено відповідно до вимог формули інтегрування Гауса. Значення координат вузлів задаються в базисній системі координат для перерізів, які при переході до місцевої системи відображаються на площині $x^i = \text{const}$, що проходять через K_i .

У площині поперечного перерізу елемента переміщення розподіляються згідно білінійну закону:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (1.26)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}$ – значення вузлових компонент вектора переміщень; S_1 і S_2 – подвоєні координати вузлів в напрямках x^1 і x^2 .

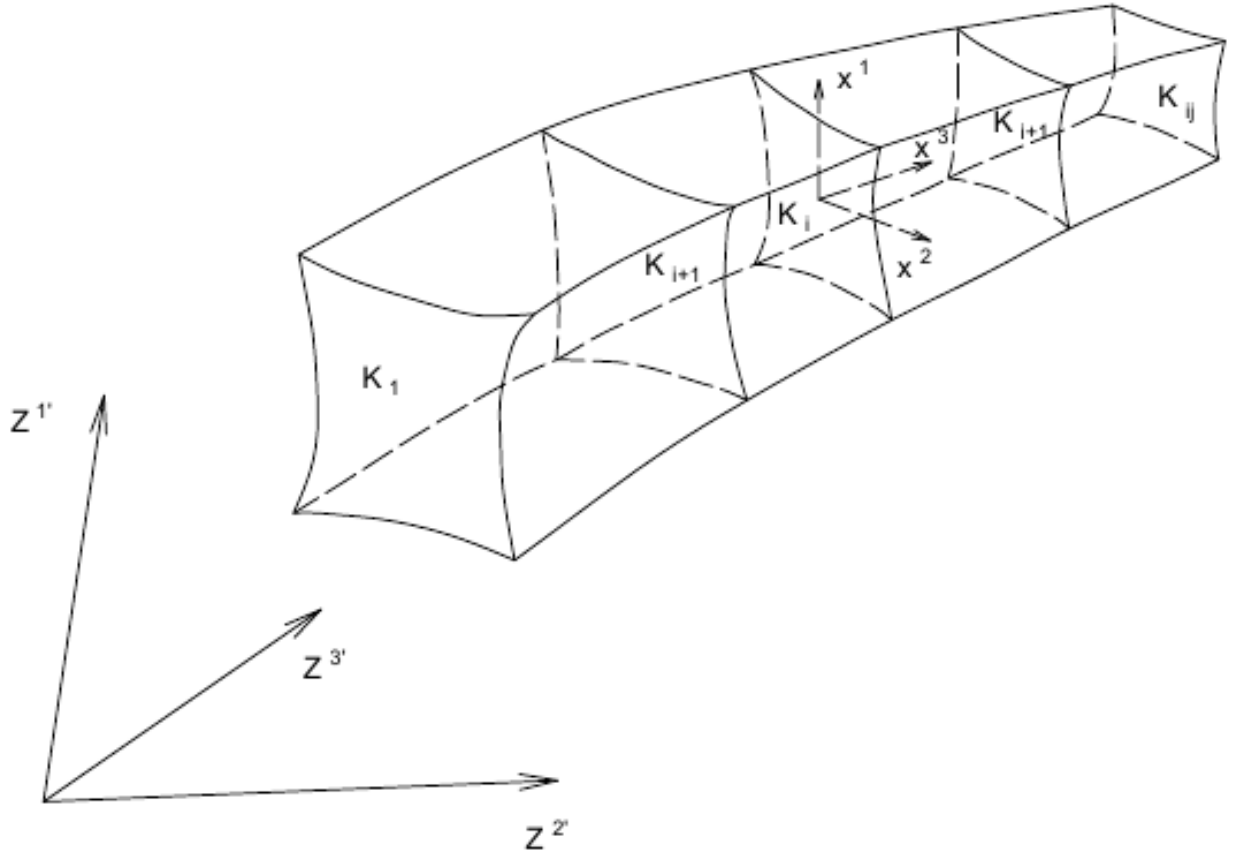


Рис.1.2. Криволінійний неоднорідний призматичний скінчений елемент

У відповідності з прийнятим законом (1.26), знаходимо переміщення і їх похідні в центрі елемента:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{m'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2), \\
 \dot{u}_{m',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2) S_\alpha, \\
 \dot{u}_{m',3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2),_{3}, \\
 \dot{u}_{m',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2) S_1 S_2, \\
 \dot{u}_{m',3\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2),_{3} S_\alpha,
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

В напрямку x^3 вузлові переміщення апроксимуються розкладанням виду:

$$u_{m'}(s_1 s_2) = \sum_{l=0}^L u_{m'l}(s_1 s_2) \varphi^l, \quad (1.28)$$

де через $u_{m'l}(s_1 s_2)$ позначені коефіцієнти розкладу переміщень в ряд по координатним функціям φ^l .

Для температур також прийнято білінійний закон розподілу в межах поперечного перерізу елемента:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (1.29)$$

Значення температури і їх похідні в центрі перерізу отримуємо аналогічно (1.27):

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}, \\ \dot{T}_{,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

Компоненти тензора пружних постійних і визначника матриці, складеного з компонентів матричного тензора, мало змінюються в межах поперечного перерізу елемента і прийняті рівними їх значенням в центрі перерізу:

$$c^{ijmn} \approx \dot{c}^{ijmn}, \quad g \approx \dot{g}, \quad (1.31)$$

де $g = \det[g]$, $\dot{g} = \det[\dot{g}]$.

Таке припущення дозволяє скоротити об'єм розрахунків, не зменшуючи точність розв'язання [33].

Виходячи з основних положень моментної схеми скінчених елементів [68], представимо складові тензора повної деформації відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \varepsilon_{12} &= \dot{\varepsilon}_{12}, \\ \varepsilon_{3\alpha} &= \dot{\varepsilon}_{3\alpha} + \dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \varepsilon_{33} &= \dot{\varepsilon}_{33} + \dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)} x^{(\alpha)},\end{aligned}\tag{1.32}$$

де $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}|_{x^\alpha=0}$, $\varepsilon_{ij,\alpha} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dx^\alpha}|_{x^\alpha=0}$ ($\alpha \neq i, j$).

Коефіцієнтом розкладу $\frac{d^2\varepsilon_{33}}{dx'dx^2}$ нехтуємо як величиною вищого порядку малості.

Враховуючи введені раніше припущення про постійність компонент тензора пружних констант і визначника матриці, складеного із компонент матричного тензора, можна представити напруження через коефіцієнти розкладу їх в ряд Маклорена

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha(\alpha)} &= \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \sigma^{12} &= \dot{\sigma}^{12}, \\ \sigma^{3\alpha} &= \dot{\sigma}^{3\alpha} + \dot{\sigma}^{3(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \sigma^{33} &= \dot{\sigma}^{33} + \dot{\sigma}^{33}_{,(\alpha)} x^{(\alpha)}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Членом $\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,\alpha}$ нехтуємо, оскільки він не дає внесок в енергію деформації елемента.

Коефіцієнти розкладу компонент тензора повної деформації в ряд Маклорена виразимо через умовні значення вектора переміщень в центрі елемента у відповідності з (1.8):

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \dot{z}_{,\alpha}^{m'} \dot{u}_{m',\alpha}, \\
\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \dot{z}_{,12}^{m'} \dot{u}_{m',\alpha} + \dot{z}_{,\alpha}^{m'} \dot{u}_{m',12}, \\
\dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} (\dot{z}_{,1}^{m'} \dot{u}_{m',2} + \dot{z}_{,2}^{m'} \dot{u}_{m',1}), \\
\dot{\varepsilon}_{3\alpha} &= \frac{1}{2} (\dot{z}_{,\alpha}^{m'} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}_{,3}^{m'} \dot{u}_{m',\alpha}), \\
\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} (\dot{z}_{,12}^{m'} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}_{,\alpha}^{m'} \dot{u}_{m',3(3-\alpha)} + \dot{z}_{,3}^{m'} \dot{u}_{m',\alpha(3-\alpha)} + \dot{z}_{,3(3-\alpha)}^{m'} \dot{u}_{m',\alpha}), \\
\dot{\varepsilon}_{33} &= \dot{z}_{,3}^{m'} \dot{u}_{m',3}, \\
\dot{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \dot{z}_{,3\alpha}^{m'} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}_{,3}^{m'} \dot{u}_{m',3\alpha},
\end{aligned} \tag{1.34}$$

де $\dot{z}_{,j}^{m'} = z_{,j}^{m'}|_{x^\alpha=0}$, $\dot{z}_{,j}^{m'} = \frac{dz_{,i}^{m'}}{dx^j}|_{x^\alpha=0}$ ($\alpha \neq i, j$).

Взявши до уваги те, що переміщення і їх похідні в центрі поперечного перерізу елемента знаходяться відповідно (1.27), відношення (1.34) запишемо через вузлові значення вектора переміщень:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} S_\alpha \dot{z}_{,\alpha}^{m'}, \\
\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} (2 S_1 S_2 \dot{z}_{,\alpha}^{m'} + S_\alpha \dot{z}_{,12}^{m'}), \\
\dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} (S_1 \dot{z}_{,2}^{m'} + S_2 \dot{z}_{,1}^{m'}), \\
\dot{\varepsilon}_{3\alpha} &= \frac{1}{8} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} 2 u_{m'(S_1 S_2)} S_\alpha \dot{z}_{,3}^{m'} + u_{m'(S_1 S_2),3} \dot{z}_{,3}^{m'}, \\
\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{1}{8} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} 2 u_{m'(S_1 S_2)} (2 \dot{z}_{,3}^{m'} S_1 S_2 + S_\alpha \dot{z}_{,3(3-\alpha)}^{m'}) \\
&\quad + u_{m'(S_1 S_2),3} (2 S_{(3-\alpha)} \dot{z}_{,\alpha}^{m'} + \dot{z}_{,12}^{m'}), \\
\dot{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2),3} \dot{z}_{,3}^{m'},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2),3} (\dot{z}_{,3\alpha}^{m'} + 2S_\alpha \dot{z}_{,3}^{m'}).$$

Використовуючи розкладання вузлових переміщень в напрямках x^3 в ряд по координатним функціям (1.28), отримуємо наступні формули для коефіцієнтів розкладання повних деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi^l S_\alpha \dot{z}_{,\alpha}^{m'}, \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha).(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi^l (2S_1 S_2 \dot{z}_{,\alpha}^{m'} + S_\alpha \dot{z}_{,12}^{m'}), \quad (1.36) \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 2u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi^l (S_1 \dot{z}_{,2}^{m'} + S_2 \dot{z}_{,1}^{m'}), \\ \dot{\varepsilon}_{3\alpha} &= \frac{1}{8} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 2u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi^l S_\alpha \dot{z}_{,3}^{m'} + u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi_{,3}^1 \dot{z}_{,\alpha}^{m'}, \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha).(3-\alpha)} &= \frac{1}{8} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 2u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi^l (2\dot{z}_{,3}^{m'} S_1 S_2 + S_\alpha \dot{z}_{,3(3-\alpha)}^{m'}) \\ &\quad + u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi_{,3}^1 (2S_{(3-\alpha)} \dot{z}_{,\alpha}^{m'+} + \dot{z}_{,12}^{m'}), \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi_{,3}^1 \dot{z}_{,3}^{m'}, \\ \dot{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^4 u_{m'l(S_1 S_2)} \varphi_{,3}^1 (\dot{z}_{,3\alpha}^{m'} + 2S_\alpha \dot{z}_{,3}^{m'}), \end{aligned}$$

де $\varphi_{,3}^1 = \frac{d\varphi^2}{dx^3}$.

1.3. Вектор вузлових реакцій і матриця жорсткості скінчений елемент

Процес деформування просторових тіл описується у відповідності з варіаційним принципом можливих переміщень. Об'єкт апроксимується системою із M скінчених елементів, рівняння рівноваги якої має вигляд:

$$\sum_{m=1}^M \delta W_m - \delta A_m = 0. \quad (1.37)$$

Запишемо вираз варіації енергії деформації одного кінцевого елемента:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.38)$$

Використовуючи представлення компонент тензорів напружень і деформацій відрізками Маклорена (1.32), (1.33), отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left(\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \dot{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \\ & + \left(\dot{\sigma}^{33} + \dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)} x^{(\alpha)} \right) + 2 \left(\dot{\sigma}^{3\alpha} + \dot{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{3\alpha} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\dot{\varepsilon}_{3\alpha} + \dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \\ & + 2 \dot{\sigma}^{12} \delta \dot{\varepsilon}_{12} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Проінтегруємо вираз (1.39) в області поперечного перерізу згідно з формулами:

$$\begin{aligned}
\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 &= 1, & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 &= 0, & (1.40) \\
\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 &= \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}
\end{aligned}$$

Після інтегрування маємо:

$$\begin{aligned}
\delta W = \int_{-1}^1 \left(\dot{\sigma}^{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 (\dot{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \dot{\sigma}_{,(\alpha)}^{33} \delta \dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)} + \right. \\
\left. + 2 \dot{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{3(\alpha)} \delta \dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)}) \right) \sqrt{g} dx^3, & (1.41)
\end{aligned}$$

Для зручності подальших записів перейдемо до матричної форми запису:

$$\delta W = \int_{-1}^1 ((\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T)\{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 (\delta\{\dot{\varepsilon}\}_{,1}^T)\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \sqrt{g} dx^3, \quad (1.42)$$

Де

$$\begin{aligned}
\{\dot{\varepsilon}\}^T &= \{\dot{\varepsilon}_{11} \dot{\varepsilon}_{12} \dot{\varepsilon}_{22} \dot{\varepsilon}_{23} \dot{\varepsilon}_{31} \dot{\varepsilon}_{33}\}^T, \\
\{\dot{\varepsilon}\}_{,1}^T &= \{\dot{\varepsilon}_{22,1} \quad \dot{\varepsilon}_{23,1} \quad \dot{\varepsilon}_{33,1}\}^T, \\
\{\dot{\varepsilon}\}_{,2}^T &= \{\dot{\varepsilon}_{11,2} \quad \dot{\varepsilon}_{31,2} \quad \dot{\varepsilon}_{33,2}\}^T,
\end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned}
\{\dot{\sigma}\}^T &= \{\dot{\sigma}^{11} \dot{\sigma}^{12} \dot{\sigma}^{22} \dot{\sigma}^{23} \dot{\sigma}^{31} \dot{\sigma}^{33}\}^T, \\
\{\dot{\sigma}\}_{,1}^T &= \{\sigma_{,1}^{22} \quad \sigma_{,1}^{23} \quad \sigma_{,1}^{33}\}^T, \\
\{\dot{\sigma}\}_{,2}^T &= \{\sigma_{,2}^{22} \quad \sigma_{,2}^{23} \quad \sigma_{,2}^{33}\}^T,
\end{aligned} \quad (1.44)$$

Запишемо компоненти векторів $\{\dot{\varepsilon}\}$ і $\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}$ через компоненти вектора коефіцієнтів розкладання вузлових переміщень по координатним функціям $\{u_l\}$, згідно (1.36):

$$\begin{aligned}\{\dot{\varepsilon}\} &= \sum_{l=0}^4 \left([E]\varphi^{(l)} + [F]\varphi_{,3}^{(l)} \right) \{u_l\}, \\ \{\dot{\varepsilon}\}^T_{,\alpha} &= \sum_{l=0}^4 \left([E]\varphi^{(l)} + [F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)} \right) \{u_l\},\end{aligned}\quad (1.45)$$

де

$$\{u_l\}^T = \left\{ \{u_{m'(-1,-1)}\} \{u_{m'(-1,1)}\} \{u_{m'(1,-1)}\} \{u_{m'(1,1)}\} \right\}^T, \quad (1.46)$$

$m = 1, 2, 3$

Компоненти матриць $[E]$, $[F]$, $[E]_{,\alpha}$, $[F]_{,\alpha}$ знаходяться відповідно відношенням (1.36).

Варіацію енергії деформації кінцевого елемента (1.42) зобразимо з врахуванням (1.45):

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^4 (\delta\{u_l\}^T ([E]^T \varphi^{(l)} + [F]^T \varphi_{,3}^{(l)}) \{\delta\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \delta\{u_l\}^T ([E]_{,\alpha}^T \varphi^{(l)} + \\ &\quad + [F]_{,\alpha}^T \varphi_{,3}^{(l)}) \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \sqrt{g} dx^3.\end{aligned}\quad (1.47)$$

Інтегрування по x^3 виконаємо чисельно, використовуючи формулу Гауса, в результаті отримаємо:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^2 [F]_{,\alpha}^T \sum_{l=0}^4 \delta\{u_l\}^T \{r_l\}, \quad (1.48)$$

де $\{r_l\}$ - вектор амплітудних значень вузлових реакцій:

$$\begin{aligned} \{r_l\} = & \sum_{k=1}^N ((([E]^T \{\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [E]_{,\alpha}^T) \varphi^{(l)} + [F]^T \{\sigma\} + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [F]_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \varphi^{(l)} \sqrt{g})_k H_k. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Компоненти векторів $\{\dot{\sigma}\}$, $\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}$, що входять до виразу (1.49), є вільними функціями координати x^3 ; через H_k позначені залежні функції.

Для виводу лінійаризованої матриці жорсткості криволінійного призматичного кінцевого елемента запишемо рівняння рівноваги в приростах:

$$\delta(\Delta W) - \delta(\Delta A) = 0. \quad (1.50)$$

Варіація приросту енергії деформованого кінцевого елемента розраховується за формулою:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta W) = & \sum_{l=0}^L \sum_{k=1}^N \delta\{u_l\}^T ((([LE]^T \{\Delta\dot{\sigma}\} + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [E]_{,\alpha}^T \{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \varphi^{(l)} + ([F]^T \{\Delta\dot{\sigma}\} + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [F]_{,\alpha}^T \{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \varphi_{,3}^{(l)}) \sqrt{g})_k H_k \end{aligned} \quad (1.51)$$

Коефіцієнти розкладання приростів напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання приростів деформацій:

$$\begin{aligned} \{\Delta\dot{\sigma}\} &= [D] \{\Delta\dot{\epsilon}\}, \\ \{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha} &= [D]_{,\alpha} \{\Delta\dot{\epsilon}\}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Компоненти матриць $[D]$ і $[D]_{,\alpha}$ обчислюються з врахуванням залежності фізико-механічних параметрів матеріалу від температури і рівня розвитку пластичних деформацій [72].

Запишемо коефіцієнти розкладання приросту деформацій в ряд Маклорена, які входять в (1.52) через приріст переміщень. Тоді вираз (1.51) можна записати в наступному вигляді:

$$\delta(\Delta W) = \sum_{l=0}^L \sum_{p=0}^L \delta\{u_l\}^T [K_{lp}^\wedge] \{\Delta u_p\} \quad (1.53)$$

Через $[K_{lp}^\wedge]$ позначена амплітудна лінеарізована матриця жорсткості:

$$\begin{aligned} [K_{lp}^\wedge] = & \sum_{k=1}^N (([E]^T [B] [E] \varphi^{(l)} \varphi^{(p)} + [E]^T [D] [F] \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + [F]^T [D] [E] \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)} + \\ & + [F]^T [D] [F] \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [E]_{,\alpha}^T [D]_{,\alpha} [E]_{,\alpha} \varphi^{(l)} \varphi^{(p)} + \\ & + [E]_{,\alpha}^T [D]_{,\alpha} [F]_{,\alpha} \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + [F]_{,\alpha}^T [D]_{,\alpha} [E]_{,\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)} + \\ & + [E]_{,\alpha}^T [D]_{,\alpha} [F]_{,\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)}) \sqrt{g} H_k. \end{aligned} \quad (1.54)$$

При побудові лінеарізованої матриці жорсткості компоненти матриці жорсткості компоненти матриць зв'язку приросту напружень з приростами деформацій є змінними і відображують зміну характеристик матеріалу в пластичній області напруження. Однак, в роботі [68] показано, що в задачах пластичності доцільно використовувати початкову матрицю жорсткості, отриману на першому пружному кроці.

Прийmemo, що зв'язок між коефіцієнтами розкладання приростів деформацій і напружень здійснюється по лінійному закону. Тоді в виразі (1.52)

замість матриць $[D]$, $[D]_{,\alpha}$ увійдуть матриці $[C]$, $[C]_{,\alpha}$, сформовані компонентами тензора пружних постійних.

Враховуючи введені пропозиції отримаємо вираз для початкової матриці жорсткості кінцевого елемента:

$$\begin{aligned}
 [K_{lp}] = \sum_{k=1}^N & \left(([E]^T [C] [E] \varphi^{(l)} \varphi^{(p)} + [E]^T [C] [F] \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + [F]^T [C] [E] \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)} + \right. \\
 & + [F]^T [C] [F] \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [E]_{,\alpha}^T [C]_{,\alpha} [E]_{,\alpha} \varphi^{(l)} \varphi^{(p)} + \\
 & + [E]_{,\alpha}^T [C]_{,\alpha} [F]_{,\alpha} \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} + [F]_{,\alpha}^T [C]_{,\alpha} [E]_{,\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)} + \\
 & \left. + [E]_{,\alpha}^T [C]_{,\alpha} [F]_{,\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)} \right) \sqrt{g} \, {}_k H_k. \quad (1.55)
 \end{aligned}$$

Важливим частинним випадком даної методики, яка дозволяє значно скоротити об'єм розрахунків, є розгляд тіл, геометричні характеристики яких постійні вздовж координати розкладання, а змінюються тільки фізичні параметри.

Для тіл, геометрія яких не змінилася вздовж $z^{3'}$ відрізняються від нуля тільки наступні компоненти тензора перетворень:

$$z_{,i}^{i'} \neq 0, \quad z_{,2}^{1'} = z_{,1}^{2'} \neq 0 \quad (1.56)$$

Тоді, використовуючи (1.2), отримаємо, що компоненти g_{13} і g_{23} метричного тензора рівні нулю:

$$g_{13} = g_{23} = 0 \quad (1.57)$$

В цьому випадку достатньо обчислити матриці, які встановлюють зв'язок між коефіцієнтами розкладання деформацій в ряд Маклорена з коефіцієнтами розкладання вузлових переміщень в ряд по координатним функціям в одному із

перерізів. Оскільки ненульові елементи матриць для даного випадку є постійними вздовж координати розкладання, то вираз для вектора амплітудних значень вузлових реакцій (1.49) спроститься наступним чином:

$$\{\bar{r}_l\} = \left(\left([E]^T \cdot I_1^{(l)} + [\bar{F}]^T \cdot I_2^{(l)} \right) + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [\bar{E}]_{,\alpha}^T \cdot I_1^{(l)} + [\bar{F}]^T \cdot I_2^{(l)} \right) \sqrt{g}, \quad (1.58)$$

де

$$\begin{aligned} I_1^{(l)} &= \sum_{k=1}^N (\{\dot{\sigma}\} \varphi^{(l)})_{\sqrt{g}} H_k, & J_1^{(l)} &= \sum_{k=1}^N (\{\dot{\sigma}\}, \alpha \varphi^{(l)}) H_k, \\ I_2^{(l)} &= \sum_{k=1}^N (\{\dot{\sigma}\} \varphi_{,3}^{(l)}) H_k, & J_2^{(l)} &= \sum_{k=1}^N (\{\dot{\sigma}\}, \alpha \varphi_{,3}^{(l)}) H_k, \end{aligned} \quad (1.59)$$

Компоненти матриць, встановлюючи зв'язок коефіцієнтів розкладання деформацій і напружень в ряд Маклорена $[\bar{C}]$ і $[\bar{C}]$ обчислюються згідно (1.13) через компоненти метричного тензора і величини $\lambda(z^{3'})$ і $\mu(z^{3'})$, які змінюються вздовж координати розкладання. Як налідок, компоненти матриць $[\bar{C}]$ і $[\bar{C}]$, α також є змінними величинами, але їх можна записати, виділяючи окремо постійні і змінні вздовж координати розкладання фрагменти:

$$\begin{aligned} [\bar{C}] &= \lambda(z^{3'}) [C], \alpha + \mu(z^{3'}) [\bar{C}] \mu, \\ [\bar{C}], \alpha &= \lambda(z^{3'}) [\bar{C}] \alpha \lambda + \mu(z^{3'}) [\bar{C}], \alpha \mu, \end{aligned} \quad (1.60)$$

Тоді матриці $[\bar{C}] \alpha$, $[\bar{C}] \mu$, $[\bar{C}], \alpha \lambda$, $[\bar{C}], \alpha \mu$ достатньо визначити в одному з перерізів тіла, а чисельне інтегрування проводити, враховуючи тільки величини, залежні від $z^{3'}$.

Для компактності запису виразів для коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного кінцевого елемента з змінними фізико-механічними параметрами введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 J_1^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\alpha \varphi^{(l)} \varphi^{(p)})_k H_k, \\
 J_2^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\alpha \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)})_k H_k, \\
 J_3^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\alpha \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)})_k H_k, \\
 J_4^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\alpha \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)})_k H_k, \\
 I_1^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\mu \varphi^{(l)} \varphi^{(p)})_k H_k, \\
 I_2^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\mu \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)})_k H_k, \\
 I_3^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\mu \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(p)})_k H_k, \\
 I_4^{lp} &= \sum_{k=1}^N (\mu \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(p)})_k H_k.
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Тоді матриця жорсткості кінцевого елемента зі змінними фізичними параметрами визначається за формулою:

$$\begin{aligned}
 [\bar{K}]_{lp} &= [\bar{E}]^T [\bar{C}_1]_{lp} [\bar{E}] + [\bar{E}]^T [\bar{C}_2]_{lp} [\bar{F}] + [\bar{F}]^T [\bar{C}_3]_{lp} [\bar{E}] + [\bar{F}]^T [\bar{C}_4]_{lp} [\bar{F}] + \\
 &+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [\bar{E}]_{,\alpha}^T [\bar{C}_1]_{,\alpha lp} [E]_{,\alpha} + [\bar{E}]_{,\alpha}^T [\bar{C}_2]_{,\alpha lp} [\bar{F}]_{,\alpha} + [\bar{F}]_{,\alpha}^T [\bar{C}_3]_{,\alpha lp} [E]_{,\alpha} +
 \end{aligned}$$

$$+[\bar{F}]_{,\alpha}^T[\bar{C}_4]_{,\alpha lp}[\bar{F}]_{,\alpha})\sqrt{g}, \quad (1.62)$$

$$\text{де } [\bar{C}_n]_{lp} = J_n^{lp}[\bar{C}_\lambda] + I_n^{lp}[\bar{C}_\mu], [\bar{C}_n]_{,\alpha lp} = J_n^{lp}[\bar{C}]_{,\alpha\lambda} + I_n^{lp}[\bar{C}]_{,\alpha\mu}$$

1.4. Вивід визначальних рівнянь з урахуванням великих пластичних деформацій

При розгляді просторових об'єктів в геометрично нелінійній постановці будемо, як і раніше, використовувати базисну декартову систему координат Z^i і місцеву системи координат x^i , з умовою, що вона «вморожена» в середовище і деформується разом з нею. Положення кожної частинки в довільний момент часу визначаються радіус-вектором:

$$\bar{r} = \bar{r}(Z^i, t) \quad (1.63)$$

Нехай відлікова початкова конфігурація утворена векторами \bar{r}_0 в момент часу t_0 , актуальна – векторами $\bar{r}_t = R$ в момент часу t . Уведемо в розгляд також відлікову перемінну конфігурацію, яка відповідає моменту часу \tilde{t} , і є достатньо близькою до t :

$$t = \tilde{t} + \Delta t \quad (1.64)$$

Метричні тензори цих станів позначимо відповідно \hat{g} , $\hat{\tilde{g}}$, \hat{G} (рис. 1.3).

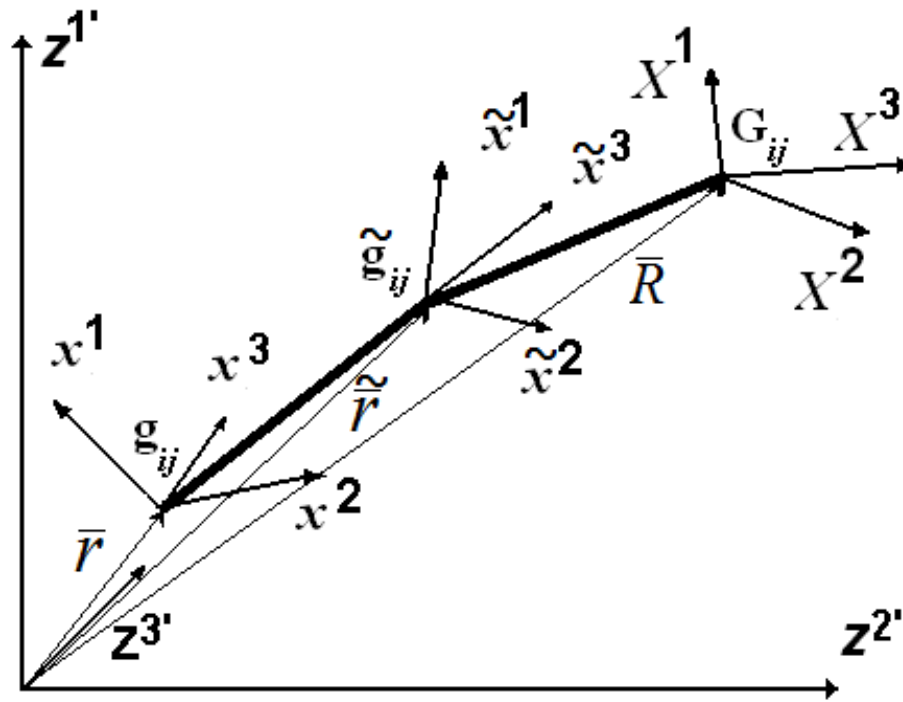


Рис.1.3. Система координат з трьома конфігураціями.

Приріст Δt вибраний таким чином, що при переході від відлікової перемінної конфігурації до актуальної компоненти метричного тензора були малі в порівнянні з G_{ij} :

$$\Delta \hat{G} = \hat{G} - \hat{g}, \quad \Delta G_{ij} \ll G_{ij} \quad (1.65)$$

Коваріантні компоненти метричних тензорів введених конфігурацій обчислюються аналогічно (4) через компоненти тензорів перетворення відповідних конфігурацій.

Для визначення компонент $\Delta \hat{G}$ запишемо вираз для радіус-вектора деякої точки в актуальній конфігурації \bar{R} , як суму вектора $\bar{r}_{\tilde{t}} = \tilde{r}$ в перемінній відліковій конфігурації і вектора переміщень \bar{u} (рис.1.4.):

$$\bar{R} = \tilde{r} + \bar{u} \quad (1.66)$$

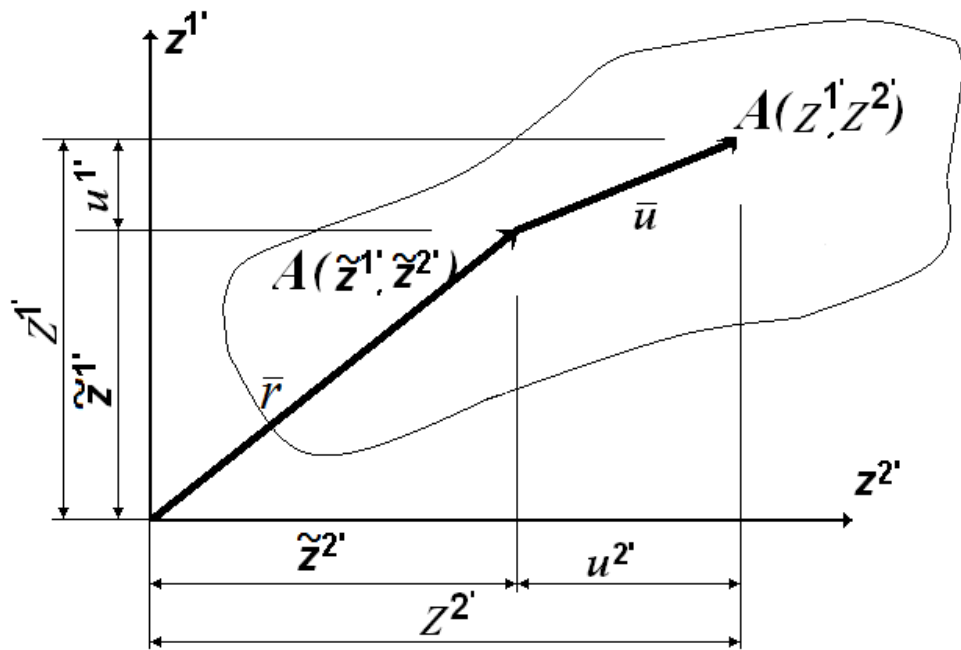


Рис 1.4. Зміна положення точки відповідно до введеної відлікової перемінної конфігурації

Використовуючи індексні позначення

$$z^{m'} = \tilde{z}^{m'} + u^{m'} \quad (1.67)$$

Компоненти тензора перетворень, які визначають зв'язок між місцевою і базисною системами координат в актуальній конфігурації визначаються по формулі:

$$Z_{,i}^{m'} = \tilde{Z}_{,i}^{m'} + u_{,i}^{m'} \quad (1.68)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора актуальної конфігурації запишемо, використовуючи формулу (1.4):

$$G_{ij} = Z_{,i}^{m'} Z_{,j}^{m'} \quad (1.69)$$

Перетворивши (1.69) з урахуванням (1.68), отримаємо:

$$G_{ij} = \tilde{Z}_{,i}^{m'} \tilde{Z}_{,j}^{m'} + \tilde{Z}_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} \tilde{Z}_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} = \tilde{g}_{ij} + \Delta G_{ij} \quad (1.70)$$

де

$$\Delta G_{ij} = \tilde{Z}_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} u_{,i}^{m'} + u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} \quad (1.71)$$

Контр варіантні компоненти ΔG_{ij} визначаються з умови:

$$G^{ij} G_{jl} = \delta_l^i \quad (1.72)$$

або

$$(\tilde{g}^{ij} + \Delta G^{ij})(g_{jl} + \Delta G_{jl}) - \delta_l^i = 0 \quad (1.73)$$

Нехтуючи приростом малих величин $\Delta G^{ij} \Delta G_{jl}$, отримаємо:

$$\Delta G^{ij} g_{jl} + \tilde{g}^{ij} \Delta G_{jl} = 0, \quad (1.74)$$

Звідки

$$\Delta G^{ik} = -\tilde{g}^{ij} \Delta G_{jl} \tilde{g}^{lk} \quad (1.75)$$

Запишемо вираження для тензора деформацій в актуальній конфігурації, використовуючи міру Фінгера \hat{F} [33]:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(F - \hat{G}) \quad (1.76)$$

Контрваріантні компоненти міри Фінгера F^{ij} рівні відповідним компонентам метричного тензора g^{ij} відлікової початкової конфігурації.

Контрваріантні компоненти тензора деформацій в актуальній конфігурації представляємо співвідношенням:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(F^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij}) \quad (1.77)$$

Використовуючи перемінну відлікову конфігурацію, представимо (1.77) у вигляді суми:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - \tilde{g}^{ij} + \tilde{g}^{ij} - G^{ij}) = \tilde{\varepsilon}^{ij} + \Delta\varepsilon^{ij} \quad (1.78)$$

Через $\tilde{\varepsilon}^{ij}$ позначені компоненти тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ в перемінній відліковій конфігурації по відношенню до відлікової початкової:

$$\tilde{\varepsilon}^{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - \tilde{g}^{ij}) \quad (1.79)$$

а через $\Delta\varepsilon^{ij}$ - компоненти тензора приросту деформацій при переході від перемінної відлікової до актуальної конфігурації:

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{ij} - G^{ij}) \quad (1.80)$$

Контрваріантні компоненти приросту деформацій при переході від відлікової перемінної до актуальної конфігурації з урахуванням (1.75) представляються співвідношення:

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{ij} - G^{ij}) = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{ij} - \tilde{g}^{ij} - \Delta G^{ij}) = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\Delta G_{mn}\tilde{g}^{jn}, \quad (1.81)$$

а коваріантні компоненти

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} \tilde{g}_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (1.82)$$

Використовуючи вираз (1.71), запишемо коваріантні компоненти тензора приросту деформацій в актуальній конфігурації через переміщення:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{Z}_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} \tilde{Z}_{,j}^{m'} + u_{,i}^{m'} u_{,j}^{m'}). \quad (1.83)$$

З іншої сторони, приріст тензора деформацій $\Delta \hat{\varepsilon}$ може бути виражений, як добуток тензора швидкості деформації на Δt .

$$\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol} \cdot \Delta t. \quad (1.84)$$

Похідну Олдройда від тензора $\hat{\varepsilon}$ представимо співвідношенням [59]:

$$\hat{\varepsilon}^{ol} = \dot{\hat{\varepsilon}} - \nabla \bar{\vartheta}^T \hat{\varepsilon} \quad (1.85)$$

Приймаючи до уваги (1.76) і дорівнювання нулю оператора $\nabla \hat{G} = 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^{ol} &= \frac{1}{2} [(\dot{\hat{F}} - \dot{\hat{G}}) - \nabla \bar{\vartheta}^T (\hat{F} - \hat{G}) - (F - \hat{G}) \nabla \bar{\vartheta}] = \\ &= \frac{1}{2} [\nabla \bar{\vartheta}^T \hat{F} + \hat{F} \nabla \bar{\vartheta} - \dot{\hat{G}} - \nabla \bar{\vartheta}^T \hat{F} + \nabla \bar{\vartheta}^T \hat{G} - \hat{F} \nabla \bar{\vartheta} + \hat{G} \nabla \bar{\vartheta}] = \\ &= -\frac{1}{2} (\dot{\hat{G}} + \nabla \hat{G}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Тоді при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Delta \hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} \Delta t = -\frac{1}{2} \Delta \hat{G}, \quad (1.87)$$

що еквівалентно покомпонентному запису (1.82).

Аналогічно (1.78) представимо напруження в актуальній конфігурації як суму напружень, досягнутих при деформації тіла в змінній відліковій конфігурації $\tilde{\sigma}^{ij}$ і приросту напружень $\Delta\sigma^{ij}$, зумовленими пружними деформаціями при переході до актуальної конфігурації:\

$$\sigma^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \quad (1.88)$$

або, відносно всіх вхідних конфігурацій в (1.88) до величин актуальної конфігурації:

$$\sigma^{ij} = \hat{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \quad (1.89)$$

Перейшовши до тензорної форми (1.88) і (1.89) запишемо у вигляді:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \quad (1.90)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \quad (1.91)$$

де $\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j$, $\hat{\sigma} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{r}_i\vec{r}_j$, $\Delta\hat{\sigma} = \Delta\sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j$, $\hat{\sigma} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j$

Тут $\hat{\sigma}$ - тензор, який характеризує частину напружень в актуальній конфігурації, обумовлених попередніми напруженнями, тобто переходом від початкової відлікової конфігурації до змінної відлікової.

Виходячи з (1.90), приріст напружень:

$$\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}. \quad (1.92)$$

В цьому випадку $\Delta\hat{\sigma}$ являє собою добуток матеріальної похідної $\hat{\sigma}$ на Δt :

$$\hat{\sigma}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}. \quad (1.93)$$

З іншої сторони, з (1.91)

$$\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}} \quad (1.94)$$

Такий підхід еквівалентний використанню об'єктивної похідної Олдріда від тензора напружень [59]:

$$\hat{\sigma}^{ol}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}} \quad (1.95)$$

Покажемо це

$$\hat{\sigma}^{ol} = \hat{\sigma} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\sigma} - \hat{\hat{\sigma}}) = \hat{\sigma} - \frac{1}{\Delta t}(\tilde{\nabla}\vec{R}^T\hat{\sigma}\tilde{\nabla}\vec{R} - \hat{\hat{\sigma}}). \quad (1.96)$$

Взявши до уваги, що

$$\nabla\vec{R} = \hat{E} + \nabla\vec{U}, \quad (1.97)$$

Маємо

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{ol} &= \hat{\sigma} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\sigma} + \hat{\sigma}\tilde{\nabla}\vec{U} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\hat{\sigma} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\hat{\sigma}\tilde{\nabla}\vec{U} - \hat{\hat{\sigma}}) + \\ &= \hat{\sigma} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\sigma}\tilde{\nabla}\vec{R}^T\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^T\tilde{\nabla}\vec{R}^T\hat{\sigma}). \end{aligned} \quad (1.98)$$

Враховуючи, що при $\Delta t \rightarrow 0$: $\vec{U} = \vec{v}dt$, $\tilde{\nabla}\vec{R} \rightarrow \hat{E}$, $\tilde{\nabla}\vec{R}^T \rightarrow E$, $\hat{\hat{\sigma}} \rightarrow \hat{\sigma}$, отримаємо вираз для об'єктивної похідної, яка відповідає похідній, взятої за Олдрідом:

$$\hat{\sigma}^{ol} = \hat{\sigma} - \nabla\vec{v}^T\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\nabla\vec{v} \quad (1.99)$$

В даній роботі використовуються визначальні відношення для ізотропного матеріалу при умові малості пружних деформацій. В якості міри швидкості деформації застосовується похідна Олдройда від тензора деформацій, в якості міри швидкості зміни напруженого стану – похідна Олдройда від тензора Коші. Для ізотропних матеріалів справедливе адитивне розкладання швидкості деформації на пружну, пластичну і повзучу складові. Враховуючи, що

$$\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol} \Delta t, \quad (1.100)$$

аналогічне розкладання можна записати і для приростів:

$$\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^l + \Delta \hat{\varepsilon}^\theta + \Delta \hat{\varepsilon}^P + \Delta \hat{\varepsilon}^C. \quad (1.101)$$

Фізичні відношення для пружних складових запишемо в формі закону Гука для приростів:

$$\Delta \hat{\sigma} = \hat{C} \Delta \hat{\varepsilon}^l, \quad (1.102)$$

де $\Delta \hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ol} \Delta t$

Приріст температурних деформацій визначається за формулою:

$$\Delta \hat{\varepsilon}^\theta = \hat{L} \nabla \vec{T}. \quad (1.103)$$

Для визначення пластичних деформацій і деформацій повзучості використовуються закони пластичної текучості і зміцнення:

$$\Delta \hat{\varepsilon}^P = d\lambda_P \hat{S}, \quad (1.104)$$

$$\Delta \hat{\varepsilon}^C = d\lambda_C \hat{S}, \quad (1.105)$$

Визначаючи відношення, записані в формі (1.102) – (1.105) об’єктивні, індиферентність вхідних в них величин була показана раніше.

Головні параметри, вхідні в рівняння стану, визначаються з дослідів на простий розтяг або стиск при різних температурах нагріву циліндричних зразків і різної швидкості деформування. Діаграми зміцнення, побудовані в координатах (інтенсивність напружень) – (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з – інтенсивністю логарифмічної міри деформацій) і, як показано в роботі [61], достатньо повно характеризує поведінку матеріалу за границею пружності в процесах, близьких до простих що супроводжуються великими нелінійними деформаціями.

Для побудови рівнянь НМСЕ використовуємо вираз варіації енергії деформації криволінійного призматичного конічного елемента в актуальній конфігурації:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta G_{ij} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.106)$$

де G_{ij} - компоненти метричного тензора, знаходяться по формулі (1.70).

Враховуючи, що при варіюванні в актуальній конфігурації \tilde{g}_{ij} залишається незмінним, перетворимо вираз (1.106):

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta(\Delta G_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.107)$$

Перейшовши до деформацій в актуальній конфігурації згідно (1.82), отримаємо:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} G^{ij} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.108)$$

Зобразивши у відповідності з МСКЕ компоненти тензорів деформацій і напружень відрізками ряду Маклорена і виконавши інтегрування в області поперечного перерізу, запишемо вираз енергії деформації КЕ в актуальній конфігурації в матричній формі:

$$\delta W = \int_{-1}^1 ((\sigma\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^T)\{\Delta\dot{\sigma}\} + \frac{1}{12} \int_{\alpha=1}^2 (\sigma\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}^T)\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \quad (1.109)$$

де $\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^T = \{\Delta\dot{\varepsilon}_{11} \ 2\Delta\dot{\varepsilon}_{12} \ \Delta\dot{\varepsilon}_{22} \ 2\Delta\dot{\varepsilon}_{23} \ 2\Delta\dot{\varepsilon}_{31} \ \Delta\dot{\varepsilon}_{33}\}^T$.

$\{\Delta\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}^T = \{\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} \ 2\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha} \ \Delta\dot{\varepsilon}_{33,\alpha}\}^T$.

Знаходимо варіацію приростів деформацій в актуальній конфігурації, використовуючи вираз (1.83):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) &= \frac{1}{2} (Z_{,i}^{m'} \delta U_{,j}^{m'} + Z_{,j}^{m'} \delta U_{,i}^{m'} + \delta(U_{,i}^{m'} U_{,j}^{m'})) \\ &= \frac{1}{2} (\delta U_{,j}^{m'} (\tilde{Z}_{,i}^{m'} + U_{,i}^{m'}) + \delta U_{,i}^{m'} (\tilde{Z}_{,j}^{m'} + U_{,j}^{m'})) \quad (1.110) \end{aligned}$$

Взявши до уваги формулу (1.68), приведемо (1.110) до вигляду, аналогічному запису варіації приростів лінійної деформації:

$$\delta(\Delta \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} (Z_{,i}^{m'} \delta U_{,j}^{m'} + Z_{,j}^{m'} \delta U_{,i}^{m'}) \quad (1.111)$$

Це дозволить показати варіації приростів деформацій і їх похідних в формі, співпадаючій з отриманими раніше формулами для малих пластичних деформацій:

$$\delta\{\Delta\dot{\varepsilon}\} = \sum_{l=0}^L \left([E]\varphi^{(l)} + [F]\varphi_{.3}^{(l)} \right) \delta\{U_l\} \quad (1.112)$$

$$(\Delta\dot{\varepsilon})_{,\alpha} = \sum_{l=0}^L \left([E]_{,\alpha}\varphi^{(l)} + [F]_{,\alpha}\varphi_{.3}^{(l)} \right)$$

Елементи матриць $[E]$, $[F]$, $[E]_{,\alpha}$, $[F]_{,\alpha}$ визначаються по значенням компонент тензора перетворення, обчисленим в актуальній конфігурації.

Підставимо (1.112) в вираз варіації енергії деформації кінцевого елемента (1.109) і після чисельного інтегрування по формулі Гауса, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta\{U_l\} \{r_l\} \quad (1.113)$$

де $\{r_l\}$ - вектор вузлових реакцій.

$$\begin{aligned} \{r_l\} = & \sum_{k=1}^N \left(([E]^T \{\dot{\sigma}\} \right. \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^Z [E]_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha} \varphi^{(l)} \\ & \left. + ([F]^T \left\{ \dot{\sigma} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^Z [F]_{,\alpha}^T \{\dot{\sigma}\}_{,\alpha} \right\} \varphi_{.3}^{(l)}) \sqrt{G} \right) {}_k H_k \quad (1.114) \end{aligned}$$

По вигляду вираз (1.114) співпадає з отриманим без врахування великих пластичних деформацій, однак записано в актуальній конфігурації.

При розрахунку елементів лінеарізованої (з врахуванням зміни геометрії матриці жорсткості) використовуються отримані раніше співвідношення (1.55), а всі вхідні величини обчислюються в змінній відліковій конфігурації на кожному кроці по параметру зсуву.

РОЗДІЛ 2.

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ

Вибір оптимального з точки зору витрат машинного часу та швидкості збіжності ітераційного процесу алгоритму розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь НМСЕ є важливим фактором, що впливає на ефективність методу в цілому. Як показали численні дослідження, використання МБІ до розв'язання систем рівнянь НМСЕ для призматичних тіл зі змінними параметрами має ряд важливих переваг у порівнянні з розв'язанням систем традиційного варіанта МСЕ.

При організації обчислювального процесу та його програмній реалізації враховані основні вимоги, які висуваються до програмного забезпечення розрахунку міцності на ПК. Модульна структура розробленої системи програм забезпечує її незалежність відносно нових класів задач.

2.1. Розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь.

Матриця системи розв'язувальних рівнянь НМСЕ при розгляді неоднорідних призматичних тіл, незалежно від вибору системи координатних функцій, є повністю заповненою та складається з блоків, кожен з яких володіє стрічковою структурою. Розв'язання систем з матрицею такого виду найбільш раціонально проводити МБІ. Оскільки розроблений підхід орієнтований на розгляд процесів пружної та пружно-пластичної деформації, розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь виконується з використанням єдиного алгоритму, що представляє собою поєднання крокового методу інтегрування та параметру МБІ:

$$\{U_l\}_{n+1}^m = \{U_l\}_n^m + \omega_{on}[K_{ll}]^{-1}(\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m) \quad (2.1.)$$

Тут прийняті наступні позначення: m - номер кроку, $\{U_l\}_n^m$, $\{U_l\}_{n+1}^m$ - коефіцієнти розкладання вектора вузлових переміщень та ітерацій n та $n+1$; ω_{on} - параметр релаксації ($1 \leq \omega < 2$); K_{ll} - діагональна підматриця матриці жорсткості системи; $\{Q_l\}^m$ - вектор вузлових навантажень; $\{R_l\}_n^m$ - вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Елементи діагональних підматриць ($[K_{ll}]$) визначають шляхом повузлового обходу дискретної моделі та підсумовування відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості скінчених елементів, що примикає до даного вузла. При розгляді фізично нелінійних задач матриця жорсткості формується з припущенням пружної роботи матеріалу. Обчислення елементів матриці жорсткості для геометрично нелінійних задач проводиться відповідно тих же формул (1.55), однак всі величини, які в них входять, визначені у змінній відліковій конфігурації на кожному кроці по параметру. Коректність такого підходу при розв'язанні геометрично нелінійних задач показана в [43].

Вектор вузлових навантажень $\{Q_l\}^m$ формується на кожному кроці навантаження. Для отримання виразу його компонент запишемо варіацію роботи зовнішніх сил для одного з вузлів:

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \int_{-1}^1 q_{m'(S_1 S_2)} \delta U_{m'(S_1 S_2)} \sqrt{g} dx^3 \quad (2.2)$$

Вузлові значення зовнішніх навантажень $q_{m'(S_1 S_2)}$ обчислюються шляхом інтегрування прикладеного навантаження q по області поперечного перерізу тіла, яке виконується кількісно по формулі трапецій. Розкладемо в ряд по координатним функціям вузлові значення переміщень у відповідності з (1.28). Тоді

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \int_{-1}^1 q_{m'(S_1 S_2)} \sum_{l=0}^L \delta U_{m'(S_1 S_2)}^l \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 \quad (2.3.)$$

або

$$\delta A = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L q_{m'(S_1 S_2)}^l \delta U_{m'(S_1 S_2)}^l \quad (2.4)$$

де через $q_{m'(S_1 S_2)}^l$ - компоненти вектору $\{Q_l\}$, які визначаються за формулою:

$$q_{m'(S_1 S_2)}^l = \int_{-1}^1 q_{m'(S_1 S_2)}^l \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 \quad (2.5)$$

Після проведення по третій координаті кількісне інтегрування по формулі Гауса, отримуємо:

$$q_{m'(S_1 S_2)}^l = \sum_{K=1}^N (q_{m'(S_1 S_2)}^l \varphi^{(l)} \sqrt{g})_K H_K \quad (2.6)$$

Компоненти вектора вузлових реакцій $\{R_l\}_n^m$ визначається шляхом підсумовування відповідних компонентів $\{r_l\}$ та ітерації n .

Компоненти вектора $\{r_l\}$ обчислюються відповідно до формул (1.49), (1.58) або (1.30). Для випадку силового навантаження значення векторів напружень та їх похідних, що входять у вираз для $\{r_l\}$ визначаються із співвідношення (1.11).

При розрахунках конструкцій на теплові впливи напружень обчислюються через температурні деформації. Коефіцієнти розкладу температурних складових деформації в ряд Маклорена виражаємо через вузлові значення вектора температур:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{0\theta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} \mathcal{G}_{ij}^0, \\ \varepsilon_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^{0\theta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} (2S_{(3-\alpha)}^0 \mathcal{G}_{\alpha(\alpha)}^0 + 2Z_{\alpha}^{0, m'} Z_{\alpha(3-\alpha)}^{0, m'}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{3\alpha,(3-\alpha)}^{0\theta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \alpha_T T_{(S_1 S_2)} (2S_{(3-\alpha)}^0 g_{3\alpha} + \overset{q}{Z}, \overset{m'}{3} \overset{0}{Z}, \overset{m'}{\alpha(3-\alpha)} + \overset{0}{Z}, \overset{m'}{3(3-\alpha)} \overset{0}{Z}, \overset{m'}{\alpha}) \\ \mathcal{E}_{33,\alpha}^{0\theta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{S_1 S_2} (2S_\alpha^0 g_{33} + 2\overset{0}{Z}, \overset{m'}{3} \overset{0}{Z}, \overset{m'}{3\alpha}) \end{aligned}$$

Представимо співвідношення (2.7) у векторному вигляді

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{E} \right\}^{0\theta} &= [L] \{ T \}, \\ \left\{ \mathcal{E} \right\}^{0\theta}, \alpha &= [L], \alpha \{ T \}, \\ \partial e \left\{ T \right\}^T &= \left\{ \left\{ T_{(-1,-1)} \right\} \left\{ T_{(1,-1)} \right\} \left\{ T_{(1,1)} \right\} \right\}^T \end{aligned}$$

Оскільки зв'язок між напруженнями та деформаціями здійснюється відповідно до закону Гука (1.12), то для напружень, викликаних діями температури, можна записати:

$$\left\{ \sigma^{0\theta} \right\} = [C] \{ \varepsilon \} \quad (2.9)$$

У випадку, коли об'єкт зі змінними фізико-механічними характеристиками та постійною геометрією піддадуть температурному навантаженню при обчисленні напружень, що входять у вираз відбудуться відповідні спрощення.

Напруження та її похідні, що входять у вираз корегуються при виникненні деформацій пластичності та повзучості відповідно прийнятому закону стану по методиці, аналогічній (134).

Для фізично та геометрично нелінійних задач напружень та ітерації кроку обчислюються наступним чином:

$$\varepsilon_c^{cl} = \frac{\partial \varepsilon_c^{ij}}{\partial t} \vec{R}_i \vec{R}_j = \varepsilon_c^{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j \quad (2.10)$$

Збільшення напружень на кожній ітерації знаходяться по збільшенням деформацій відповідно до закону Гука, потім здійснюється корегування компонент девіатору напружень.

Коли процес деформування перетікає при таких швидкостях та температурі, що деформаціями повзучості можна знехтувати, корегування здійснюється у відповідності з прийнятими умовами текучості (1.18). Якщо інтенсивність дотичних напружень

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0 \quad (2.11)$$

перевищує межу текучості при чистому зрушенні $\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)$, повні напружень слід визначати по формулі:

$$\begin{aligned} d\sigma^{ij} = & \left\{ [\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] - 4G^2 s^{ij}s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ & \times d\varepsilon_{kl} - \left\{ [\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] - \left(\frac{\beta_c}{\gamma^p} + \frac{\beta_p}{\gamma^c} \right) s^{kl} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial T} [\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] \varepsilon_{kl}^e \right\} dT + \\ & + [\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] \frac{\rho_c}{\gamma^c} s_{kl}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Через S_n^{*ij} визначені компоненти девіатора після корегування:

$$S_n^{*ij} = S_n^{ij} \frac{\tau_s}{I} \quad (2.13)$$

При одночасному виникненню деформацій пластичності та повзучості на початку кожного кроку у часі обчислюється межа повзучості.

Межа повзучості залежить від температури, параметра зміцнення та швидкості деформацій повзучості та визначається ітераційним шляхом по формулі [68]:

$$\tau_c^m = \left[\frac{\varepsilon_c^{n-1}}{\alpha} (\psi)^\beta \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tau_c^m = \left[\frac{\varepsilon_c^{n-1}}{\alpha} (\psi)^\beta \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.14)$$

де α , β та γ - контакти, що визначені для даного матеріалу при даній температурі; ε_c^{n-1} - швидкість деформації повзучості, обчислена на ітерації $n-1$. Потім проводиться порівняння τ_s та τ_c . При $\tau_c \leq \tau_s$ деформації пластичності відсутні та корегування напружень проводиться описаним раніше способом тільки на величину деформацій повзучості. При $\tau_c > \tau_s$ можуть розвиватися тільки деформації пластичності.

У роботі [68] при розв'язанні фізично та геометрично нелінійних задач у плоскій та вісесиметричній постановці запропонована модифікація метода Ньютона-Канторовича, основана на екстраполяції вектора переміщень, обчисленим на попередньому кроці по параметру. Ефективність застосування екстраполяції вектора переміщень при використанні МБІ досліджена на задачі про пласку осадку бруса квадратного перерізу між шорсткими пласко-паралельними плитами. Максимальний ступінь осадки по висоті склала 15%. Поєднання МБІ з екстраполяціями вектора переміщень для цієї задачі дає скорочення числа ітерацій більше, ніж у 5 разів у порівнянні з немодифікованим алгоритмом при збереженні точності отримуваних результатів.

2.2. Ефективність використання напіваналітичного методу скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл в пружній та пружно-пластичній постановці

Раціональний вибір системи координатних функцій φ^l суттєво впливає на основні критерії ефективності напіваналітичного методу, такі як збіжність ітераційного процесу розв'язання систем рівнянь та точність отриманих розв'язків залежно від кількості утримуваних членів розкладу.

Найпростіше моделювати різноманітні варіанти закріплень дозволяють системи базисних функцій, що приймають на торцях нульові значення, та доповнені поліномами Лагранжа нульового та першого порядку. У роботі [37] у якості такої системи запропоновано застосовувати поліноми Міхліна. Можливі й інші види розкладів, що забезпечують при рівняння до нуля переміщень на торцях тіла, наприклад, розкладання у ряд по синусах.

Проведемо порівняння цих функцій на прикладі жорстко закріпленого по торцях призматичного бруса, що розглядається у пласкій постановці (рис. 2.1), еталонне розв'язання якого отримане методом скінчених елементів. При розв'язанні задачі НМСЕ для обох φ^l утримувались 5 членів ряду. У розрахунках прийняті одиничні значення модуля пружності матеріалу та інтенсивності рівномірно розподіленої поверхні тіла навантаження.

Аналіз розподілу напружень $\sigma^{3'3'}$ вздовж $Z^{3'}$, отриманих на базі обох систем координатних функцій показав, що поліноми Міхліна забезпечують більш точну апроксимацію параметрів напружено-деформованого стану по всій довжині тіла.

Співставлення швидкості сходи мості ітераційного процесу також показує, що застосування поліномів Міхліна являється більш прийнятним, ніж синусів, так як для отримання розв'язків з однаковою точністю у першому випадку знадобилося 4 ітерації, в другому – 5.

Оцінку ефективності НМСЕ при розрахунку об'єктів з перемінними по $Z^{3'}$ фізичними та геометричними параметрами проведемо шляхом порівняння з традиційним варіантом МСЕ.

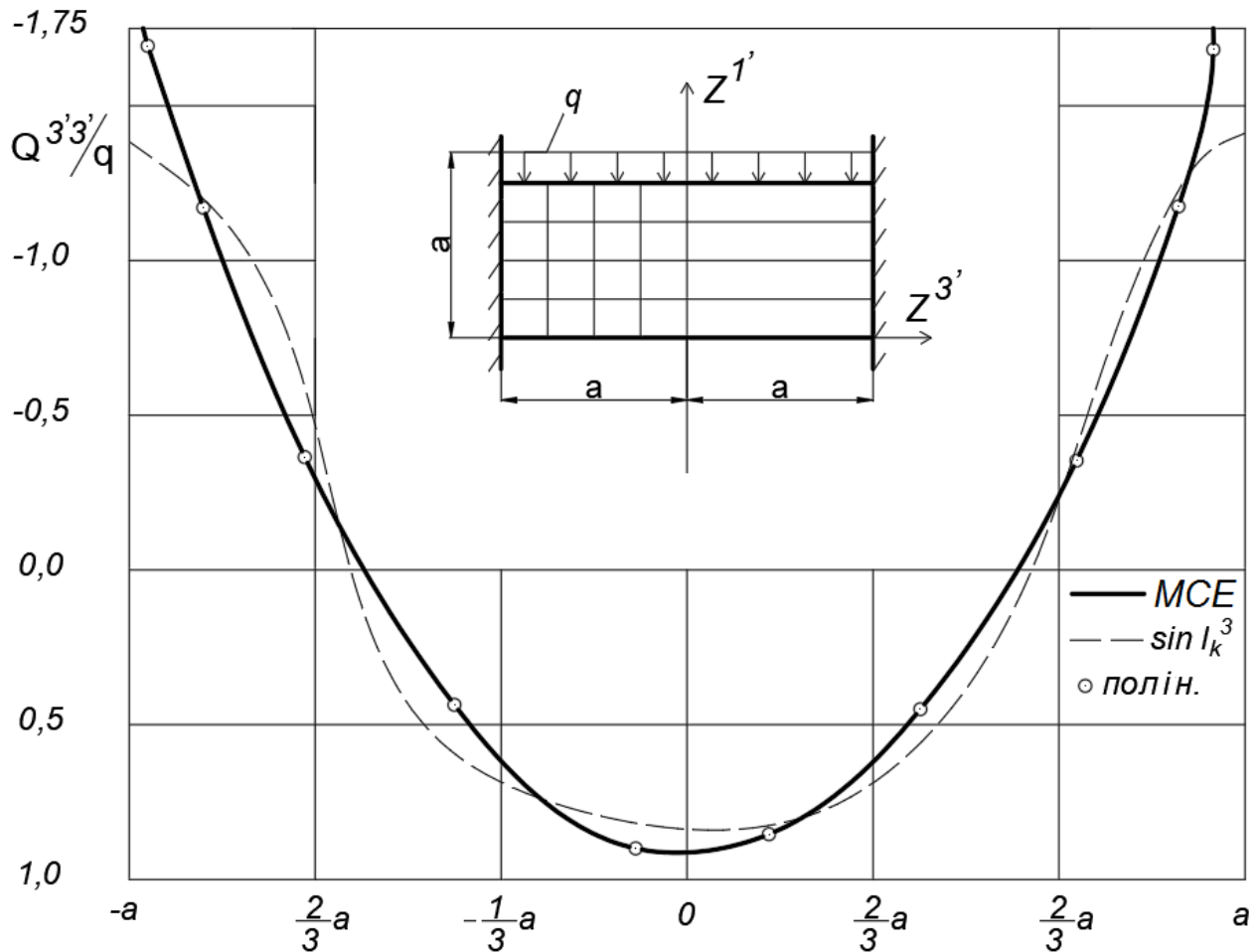


Рис. 2.1. Розрахунок призматичного бруса, що розглядається у плоскій постановці.

Оцінку ефективності НМСЕ при розрахунку об'єктів з перемінними по $Z^{3'}$ фізичними та геометричними параметрами проведемо шляхом порівняння з традиційним варіантом МСЕ [150].

Для розв'язання систем рівнянь метода скінчених елементів найбільш широко використовуються різноманітні модифікації метода Гауса. При постійній ширині стрічки матриці системи дозволяючи рівнянь оцінку об'єму необхідних обчислень можна проводити шляхом співставлення необхідного числа арифметичних операцій для розв'язання систем лінійних рівнянь МСЕ та НМСЕ. Розглядаються моделі з регулярною структурою сіткової області. Приймаючи, що по всім координатам розміри сіткової області однакові та дорівнюють, визначимо, що ширина рядка стрічки матриці МСЕ

дорівнює $N_{CT}^{MCE} = (n^2 + n + 2) \cdot 3$; загальне число невідомих для обох методів дорівнює n^3 .

Для системи M рівнянь з шириною стрічки матриці N виконання прямого ходу метода Гауса потребує $M \cdot N \cdot (N-1)$ множень та $M \cdot N$ додавання. При виконанні зворотного ходу потребується $M \cdot N$ множень та $M \cdot N$ віднімані. Припускається, що на операції додавання та віднімання затрачається однакова кількість часу ПК. Оскільки співвідношення ширину рядка матриці МСЕ та НМСЕ

$$\frac{N_{CT}^{MCE}}{N_{CT}^{HMCE}} \approx n \quad (2.15)$$

на виконання прямого ходу метода Гауса потрібно n^2 більше операцій множення та додавання ніж для матриці НМСЕ, а для зворотного ходу в n разів більше множень та додавання. Завдяки використанню метода блочних ітерацій, збіжність розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ досягається, у середньому, за n ітерацій (при ω близькому до ω_{on}). Враховуючи, що час формування правої частини при рівних параметрах сіткової області однаковий для НМСЕ та МСЕ, то чисельне розв'язання системи рівнянь НМСЕ за допомогою досліджуваного алгоритму потребує на n^2 операцій менше, ніж розв'язання рівнянь МСЕ методом Гауса.

Ефективність розв'язання систем рівнянь методом блочних ітерацій визначається декількома факторами, такими як збіжність ітераційного процесу, визначення оптимального значення параметру релаксації ω_{on} при мінімальних обчислювальних витратах та впливу зростання числа невідомих на швидкість сходи мості.

Кількісні дослідження проводилися на прикладі пружної та пружно-пластичної деформації безкінечної смуги з прямокутним вирізом, що розглядається в умовах пласкої деформації (рис. 2.2). На торцях прийняті

граничні умови, що відповідають спиранню на абсолютно жорсткі у площині поперечного перерізу та гнучкі з неї діафрагми:

$$\frac{U^{1'}}{Z^{3'}=\pm 1} = \frac{\sigma^{3'3'}}{Z^{3'}=\pm 1} = 0 \quad (2.16)$$

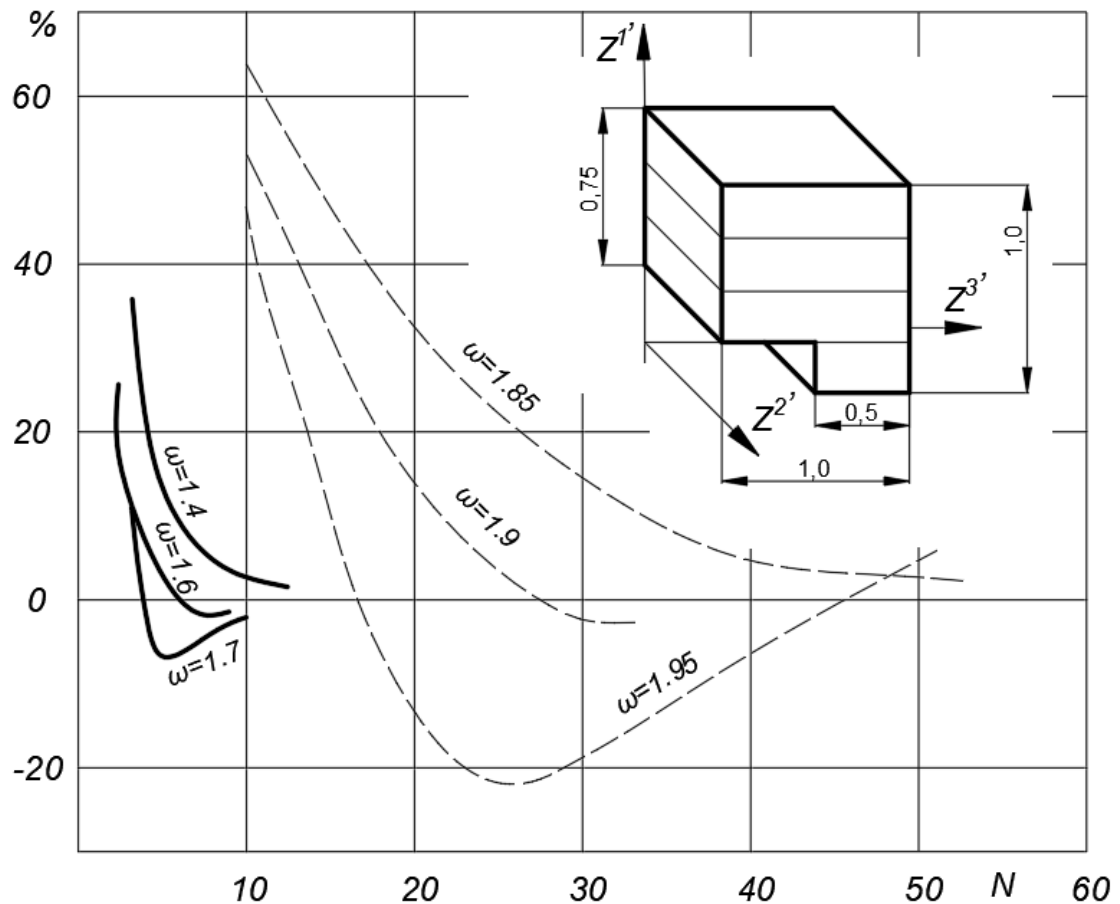


Рис 2.2 Пружна та пружно-пластична деформація безкінечної смуги з прямокутним вирізом.

По верхній поверхні тіла прикладене рівномірно розподілене навантаження, інтенсивність якого поступово зростає від $0,3\tau_s$ (пружне розв'язання) до $0,5\tau_s$. Модуль пружності матеріалу прийнятий рівним 1, коефіцієнт Пуассона 0,3.

Необхідною умовою коректності результатів співвідношення МСЕ та НМСЕ є однакове число невідомих та кількість блоків у матрицях систем

дозвільних рівнянь. У розрахунках приймалось число вузлів сіткової області у напрямку Z^3 при скінчено елементній апроксимації рівним 9, відповідно утримувалось 9 перших членів розкладання. Вздовж Z^1 в обох випадках використовувалось 13 вузлів сіткової області.

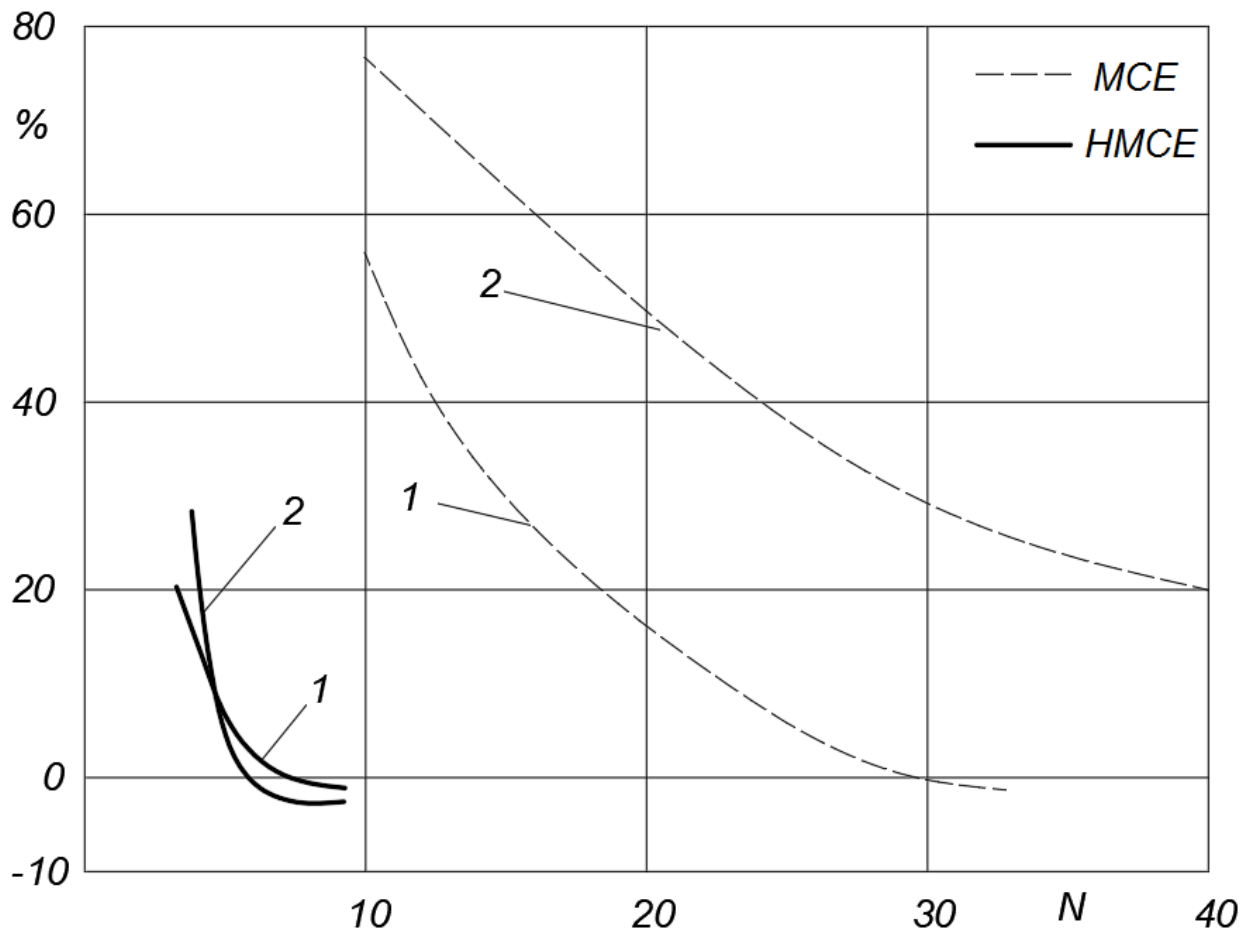


Рис 2.3. Похибка визначення максимальних переміщень від кількості ітерацій

Результати дослідження швидкості збіжності методу блочних ітерацій на задачі пружної деформації при різних значеннях параметру ω для MCE та HMCE представлені на рис. 2.2. Погрішності обчислення максимальних відносних зміщень обчислювалась у відсотках від еталонного результату, отриманого MCE при використанні 289 вузлів сіткової області. Були визначені оптимальні значення параметру релаксації відповідно для MCE - $\omega_{on}= 1,9$, для HMCE - $\omega_{on}=1,6$.

Аналіз кривих показує, що швидкість збіжності ітераційного процесу при розв'язанні систем лінійних рівнянь НМСЕ у 5 разів вищий, ніж для МСЕ.

Визначення ω_{on} являється трудомістким процесом і проводити його раціонально на основі більш рідкої сітки скінчених елементів, щоб не вирішувати неодноразово задачу при великій кількості КЕ. У зв'язку з цим проведені дослідження зміни швидкості збіжності ітераційного процесу при збільшенні кількості блоків у матриці при фіксованому значенні ω на прикладі пружної деформації смуги з вирізом.

При оптимальних значеннях ω вивчалася збіжність методу блочних ітерацій для даних розмірів сіткової області й при збільшенні у 1,5 рази відповідно кількості скінчених елементів вздовж Z^3 або утримуваних базисних функцій. Результати приведені на рис. 2.3 у вигляді графіків, які відображають похибки визначення максимальних переміщень від кількості ітерацій. Цифрою 1 означені графіки, отримані для опорної сіткової області, 2 – для уточненої. З рисунка видно, що збільшення кількості блоків у матриці НМСЕ не впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу, в той час, як для матриць МСЕ це приводить до суттєвого (в 2,2 рази) зростання кількості ітерацій.

Криві, що характеризують залежність кількості ітерацій від значення параметру релаксації для пружно-пластичного розрахунку, зображені на рис. 2.4. Аналіз приведених даних свідчать про суттєву перевагу НМСЕ для класу задач, що розглядаються. Так, при максимальному рівні розвитку пластичних деформацій ітераційний процес для НМСЕ сходиться у 5 разів швидше, ніж для МСЕ. Однак, фактичне скорочення об'єму обчислень значно більше за рахунок суттєвого скорочення додаткових досліджень по визначенню оптимального значення параметру релаксації ω_{on} .

Аналіз характеру графіків для методу скінчених елементів показує, що параметр релаксації потрібно обирати з вузької околиці ω_{on} , оскільки невиконання умови $\omega = \omega_{on}$ веде до значного погіршення збіжності обчислювального процесу. З підвищенням рівня пластичних деформацій спостерігається зміщення оптимального значення ω в сторону збільшення, однак

збіжність ітераційного процесу при розв'язанні задачі пластичності напіваналітичним методом при $\omega_{on} = 1,70$ – визначеному на останньому кроці навантаження тільки на 5% краще, ніж при $\omega_{on} = 1,6$, знайденому на першому кроці навантаження, у той час коли для МСЕ використання значення $\omega_{on} = 1,9$, оптимального при $\epsilon_p^{\max} = 0\%$ дає збільшення кількості ітерацій на 40% порівняно з $\omega_{on} = 1,95$, визначеному на останньому кроці навантаження.

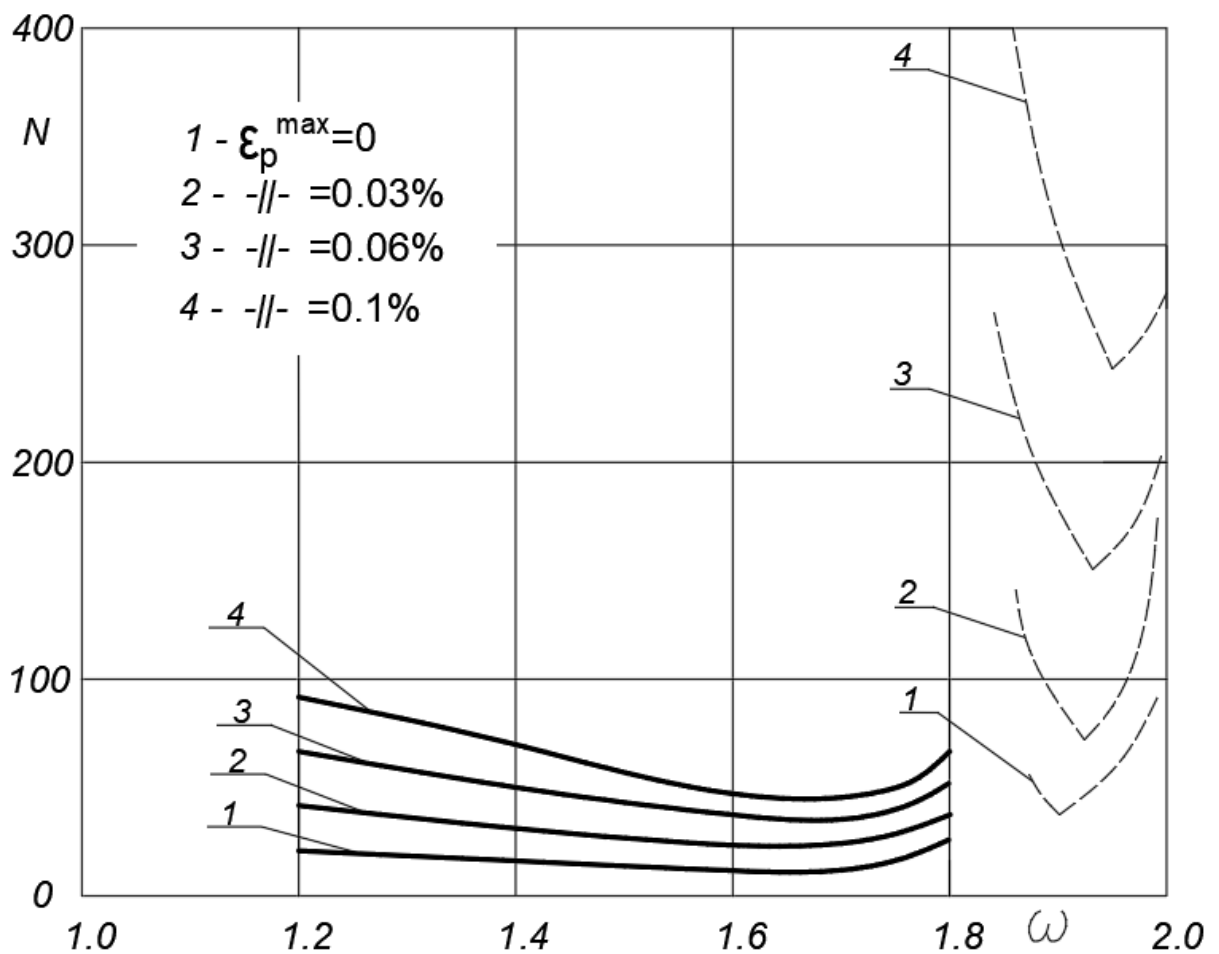


Рис. 2.4. Залежність кількості ітерацій від значення параметру релаксації для пружно-пластичного розрахунку

Отже, розв'язання задачі МСЕ потребує більшої кількості трудомістких попередніх досліджень при максимальних рівнях пластичних деформацій для визначення оптимального значення параметру релаксації, котрі не потрібні при використанні напіваналітичного варіанту, оскільки ω_{on} , яке було знайдене на

першому кроці навантаження, забезпечує достатньо добру збіжність і на наступних кроках.

Таким чином визначення оптимального значення параметру релаксації для напіваналітичного методу доцільно проводити на рідкісній сітці і в пружній області напружень, оскільки це ж значення є оптимальним і на густих сітках, а зміщення у задачах пластичності у сторону збільшення не призводить до суттєвого зменшенню об'єму обчислень порівняно з необхідними витратами при параметрі релаксації, оптимальному для пружної задачі. При використанні методу скінчених елементів для пошуку ω_{on} необхідно неодноразово вирішувати фізично нелінійну задачу, не зменшуючи розміри сіткової області, що потребує значних кількісних досліджень.

Використання методу блочних ітерацій до розв'язання систем нелінійних рівнянь НМСЕ приблизно на порядок переважає по ефективності традиційний метод скінчених елементів.

2.3. Структура обчислювального комплексу.

Розроблена методика розв'язання фізично та геометрично нелінійних задач для масивних та тонкостінних неоднорідних криволінійних призматичних об'єктів представлених у вигляді КПП, які реалізовані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки КНУБА, що орієнтується на ПЕОМ, операційна система MS WINDOWS. КПП написаний на алгоритмічних мовах високого рівня FORTRAN Power Station і С..

Організаційно обчислювальний комплекс *PRIZ* представляє подальший розвиток системи «МІЦНІСТЬ» і розроблений у відповідності з основними принципами побудови проблемно-орієнтованих пакетів програм. При створенні комплексу дотримувалась модульність його структури, що забезпечує незамкненість пакету прикладних програм *PRIZ* відносно нових класів

досліджуваних об'єктів, типів крайових задач і алгоритмам обчислювальних процесів.

У теперішній час існує два розділи проблемно-орієнтованих підсистем *PRIZ*: розв'язання задач термопластичності здійснюється розділом *PRIZPL*; для дослідження геометрично нелінійних об'єктів слугує розділ *PRIZGL*. Організаційна структура розділів представлена на рис. 2.5.

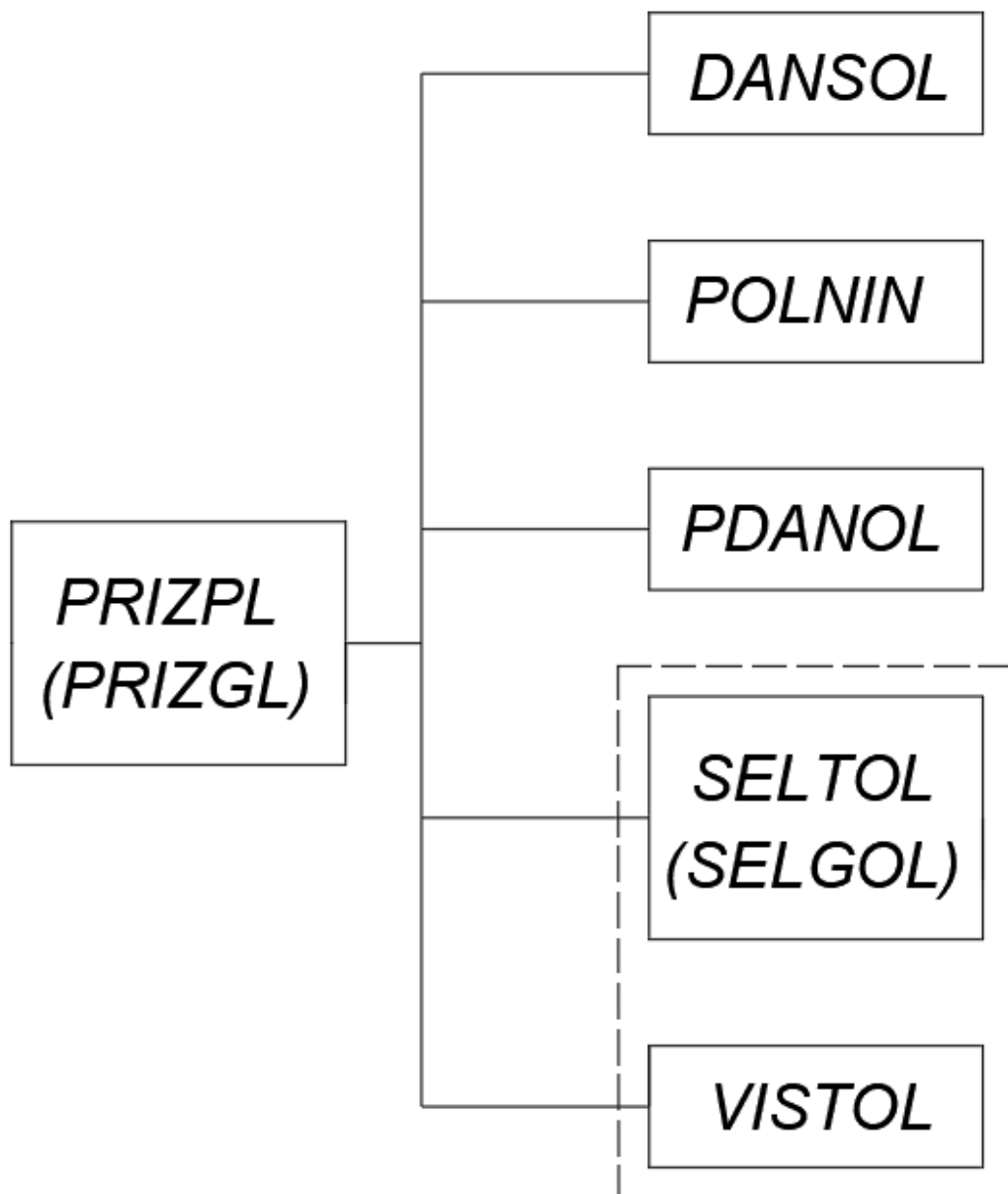


Рис.2.5. Схема структури обчислюваного комплексу

PRIZPL (PRIZGL) – ім'я розділу та управляючої програми. На цьому рівні відбувається опис основних масивів інформації та звернення до гілок завантаження. Економія ресурсів оперативної пам'яті ЕОМ забезпечується використанням оператора *CALLLOADGO(...)* фактичним параметром котрого слугує ім'я гілки завантаження.

DANSOL – ім'я управляючої програми гілки задачі та обробки первинної інформації про об'єкт.

Основними вихідними даними є інформаційні масиви (поле координат, поле температур, поле ознак, поле номерів сіткових координат і поле навантажень), розміри сіткової області, параметри кількісного інтегрування (координати точок інтегрування та їх кількість, значення вагових функцій).

Програми гілки *DANSOL* (рис. 2.6) формують набір вихідних даних, що відображають топологію об'єкта (*TELOT* і *POLOT*), його геометрію (*GEOM*), умови закріплення (*ZAKRES* і *ZAKREP*). Модуль *FUNVES* містить інформацію про координати точок інтегрування та обчислює відповідні значення вагових функцій. *SETKOS* виконує обчислення сіткових координат вузлів дискретної моделі, по якій у модулі *NOKOS* визначається значення наскрізного номеру вузла. У процесі роботи програми *GEOM* та *SETKOS* використовують модулі типу *INTERP*, *INTERL*, які дозволяють задавати інформацію зміцненими блоками, межі яких визначені значеннями сіткових координат. Блок *DANSOL* передбачає також задання параметрів, які характеризують інтенсивність зовнішніх впливів та фізичні властивості матеріалу, параметрів управління організацією крокового процесу та контрольного друку, а також кількості утримуваних членів розкладання і точність розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь.

Підпрограма *POLNIL*, звернення до якої відбувається після загрузки гілки *DANSOL*, проводить обчислення значень координатних функцій та їх похідних по Z^3 у точках інтегрування та заповнює відповідні масиви.

PDANOL – ім'я управляючої програми гілки контрольного друку перетворених вихідних даних. Результатом її роботи є таблиця координат вузлів сіткової області, полів ознак, які характеризують умови закріплення і значень координатних функцій та їх похідних. Зовнішнє навантаження може бути задане у вигляді вимушених зміщень окремих точок поверхні (підпрограма *MASUL*), силових (підпрограма *NAGRUZ*) або температурних впливів (*TEMPER*). Модуль *PDANOL* забезпечує контрольний друк відповідних масивів.

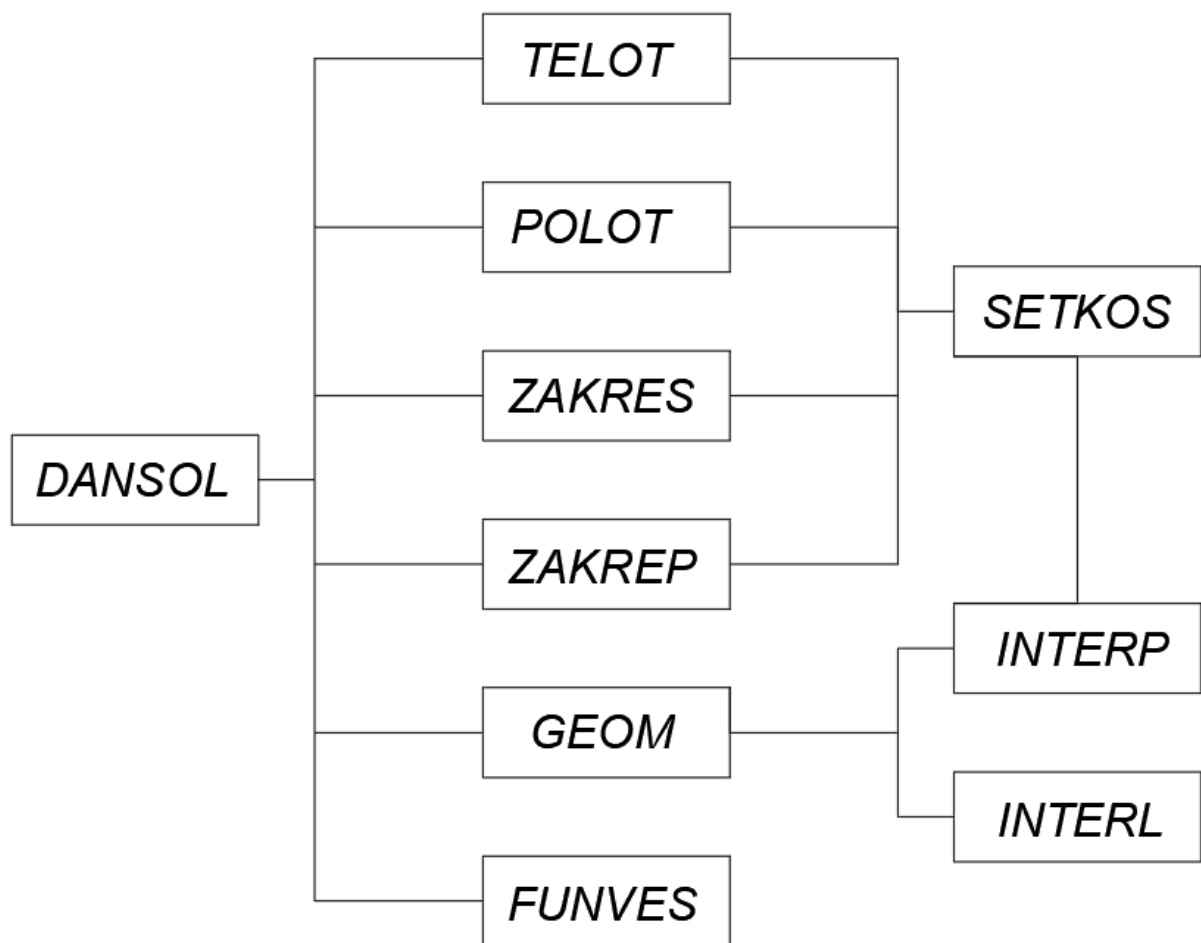


Рис.2.6. Схема структури програми гілки *DANSOL*.

Завантаження гілок *SELTOL* та *VISTOL* організоване у циклі по крокам навантаження. При розв'язанні геометрично нелінійних задач у рамках розділу *PRIZGL* замість *SELTOL* відбувається звернення до модуля *SELGOL*.

SELTOL – ім'я управляючої підпрограми гілки розв'язання задачі термопластичності.

SELGOL – ім'я управляючої підпрограми гілки розв'язання задачі пластичної формозміни.

Структурна схема гілки розв'язання нелінійної задачі представлена на рис. 2.7.

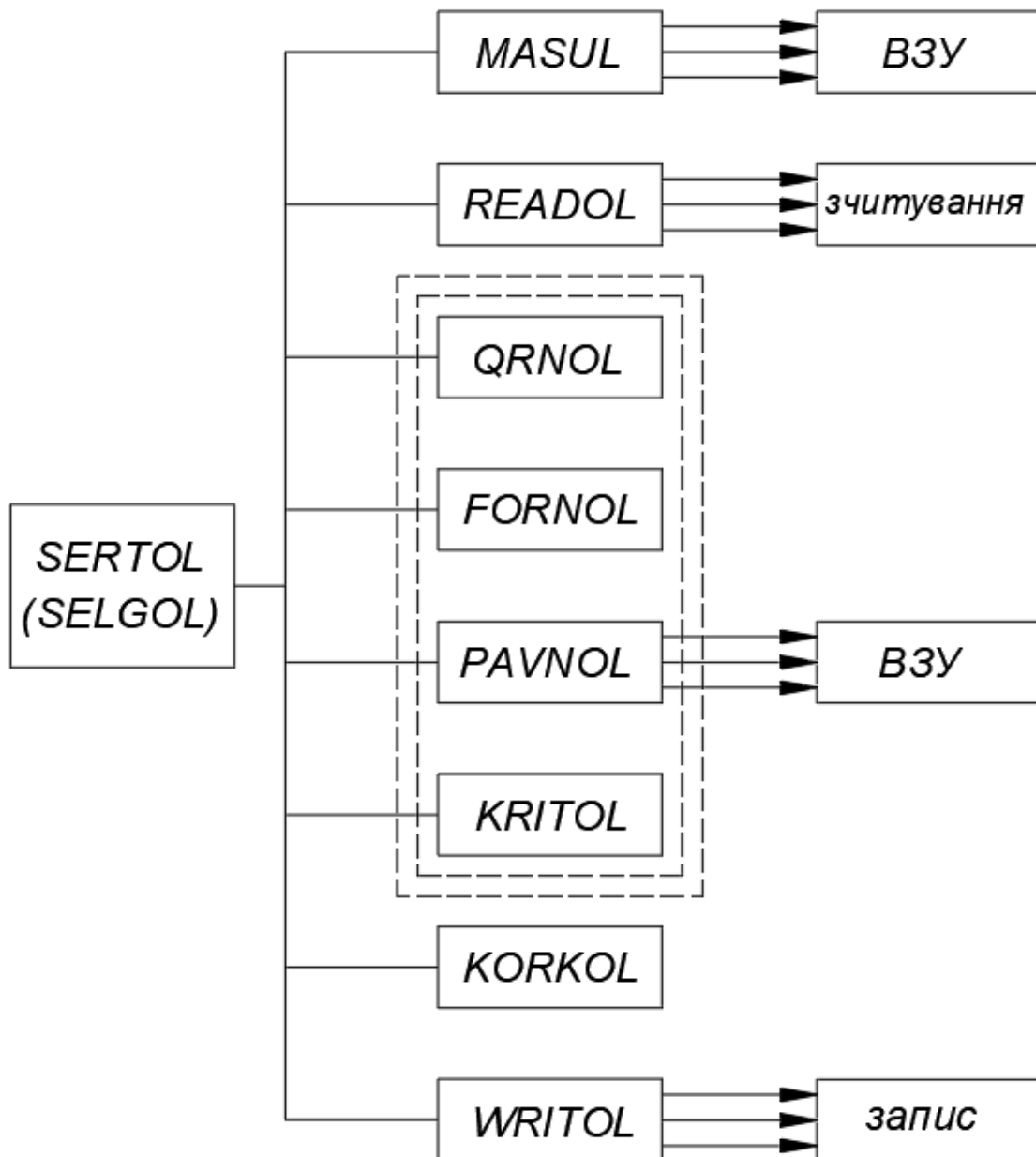


Рис.2.7. Схема структури програми гілки SERTOL (SELGOL).

Блок *MASUL* забезпечує можливість задання вимушених зміщень окремих частин конструкції. Звернення до нього відбувається на першій інтеграції. Для геометрично нелінійних задач при реалізації алгоритму x екстраполяцією переміщення, їх значеннями, вирішеними на попередньому кроці програма *MASUL* працює тільки один раз на першій інтеграції першого кроку. У рамках модуля *SELTOL*(*SELGOL*) організовані вкладені цикли по ітераціях і по утримуваним членам розкладання. Виклик програм *QRNOL*, *FORPOL*, *PAVNOL*, *KRITOL* проводиться із внутрішнього циклу.

Модуль *QRNOL* забезпечує формування вектору зовнішніх навантажень, обчислення вузлових реакцій та перевірку виконання рівняння рівноваги. Формування та складання діагональних підматриць жорсткості та виконання прямого та зворотнього ходу метода Гауса виконує блок *FORPOL*. При розв'язанні фізично нелінійних задач діагональні підматриці жорсткості формуються тільки на першому кроці по параметру навантаження. Для задач про великі пластичні деформації обчислення компонентів матриці жорсткості відбувається на кожному кроці (або через фіксовану кількість кроків) у перемінній відліковій конфігурації за даними попереднього кроку.

Підпрограма *PAVNOL* формує на зовнішніх запам'ятовуючих пристроях масиви координатних переміщень та їх похідних шляхом відновлення їх по значенням для кожного члена розкладання. Перевірка умови збіжності ітераційного процесу розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь виконується у підпрограмі *KRITOL*. Гілка *SELGOL* передбачає також покроковий перерахунок компонентів масиву координат вузлів вихідної дискретної моделі з врахуванням обчислених значень координатних переміщень, який виконує модуль *KORKOL*. Звернення до *KORKOL* відбувається після виходу з ітераційного циклу. Безперервність розв'язання задачі кроковим методом забезпечується зберіганням масиву напружень, а для геометрично нелінійних задач масивів напружень та переміщення вузлів, заповнених на попередньому кроці за параметром навантаження, запис яких на ЗЗП виконує програма *WRITOL*. Модуль *READOL* зчитує цю інформацію на початку виконання

наступного кроку. При виконанні алгоритму екстраполяції переміщення визначення вектору вузлових реакцій у підпрограмі *QRNOL* на першій ітерації наступного кроку відбувається відповідно до значень переміщень, вирахованих на попередньому кроці.

VISTOL – ім'я управляючої програми гілки обробки та друку результатів розрахунку. Завантаження гілки *VISTOL* відбувається в кінці виконання кожного кроку або через деяку кількість кроків. У результаті роботи програм блоку *VISTOL* виконується зчитування масивів переміщень та напружень, що зберігаються на зовнішніх запам'ятовуючих пристроях, перетворення величин напружень, вирахованих у місцевій системі координат до їх значень та видача на друк таблиць вузлових переміщень, напружень у базисній системі координат, інтенсивності дотичних напружень та пластичних напружень.

Вивід інформації таким чином, що на початку кожного кроку друкується його номер, кількість ітерацій на даному кроці та загальна кількість ітерацій, виконаних з початку розв'язання задачі.

Отже, слід відмітити, що запропонована методика та пакет прикладних програм, що її реалізує, забезпечує високу ефективність НМСЕ порівняно з традиційним методом скінчених елементів при розв'язанні систем лінійних та нелінійних рівнянь для виділеного класу об'єктів.

РОЗДІЛ 3.
ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ І ДОСТОВІРНОСТІ
НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ

Розроблений у рамках напіваналітичного методу підхід до дослідження напружено-деформованого стану неоднорідних криволінійних призматичних тіл з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності потребує обґрунтування його ефективності стосовно традиційного МСЕ та підтвердження достовірності результатів, що одержуються на його основі.

До основних показників, що дозволяють провести зіставлення НМСЕ і МСЕ, відносяться швидкість збіжності розв'язків при збільшенні числа невідомих і обсяг нарахувань, пов'язаних з розв'язанням лінійних і нелінійних рівнянь. Для класу задач збіжності визначається такими факторами, як характер зміни вздовж $Z3$ геометричних і механічних параметрів об'єкта. Нерівномірний розподіл механічних характеристик пов'язані з наявністю початкової неоднорідності матеріалу, розвитком пластичних деформацій та залежністю властивостей матеріалу від температури. Ці фактори впливають і на збіжність ітераційного процесу, оскільки від них залежить обумовленість матриці НМСЕ.

З метою визначення галузі ефективного застосування НМСЕ розглянуто широке коло контрольних прикладів. Шляхом порівняння результатів, отриманих напіваналітичним методом для задач у пружній, пружно-пластичній постановці та з урахуванням великих пластичних деформацій з результатами інших авторів показано достовірність запропонованої методики.

3.1. Порівняння збіжності методу скінчених елементів і напіваналітичного методу скінчених елементів

Порівняння збіжності розв'язків зі збільшенням кількості невідомих проводилося шляхом оцінки точності одержуваних розв'язків стосовно еталонним, як яких приймалися результати інших авторів чи отримані МСЕ.

На першому етапі проведено зіставлення збіжності НМСЕ та МСЕ для тіл з плавним уздовж координати розкладання зміною геометричних та фізико-механічних характеристик, що не призводить до суттєвих локальних особливостей при розподілі параметрів напружено-деформованого стану.

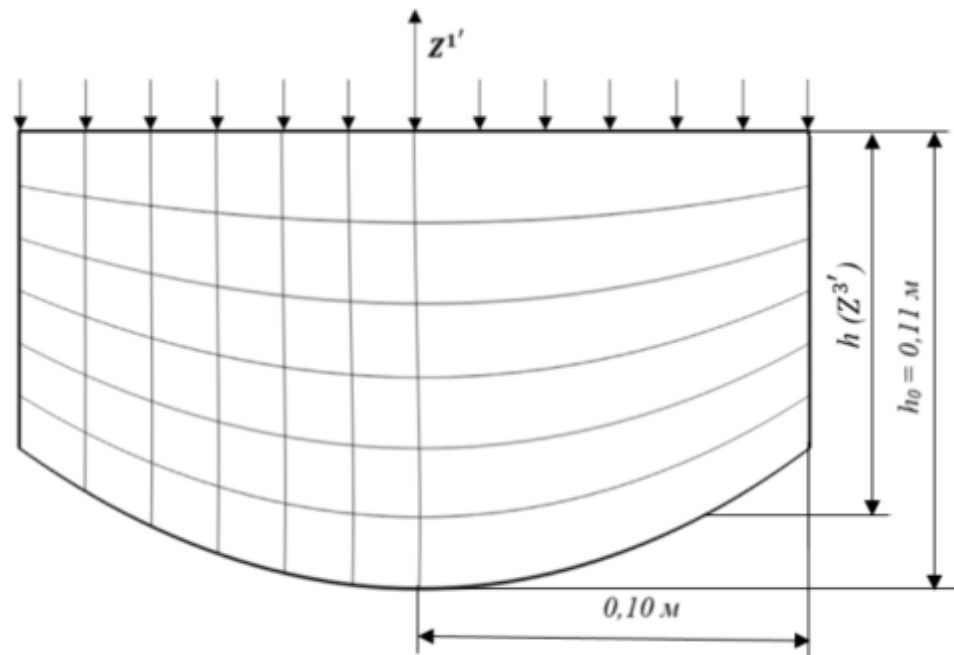


Рис.3.1. Брус, нижня поверхня якого описана параболою

Розглянемо пружну рівновагу бруса (рис. 3.1), нижня поверхня якого описана параболою, і, отже, його висота є безперервно гладкою функцією координати Z^3' :

$$h(Z^{3'}) = h_0 - 0,4(Z^{3'})^2 \quad (3.1)$$

Граничні умови на торцях $Z3' = -1$ і $Z3' = 1$ відповідає спираю на абсолютно жорсткі в площині та гнучкі діафрагми з неї:

$$U^{1'}/Z3' = \pm 1 = \sigma^{3'3'}/Z3' = \pm 1 = 0 \quad (3.2)$$

Для моделювання умов плоскої деформації у цьому та інших контрольних прикладах у напрямку $Z2'$ виділявся шар кінцевої товщини, який апроксимувався одним СЕ, закріплений від зсувів $U2'$.

Таблиця 3.1

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
25	$1.535 \cdot 10^2$	3.3	$9.109 \cdot 10^3$	5.2
81	$1.579 \cdot 10^2$	0.6	$9.503 \cdot 10^3$	1.1
169	$1.588 \cdot 10^2$	—	$9.608 \cdot 10^3$	—

Навантаження здійснюється по верхній поверхні тіла рівномірно розподіленим навантаженням. У розрахунках прийнято одиничну інтенсивність навантаження $q=1$ і одиничний модуль пружності. Для отримання еталонного розв'язання використовувалася кінцево-елементна дискретизація об'єкта, один із варіантів сітки скінчених елементів зображений на рис. 3.1 ліворуч від осі симетрії. Дослідження зі збіжності (табл. 3.1) показали, що достатньо використовувати 144 КЕ, оскільки подальше збільшення їх числа призводить до незначної зміни результату. Дослідження впливу числа утримуваних членів ряду $m3$ виконані при фіксованій кількості елементів вздовж $Z1$ дорівнює 8.

Характер збіжності НМСЕ представлений на рис. 3.2 у вигляді графіка (суцільна лінія), що відображає залежність похибки обчислення максимального відносного зміщення ($V_{max}^{1'} = \frac{U'_{max}}{h_0}$), $h_0 = 0,11m$ від числа утримуваних членів розкладання по третьому напрямку. Для порівняння ефективності поліноміальної та кусково-лінійної апроксимації на тому ж малюнку

пунктирною лінією показаний графік збіжності МСЕ. більш ніж у 2 рази більшому відсотку похибки.

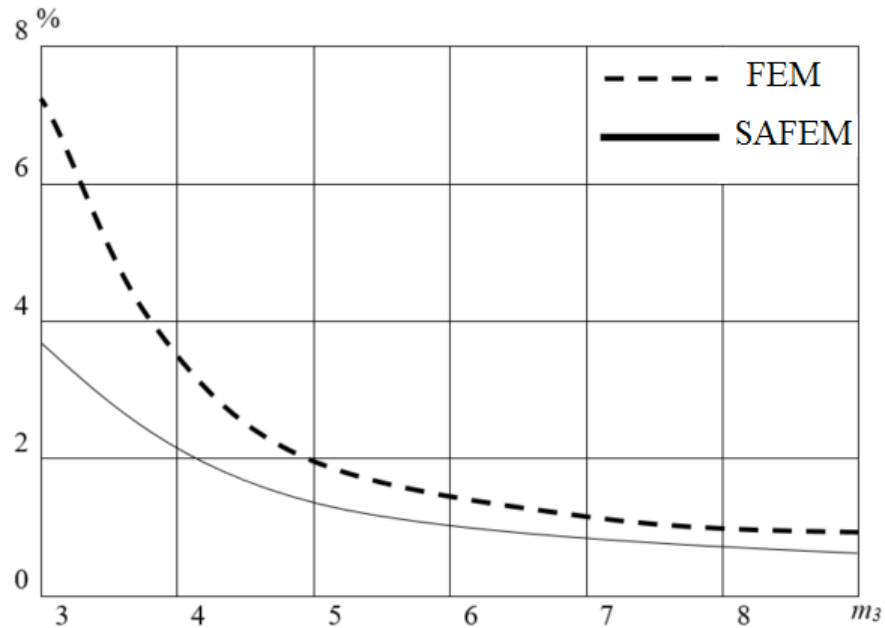


Рис. 3.3. Залежність похибки обчислення максимального відносного зміщення

Апробація методики розрахунку призматичних тіл з фізико-механічними параметрами, що гладко змінюються, і дослідження в цьому випадку швидкості збіжності розв'язків наведено на задачі про пружну рівновагу призматичного бруса, модуль пружності якого змінюється за законом:

$$E(Z^{3'}) = E_0 - (E_0 - E_1)|Z^{3'}| \quad (3.3)$$

$$E_0 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, E_1 = 1.4 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

На рис. 3.3 показані геометричні розміри бруса, а також розбиття на скінчені елементи для МСЕ та НМСЕ. Граничні умови на торцях тіла визначені відповідно до (3.2). Об'єкт навантажений по верхній поверхні рівномірно розподіленим навантаженням одиничної інтенсивності.

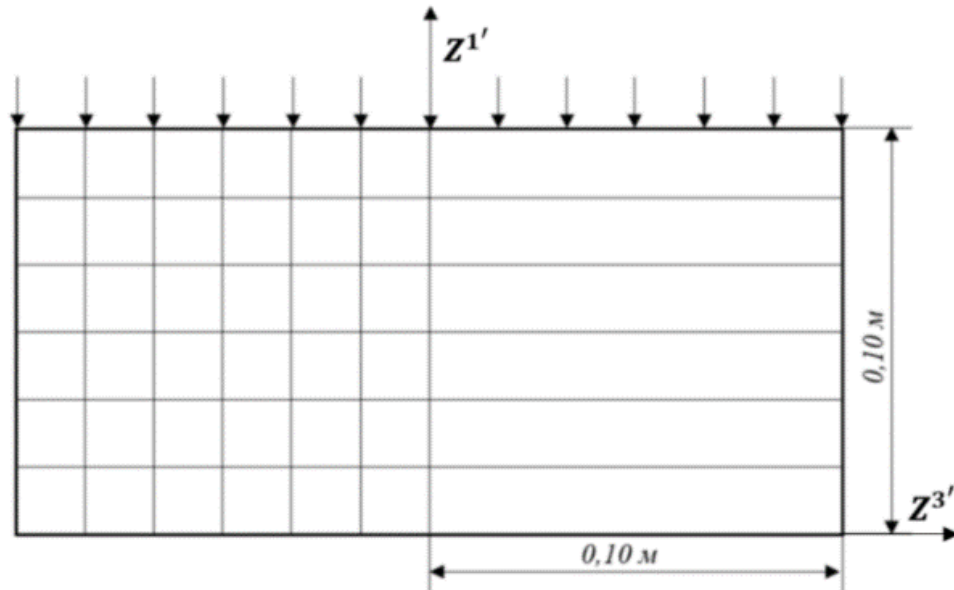


Рис.3.3. Дискретна модель бруса.

Еталонне розв'язання отримано методом скінчених елементів під час використання 169 вузлів сіткової області (табл. 3.2). При зіставленні збіжності НМСЕ і МСЕ у напрямку Z^1 апроксимації здійснювалася 8 кінцевими елементами.

Таблиця 3.2

m	V_{max}^1	%	V_{max}^2	%
25	$1.517 \cdot 10^{-2}$	3.3	$8.762 \cdot 10^{-3}$	5.2
81	$1.557 \cdot 10^{-2}$	0.6	$9.239 \cdot 10^{-3}$	1.1
169	$1.565 \cdot 10^{-2}$	—	$9.373 \cdot 10^{-3}$	—

Графіки зміни похибки визначення максимальних відносних зсувів U^1 залежно від числа невідомих m_3 представлені на рис. 3.4. Спостерігається характер збіжності, аналогічний раніше отриманому для тіл зі змінною геометрією.

Таким чином, застосування НМСЕ дає можливість отримувати розв'язання для об'єктів з геометричними і фізичними параметрами, що плавно змінюються, заданою точністю при меншій кількості невідомих ніж МСЕ.

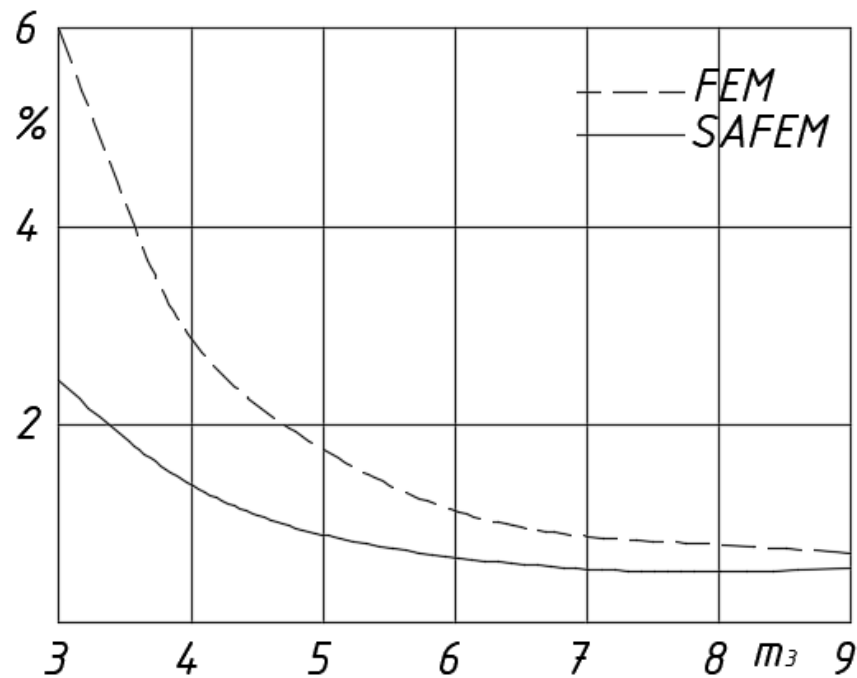


Рис.3.4. Графіки зміни похибки визначення максимальних відносних зсувів.

На другому етапі розглянемо неоднорідні криволінійні призматичні тіла з різного виду вставками, вирізами та отворами. Геометричні та фізичні характеристики таких конструкцій описуються шматково-безперервними функціями. Оскільки наявність концентраторів призводить до локального перерозподілу напружень, то для апроксимації об'єктів даного типу потрібно збільшувати кількість членів розкладання, що утримуються.

Для оцінки впливу глибини вирізу на збіжність МСЕ та НМСЕ вирішено задачі про розтягнення смуги, ослабленої вирізами, форма яких описується дугою радіусу z при поступовому збільшенні глибини вирізу. Розрахункова схема представлена на рис. 3.5. Ширина смуги $D=0,2$ м, її довжина 0,4 м, довжина концентратора l прийнята 0,1 м. Через d позначена ширина шийки.

Коефіцієнт концентрації визначається як відношення максимальної напружень, що діє в ослабленому перерізі зразка до номінальної напружень.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}} \quad (3.4)$$

Номінальні напруження $\sigma_{\text{НОМ}}$ знаходимо за формулою:

$$\sigma_{\text{НОМ}} = \frac{P}{b \cdot d}, \quad (3.5)$$

де $P = q \cdot D$

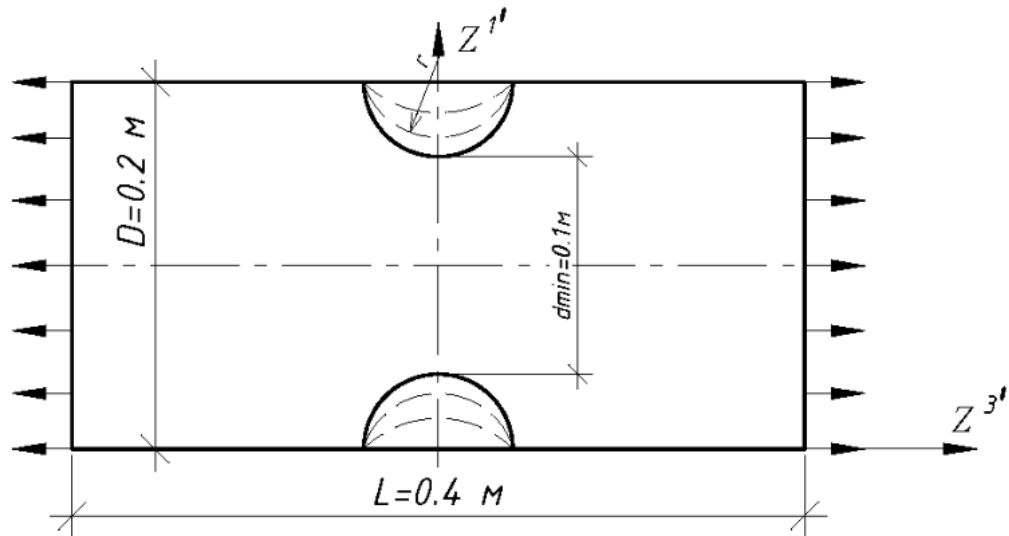


Рис.3.5. Розрахункова схема смуги ослабленої вирізами.

Коефіцієнти концентрації, обчислені на базі розрахункових даних НМСЕ для D/d змінюється в межах від 1 до 2, зіставлені з отриманими [106]. З результатів, наведених у табл. 3.3 можна зробити висновок про достовірність одержуваних розв'язків, оскільки відсоток похибки обчислення K_t напіваналітичним методом скінчених елементів по відношенню до еталонного значення для вирізів різної глибини не перевищує 2,0%.

Таблиця 3.3.

D/d		L	1.1	1.54	2
K _t	НМСЕ	1,01	1,215	1,44	1,485
	МСЕ	1,0	1,23	1,46	1,51
	%	1	1,2	1,4	1,65

Таблиця 3.4.

m ₃	HMCE		MCE	
	σ_{max}	%	σ_{max}	%
7	2.81	7.1	2.73	9.8
9	3.01	0.3	2.9	4
13	2.97	1.6	2.98	1.3

Для граничного випадку лінії з напівкруглими вирізами виконано зіставлення збіжності розв'язків MCE та HMCE до еталонного [98]. У табл.3.4 показано зміну похибки обчислення σ_{max} зі збільшенням точності апроксимації Z^3 .

У цьому контрольному прикладі обидва методи за рівного числа невідомих дають розв'язання з однаковою точністю.

Зіставлення швидкості збіжності розв'язків для традиційного та напіваналітичного варіантів MCE при ступінчастій зміні модуля пружності проведено на прикладі пружного деформування прямокутної пластини з квадратною вставкою (рис. 3.6). Отримано розв'язання задачі при поступовому зменшенні модуля пружності матеріалу вставки E від початкового значення E_0 (модуль пружності матеріалу пластини), аж до утворення отвору.

До двох протилежних сторін пластини прикладено рівномірно розподілене навантаження, інтенсивність $q = 1$. Еталонне розв'язання отримано методом скінчених елементів з рівномірно в напрямках $Z1'$ і $Z3'$ сіткою та загальним числом вузлів рівним 247. Розв'язання задачі HMCE здійснювалося при використанні 12 елементів.

Проведено дослідження збіжності одержуваних напружень на контурі вирізу (точка А) при зменшенні модуля пружності вставки від E_0 до 0 та збереження значення модуля пружності матеріалу пластини до еталонного розв'язання, отриманого MCE для пластини з квадратним отвором. При відношенні модулів пружності матеріалу і вставки рівним 4 порядком значення

параметрів напружено-деформованого стану, що розглядаються, вже досить близькі до еталонних (рис. 3.6).

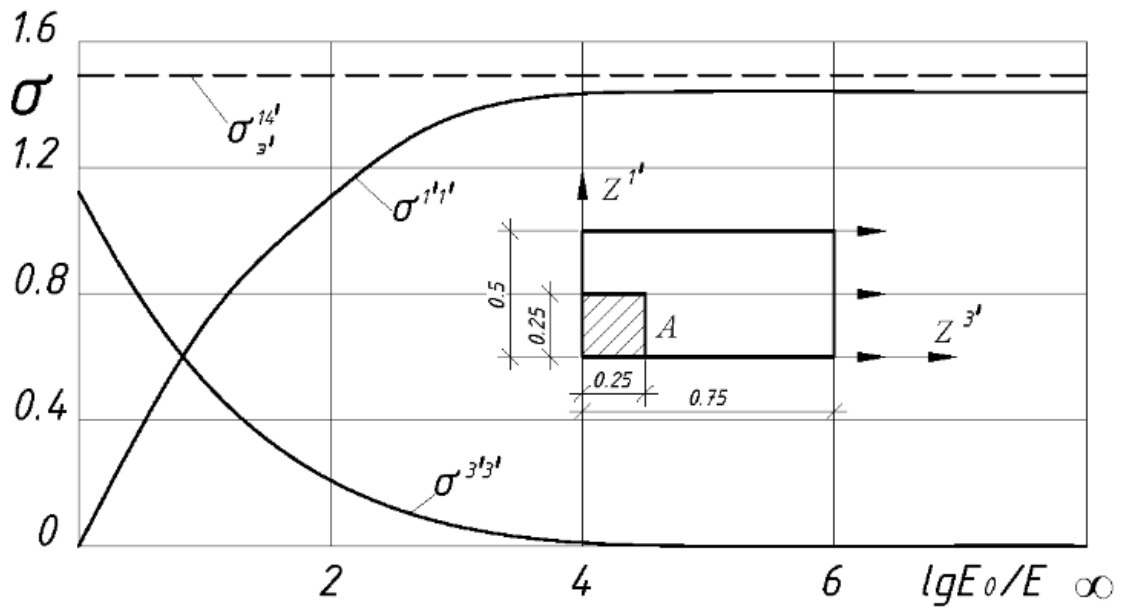


Рис.3.6. Пружне деформування прямокутної пластини з квадратною вставкою.

При моделюванні вирізів, обмежених координатними площинами, областю з нульовим модулем пружності важливе значення для обґрунтування достовірності результатів набуває питання задоволення природних граничних умов на вільній поверхні внутрішнього контуру.

Розглянемо розподіл напружень в скінчених елементах, що проходять через виріз. Графіки $\sigma^{z^3 z^3}$ наведено на рис.3.7. свідчать про те, що граничні умови на вільній поверхні виконуються, оскільки при наближенні до контуру отвору величина напружень прагне нуля. Для підтвердження результатів, одержуваних напіваналітичних методів при розрахунку пластини з квадратним отвором, зіставимо епюри напружень у різних перерізах з напруженнями, визначеними в роботі [72].

Спостерігається гарна узгодженість наведених на рис.3.8 епюр.

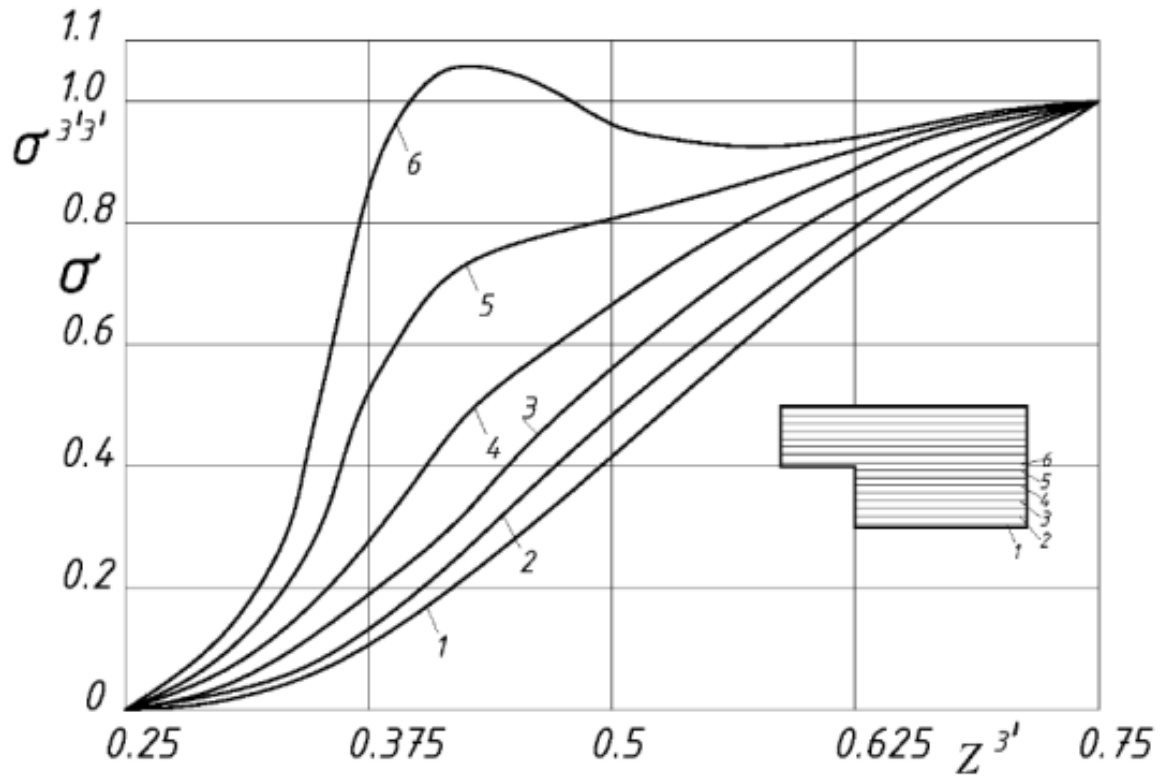


Рис. 3.7. Розподіл напружень в скінчених елементах, що проходять через виріз.

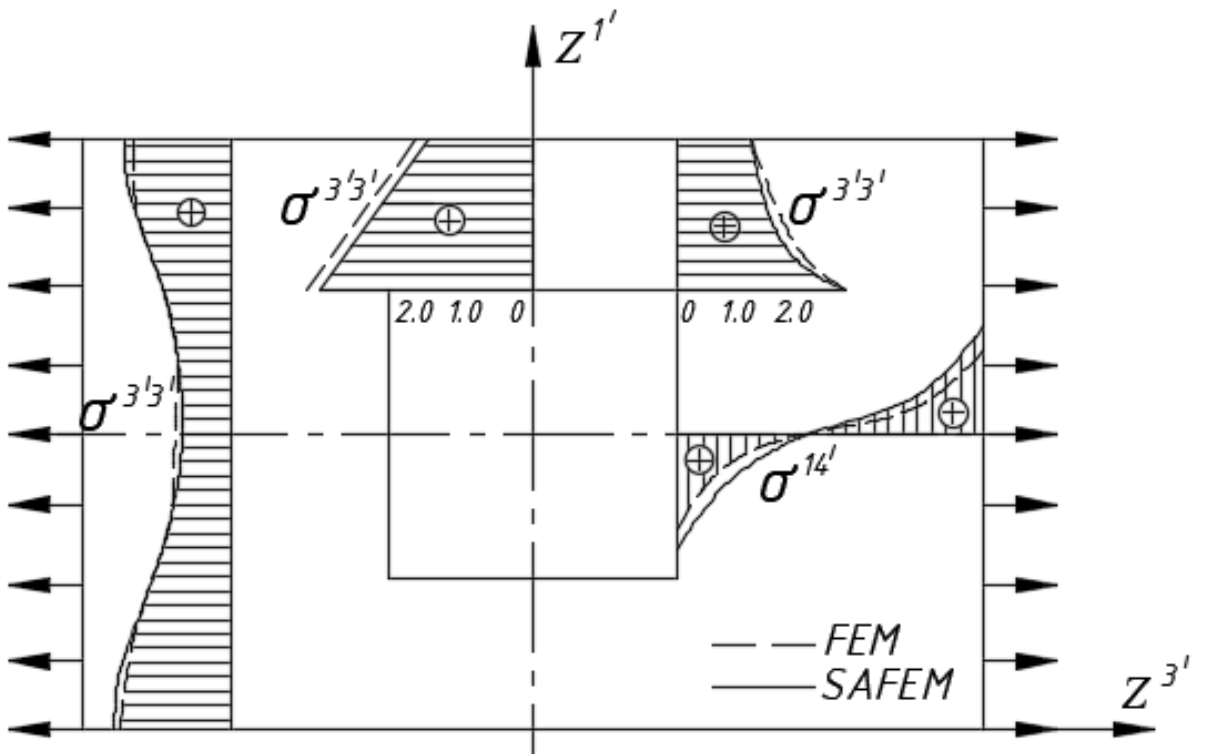


Рис. 3.8. Епюри напружень НМСЕ і МСЕ

Результати дослідження збіжності результатів НМСЕ і МСЕ в залежності від числа членів ряду, що утримуються, у напрямку Z^3 для тіла з квадратним вирізом представлені в табл. 3.5. Наведені дані свідчать, що НМСЕ дозволяє отримувати результати з більш високою точністю, ніж традиційний метод скінчених елементів при однаковій кількості невідомих.

Таблиця 3.5.

m_3	НМСЕ		МСЕ	
	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{2'}$	%
4	$7.645 \cdot 10^{-6}$	2.6	$7.452 \cdot 10^{-6}$	5.2
7	$7.913 \cdot 10^{-6}$	-0.8	$7.737 \cdot 10^{-6}$	1.44
10	$7.920 \cdot 10^{-6}$	-0.9	$7.806 \cdot 10^{-6}$	0.6

Характер напружено деформованого стану пластини з вирізом залежить від його лінійних розмірів. На рис.3.9 показані епюри напружень $\sigma^{1'1'}$ у перерізі, що проходить через вісь Z^3 при зміні довжини вирізу l .

Суцільні лінії відповідають рішенню, отриманому НМСЕ, пунктирні - МСЕ. Обидва методи дають близькі результати. При відношенні $l/L=5/6$ епюра $\sigma^{1'1'}$ носить лінійний характер і полицю можна розрахувати як защемлену балку. В цьому випадку для досягнення заданої точності обома варіантами МСЕ потрібно утримувати однакову кількість апроксимуючих функцій у напрямку Z^3 рис.3.10.

Як бачимо, при розгляді призматичних тіл зі шматково-безпервною зміною геометричних та фізико-математичних параметрів точність апроксимації переміщень поліноміальним розкладанням не поступається, а в деяких випадках і перевершує шматково-лінійну апроксимацію.

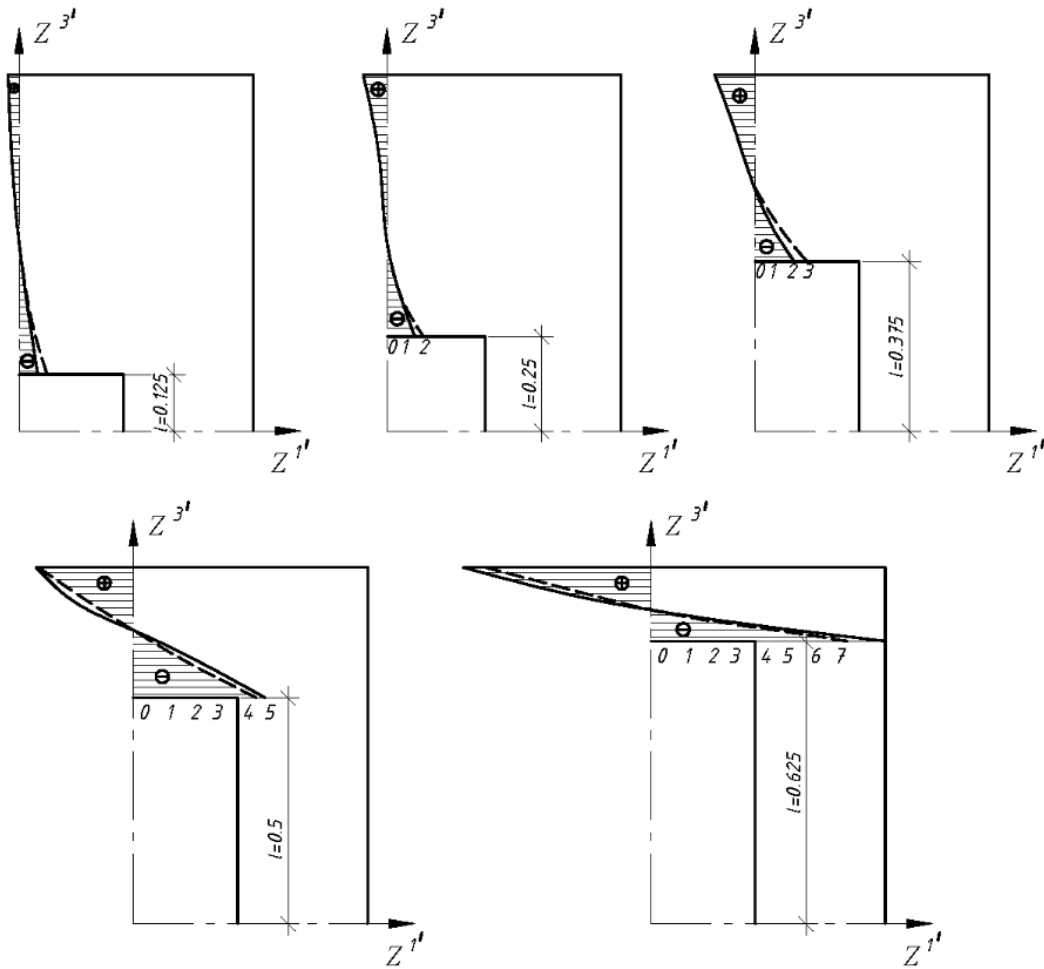


Рис.3.9. Епюри напружень $\sigma^{1'1'}$ у перерізі, що проходить через вісь Z^3 при зміні довжини вирізу l

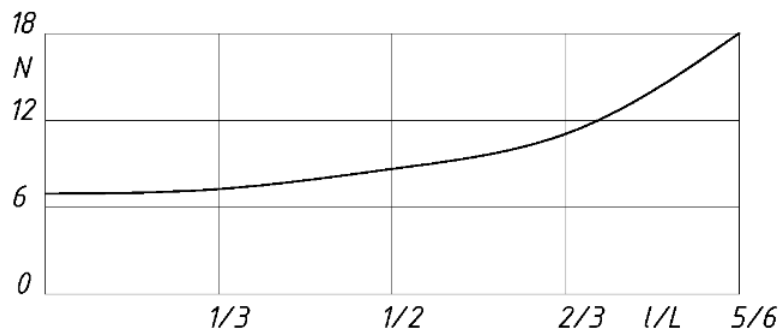


Рис.3.10. Апроксимуючих функцій у напрямку Z^3

Наявність пластичних деформацій ще більше ускладнює картину напружено деформованого ще більше ускладнює картину напружено деформованого стану об'єкта.

Зіставлення збіжності НМСЕ та МСЕ в цьому випадку проведено на прикладі пружно-пластичного деформування нескінченної смуги прямокутного перерізу з вирізом (рис.3.11). Смуга знаходиться під дією рівномірно розподіленої по верхній поверхні навантаження $q = 0.5\tau_s$. Граничні умови на торцях прийнято як (3.2).

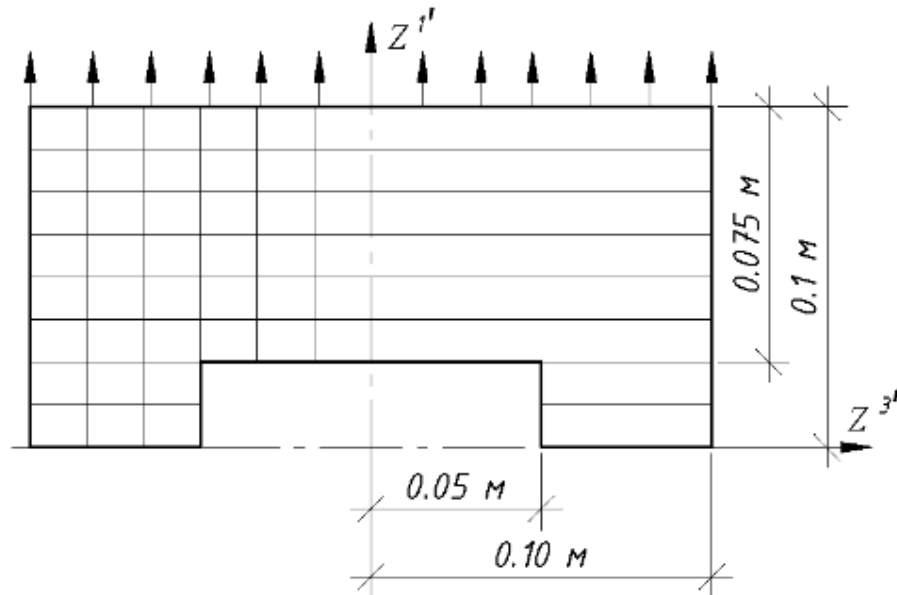


Рис.3.11. Деформування нескінченної смуги прямокутного перерізу з вирізом.

Наведені у табл.3.6 значення максимальних відносних зсувів, отримані методом скінчених елементів, дозволяють зробити висновок, що розв'язання при використанні 289 вузлів сіткової області можна прийняти як еталонний.

Талица 3.6.

m	$V_{max}^{1'}$	%	$V_{max}^{3'}$	%
25	$1.460 \cdot 10^{-2}$	3.3	$-1.075 \cdot 10^{-2}$	5.2
81	$1.508 \cdot 10^{-2}$	0.6	$-1.129 \cdot 10^{-2}$	1.1
169	$1.519 \cdot 10^{-2}$	0.6	$-1.144 \cdot 10^{-2}$	1.1
289	$1.523 \cdot 10^{-2}$	—	$-1.149 \cdot 10^{-2}$	—

Дослідження збіжності виконані при фіксованій кількості елементів вздовж Z' , що дорівнює 3.13. Графіки зміни похибки визначення максимальних переміщень НМСЕ та МСЕ для пружно-пластичного розв'язання зображені на рис.3.12. Спостерігається характер збіжності, аналогічний отриманому пружного розв'язання.

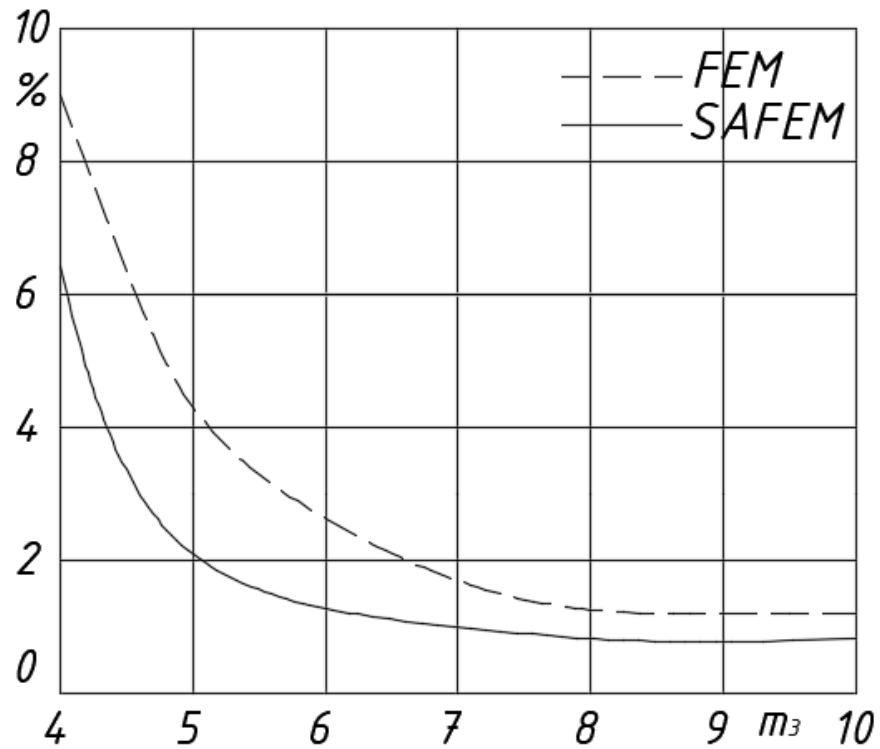


Рис. 3.12. Максимальні переміщення НМСЕ та МСЕ для пружно-пластичного розв'язку.

Отже, точність апроксимації переміщень при розв'язанні задач пружної та пружно-пластичної постановки для методу скінчених елементів та його напіваналітичного варіанта має однаковий порядок.

При розгляді збіжності напіваналітичного [72, 99] та традиційного методів скінчених елементів для широкого класу криволінійних призматичних об'єктів зі змінними фізико-механічними характеристиками та досить складним законом зміни геометрії в задачах пружної та пружно-пластичної рівноваги точність поліноміальної апроксимації переміщень, а в деяких випадках і перевершує шматково-лінійну апроксимацію.

Як було показано раніше, швидкість збіжності ітераційного процесу розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь НМСЕ методом блокових ітерацій значно перевищує швидкість збіжності розв'язків систем МСЕ.

Таким чином, ефективність розв'язання на базі НМСЕ пружних та пружно-пластичних задач для нового широкого класу конструкцій – криволінійних призматичних тіл складної конфігурації зі змінними фізико-механічними параметрами за наявності вирізів та отворів перевершує ефективність застосування традиційного МСЕ.

3.2. Достовірність напіваналітичного методу скінчених елементів при розрахунку криволінійних неоднорідних призматичних тіл

Достовірність застосування створеного чисельного підходу до дослідження призматичних просторових об'єктів із змінними фізичними та геометричними параметрами підтверджена шляхом розв'язання контрольних задач у пружній, пружно-пластичній постановці та з урахуванням великих пластичних деформацій.

В рамках пружного підходу розглянуто просторову задачу про нерівномірно навантажену оболонку, серединна поверхня якої має форму еліптичного параболоїда (рис. 3.13):

$$Z^{1'} = \left[1 - \frac{(2Z^{3'} - a)^2}{2a^2} - \frac{(2Z^{2'} - b)^2}{2b^2} \right] \quad (3.6)$$

Для цього задачі прийнято такі значення констант: $a=10$, $b=12$. Товщина оболонки $h = 2$. Модуль пружності матеріалу $E=1$ коефіцієнт Пуассона ($\nu=0,3$).

Граничні умови на торцях задаються для серединного шару як:

$$\text{при } Z^{3'} = 0, Z^{3'} = a, \sigma^{3'3'} = U^{1'} = U^{2'} = 0, \quad (3.7)$$

при $Z^{2'} = 0, Z^{2'} = b, \sigma^{2'2'} = U^{1'} = U^{3'} = 0,$

З огляду на симетрії розглядається одна четверта частина оболонки.

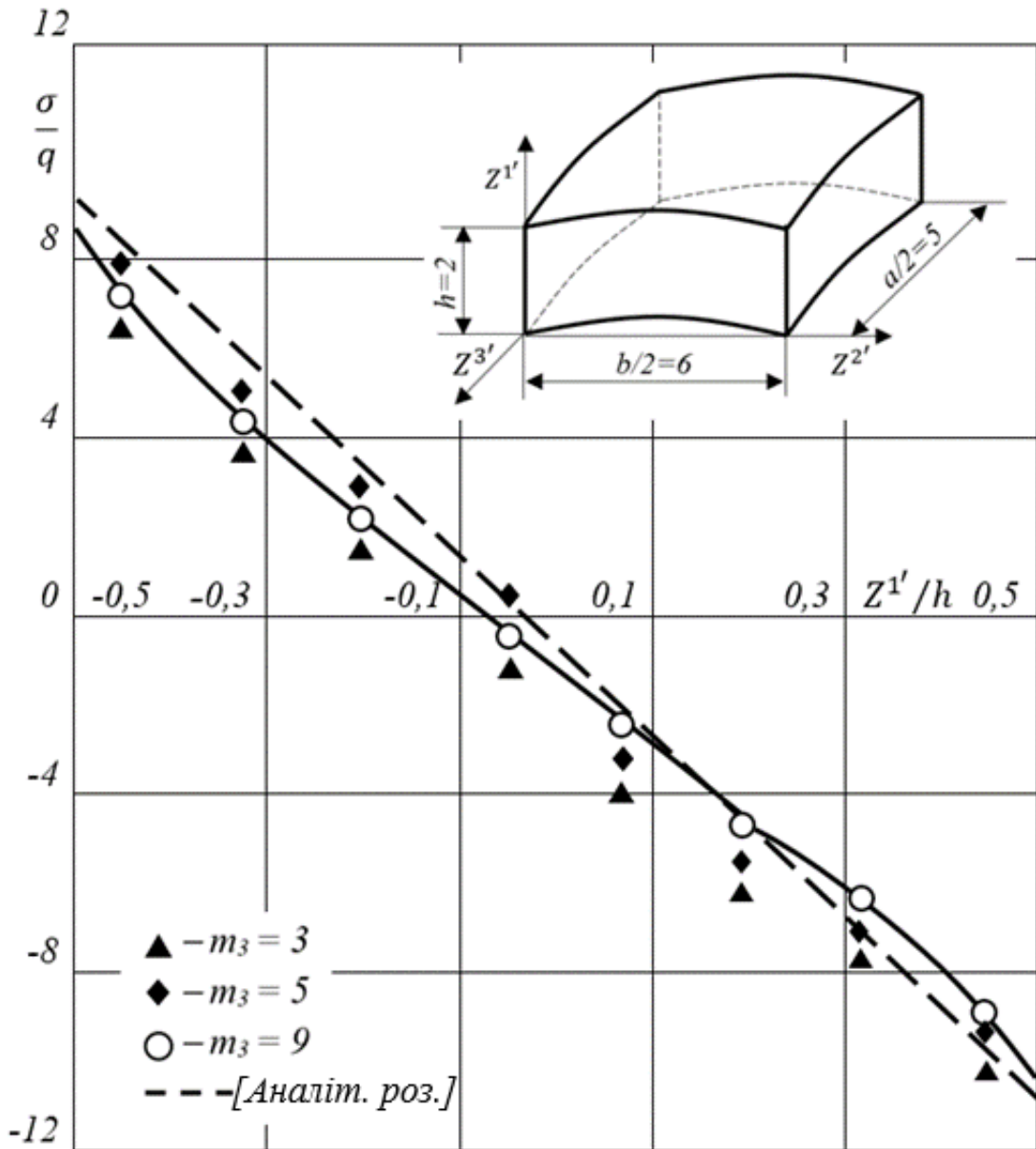


Рис.3.13. Нерівномірно навантажена оболонка, серединна поверхня якої має форму еліптичного параболоїда

Навантаження здійснюється за зовнішньою поверхнею тіла розподіленим навантаженням, інтенсивність якої визначається за формулою:

$$q^{1'}(Z^{2'}, Z^{3'}) = -\frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi Z^{3'}}{a} \sin \frac{\pi Z^{2'}}{b} \quad (3.8)$$

У площині поперечного перерізу здійснювалося кінцево-елементна дискретизація з однаковим числом вузлів у напрямках $Z^{1'}$ і $Z^{2'}$ рівним 9. У напрямку $Z^{3'}$ переміщення апроксимувалися розкладанням в ряд поліномам.

Для визначення необхідної кількості утримуваних членів ряду при розв'язанні задачі від зовнішнього навантаження, що змінюється за третім напрямом згідно із законом синуса, проведено дослідження збіжності (табл.3.7). Точність обчислення зміщень у напрямку $Z^{1'}$ визначалася у відсотках стосовно результату, наведеному у роботі [185].

Таблиця 3.7

m_3	$z^{1'} = 0$		$z^{1'} = 0.4$		$z^{1'} = 0.8$	
	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%
3	0.794	8.6	0.808	8.5	0.814	8.4
5	0.839	3.3	0.850	3.7	0.858	3.5
9	0.841	3.2	0.853	3.4	0.862	3.0
11	0.850	–	0.883	–	0.889	–
m_3	$z^{1'} = 1.4$		$z^{1'} = 1.6$		$z^{1'} = 2$	
	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%	$U^{1'}$	%
3	0.874	8.3	0.808	8.2	0.796	7.7
5	0.859	3.3	0.852	3.2	0.844	2.4
9	0.861	3.0	0.857	2.6	0.849	1.8
11	0.888	–	0.880	–	0.885	–

З таблиці видно, що розв'язання, отримане при утримуванні 5 членів розкладання ($m_3 = 5$) за точністю незначно поступається рішенню при $m_3=9$, при $U^{1'}$, обчислені за даною методикою, добре узгоджується з результатами авторів [185], спостерігається розбіжність у районі 3%.

При зіставленні інших характеристик напружено-деформованого стану товстостінної оболонки, зокрема напружень $\sigma^{3'3'}$, які для цього задачі є максимальними (рис.3.13), також отримані близькі результати.

Обґрунтування достовірності розв'язків, одержуваних з урахуванням НМСЕ для фізично нелінійних задач, проведено з прикладу пружно-пластичного розрахунку нерівномірно нагрітого куба, фізико-механічні характеристики матеріалу якого залежить від температури. Куб, довжина сторони якого $2a=1$, виготовлений зі сталі ЕІ 395 (рис.3.14.). Термомеханічні характеристики матеріалу наведені в роботі [185]. Об'єкт піддається дії неоднорідного температурного поля, закон зміни температури прийнятий у вигляді:

$$T = 800 \cos(\pi Z^{1'}) \cos(\pi Z^{2'}) \cos(\pi Z^{3'}) \quad (3.9)$$

Результати розв'язання цього задачі зіставлені з отриманими раніше традиційним МСЕ у роботі [72].

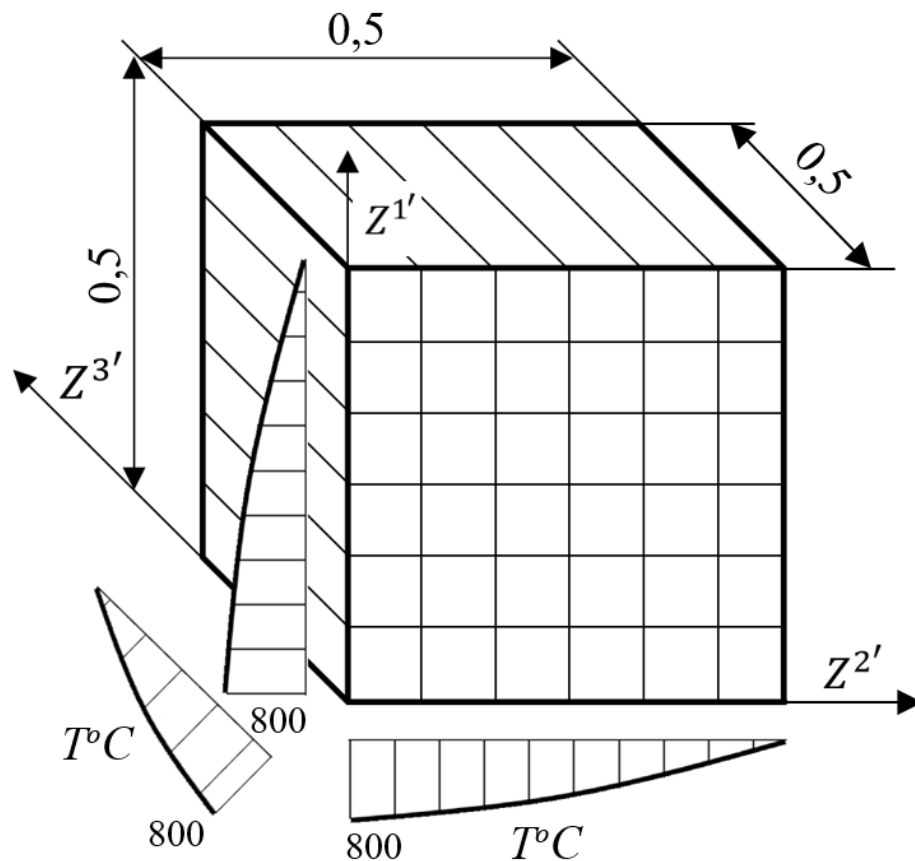


Рис.3.14. Розрахункова схема куба та епюри розподілу температур.

На рис. 3.14 представлена розрахункова схема об'єкта та епюри розподілу температур. Дослідження зі збіжності показали, що у площині поперечного перерізу слід використовувати рівномірну сітку із загальним числом елементів, рівним 16, а вздовж координати розкладання в 2 рази призводить до зміни результату менш ніж на 2%.

Результати розв'язання задачі представлені у вигляді епюр максимальної напружень для пружного та пружно-пластичного варіантів розрахунку та кривих, що зображують межу зони пластичних деформацій (рис. 3.15). Розподіл напружень $\sigma^{3'3'}$ показано поблизу вертикальної осі симетрії куба ($Z^2'=Z^3'=0,06$).

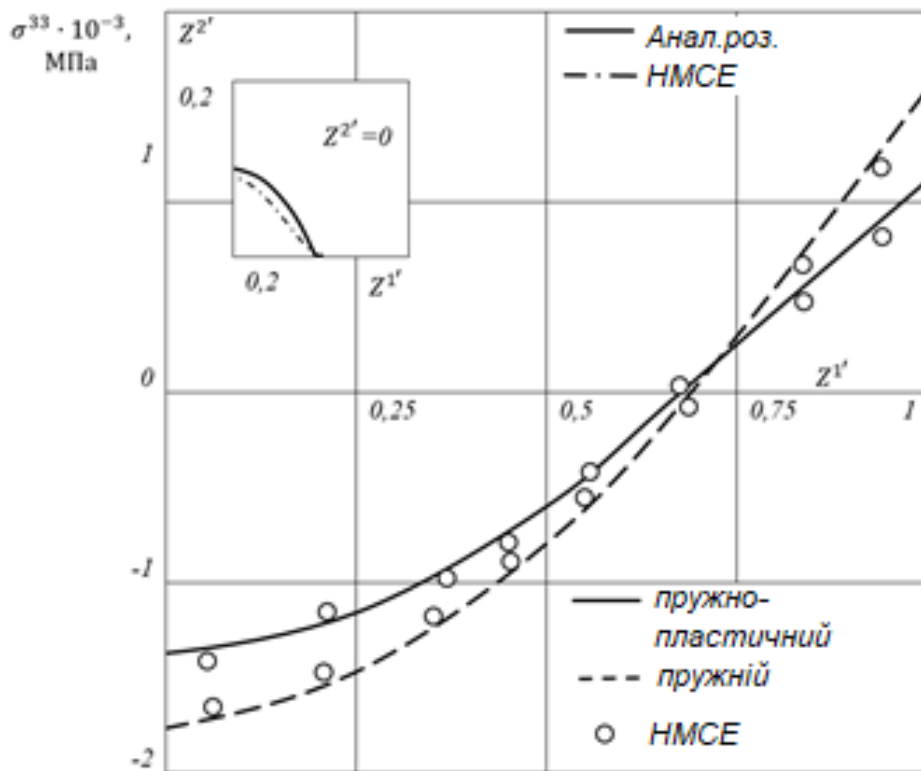


Рис.3.15. Результати розв'язання задачі розрахунку нерівномірно нагрітого куба.

Суцільна лінія відповідає пружно-пластичному, пунктирна - пружному рішенням, наведеним у [72]. Гуртками показано значення $\sigma^{3'3'}$, отримані НМСЕ.

Як бачимо, спостерігається, спостерігається гарне узгодження результатів при розгляді неоднорідно нагрітого куба і в пружній та пружно-пластичній постановці. Максимальна похибка обчислення $\sigma^{3'3'}$ не перевищує 2%.

У площині $Z^2 = 0$ позначена межа зони розвитку пластичних деформацій. Криві, побудовані на базі НМСЕ та у статті [185], практично збігаються.

Для обґрунтування достовірності результатів, одержуваних на основі розробленого підходу при розв'язанні задач про великі пластичні деформації, розглянуто пружно-пластичне деформування паралельними плитами за відсутності контактної тертя.

Початкова висота паралелепіпеда становила $2H_0=40\text{мм}$, початкові розміри перерізу $2L_0=37\text{мм}$, $2B=43\text{мм}$. Процес осідання здійснювався до висоти $2H_1=28\text{мм}$, тобто. ступінь деформації за висотою становив 30%.

$$\varepsilon_1 = \frac{H-H_1}{H} \cdot 100\% \quad (3.10)$$

Як зразок використовувалися розрахунково-експериментальні дані, наведені в роботі [72].

Розрахункова схема об'єкта представлена на рис. 3.16. Для апроксимації форми тіла використовувався набір призматичних скінчених елементів із змінними фізико-геометричними параметрами. Процес осідання моделювався завданням вимушених зсувів ΔU^1 площині ACDE.

Проведено дослідження збіжності результатів залежно від точності збіжності одержуваних розв'язків системи нелінійних рівнянь. При $\varepsilon = 10^{-5}$ було досягнуто збіжність одержуваних розв'язків, подальше зменшення параметра не призводить до скільки-небудь істотної зміни результату. Так, похибка обчислення максимальних переміщень при $\varepsilon = 10^{-5}$ склала менше 1% порівняно з отриманими при $\varepsilon = 10^{-6}$

Результати розрахунку наведено на рис.8.16 у вигляді графіків траєкторій переміщень точок А, D, E. Суцільними лініями показані траєкторії, побудовані

за результатами розв'язання задачі напіваналітичними даними. Спостерігається гарний збіг отриманих НМСЕ кривих із еталонним.

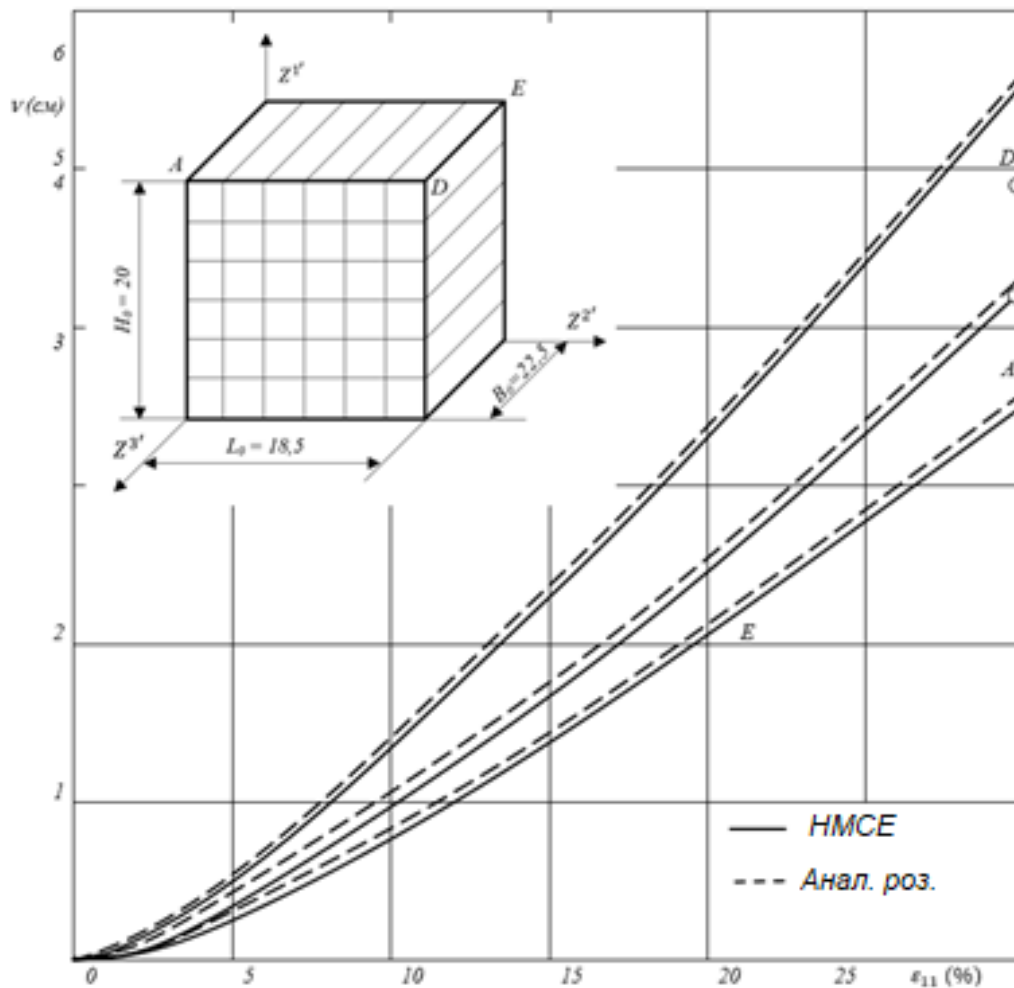


Рис.3.15. Розрахункова схема об'єкта, результати розв'язання задачі

Таким чином, показано ефективність застосування НМСЕ до розрахунку криволінійного неоднорідних призматичних об'єктів, включаючи тіла із вставками, вирізами та отворами. Розв'язання контрольних задач теорії пружності, термопружності і термопластичності, а також задач формозмінення дає можливість зробити висновок про достовірність результатів дослідження виділеного класу об'єктів на базі розробленої методики та пакету прикладних програм, що її реалізує.

РОЗДІЛ 4.

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ТА СТРУКТУРИ

4.1. Напружено-деформований стан трубчатого елемента

Трубчасті елементи є важливою конструктивною частиною енергетичних установок. Деформування трубчастого елемента відбувається в стаціонарному тепловому полі, що викликає зміни фізико – механічних характеристик матеріалу об'єкту.

Загальний вигляд трубчастого елемента показаний на рис. 4.1. Діаметр отвору $D = 2R = 2.5\text{см}$, радіус округлення зовнішнього контуру $R_1 = 2\text{см}$, ширина та висота - $B = 4\text{см}$ та $H = 4.5\text{см}$ відповідно. Глибина вирізу складає $0,5\text{ см}$, його довжина 4 см . Загальна довжина трубчастого елемента $L = 8\text{см}$.

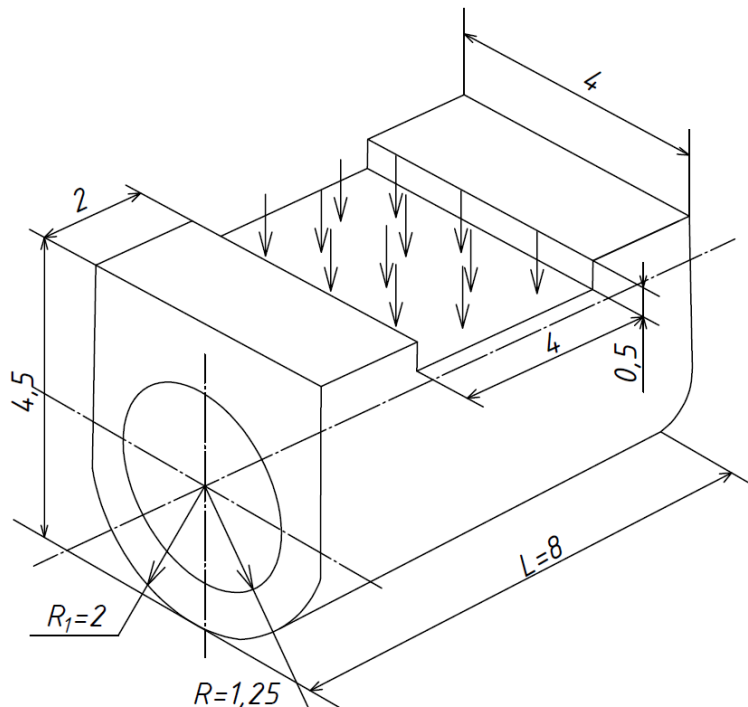


Рис. 4.1. Трубчастий елемент

По внутрішньому каналу подається робоче середовище, розігріта до $T = 100^\circ\text{C}$ під тиском $P = 60\text{МПа}$. На поверхні трубчастого елемента температура

складає 20°C . Закон розподілення температури по товщині стінки показаний на рис.4.3. В робочих режимах до діючих термосилових факторів додаються згинаюче навантаження на область прямокутної виточки, інтенсивність якої поступово зростає та може досягнути Q_{max} . Під час росту згинального навантаження на окремі ділянки тіла відбувається розвиток пластичних деформацій, що можуть викликати втрату несучої здатності конструкції.

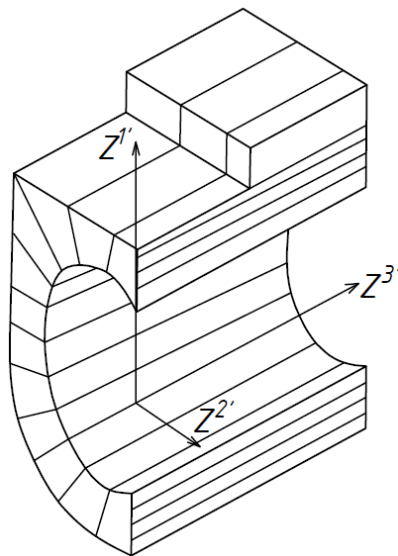


Рис. 4.2. Розрахункова схема

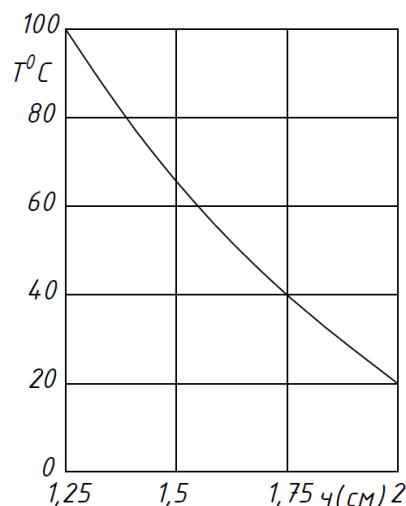


Рис. 4.3. Закон розподілення температури по товщині стінки

На торцях тіла виконуються граничні умови, що відповідають відсутності переміщень по всім трьом напрямкам:

$$\frac{U^1}{z^3 = \pm \alpha} + \frac{U^2}{z^3 = \pm \alpha} + \frac{U^3}{z^3 = \pm \alpha} = 0 \quad (4.1)$$

Термомеханічні характеристики матеріалу прийняті відповідно до приведених в [151, 152] для сталі ЄІ 395.

Дискретизація об'єкту виконувалась набором призматичних елементів з перемінними фізико – механічними параметрами. Розрахункова схема трубчастого елемента зображена на рис. 4.2. Область вирізу моделюється, нульовим значенням модуля пружності, що задається $E = 0$.

Дослідження збіжності результатів розв'язання задачі термопластичності проводилось шляхом послідовного згущення сітки скінчених елементів в поперечному перерізі тіла при одночасному збільшенні кількості членів розкладання, що утримуються. Розглянуті розрахункові схеми із загальним числом невідомих $M = 2754, M = 6804$ та $M = 14400$. Необхідна точність розрахунку параметрів напружено – деформаційного стану досягається при $M = 6804$, що відповідає використанню 189 вузлів у площині та 12 членів розкладання. Результати розв'язання при такій сітці відмінні від отриманих при $M = 14400$ не більше ніж 1,5%.

Як правило, розв'язання аналогічних задач проводиться в плоскій постановці без врахування згинаючого навантаження. Такий підхід значно спрощує постановку задачі, однак призводить до суттєвих похибок результатів. Це наглядно проілюстроване при зіставленні епюр $\sigma^{2'2'}$, що побудовані на вертикальній осі симетричності трубчастого елемента (рис. 4.4). При нульовому значенні згинального навантаження $Q = 0$ спостерігається хороше узгодження плоского та просторового розв'язання. Наявність згинального навантаження призводить до відхилення кривих від їх початкового положення. Максимальна похибка результатів складає майже 50%.

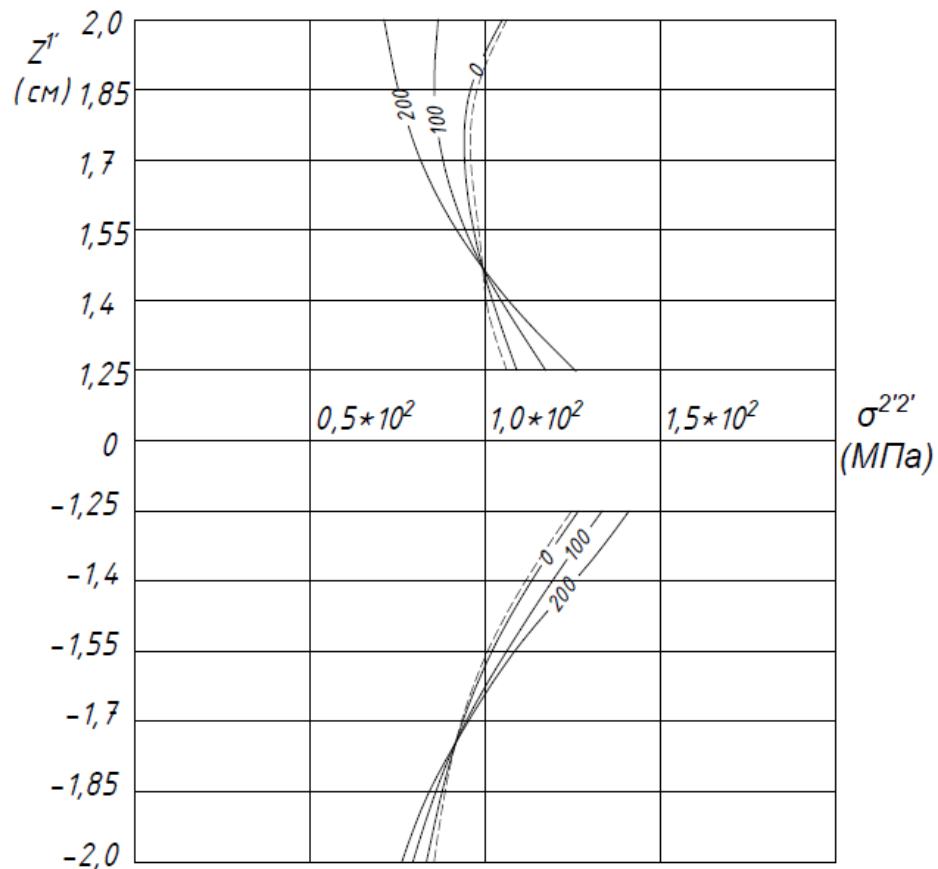


Рис. 4.4. Зіставлення епюр $\sigma^{2'2'}$, побудованих на вертикальній осі симетрії трубчастого елемента.

Однак, данні розв'язання просторової задачі дозволяють розглядати не тільки кількісні зміни в областях максимальних напружень, але й якісному перерозподілі їх картини по внутрішньому діаметру трубчастого елемента (рис. 4.5). Результати розв'язання плоскої задачі показані пунктирною лінією, та свідчить про те, що максимальне $\sigma^{2'2'}$ досягається при значенні кутової координати $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тобто в області, що відповідає виступу на зовнішньому контурі. У нижній частині перерізу трубчастого елемента вертикальною площиною (при $\alpha = \pi$) рівень напружень дещо менший. Просторовий розрахунок дозволив виявити, що збільшення згинаючих навантажень призводить до зміщення максимальних значень $\sigma^{2'2'}$ на внутрішньому контурі в область, що прилягає до вертикальної вісі симетрії. Так, для $Q = 10 \text{ МПа}$ також спостерігається сплеск напружень при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, однак в нижній частині

вертикальної площини наявний чіткий максимум. При значенні згинального навантаження $Q = 20 \text{ МПа}$ максимальні $\sigma^{2'2'}$ досягаються, як у випадку $Q = 10 \text{ МПа}$ при $\alpha = \pi$. Значення напружень $\sigma^{2'2'}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ стають менші, чим у верхній частині перерізу об'єкту вертикальною площиною (при $\alpha = 0$) та в області, що відповідає виступу, не спостерігається навіть локального екстремуму. На горизонтальній вісі симетрії збільшення згинаючих навантажень призводить до значного падіння напружень. При $Q = 20 \text{ МПа}$ напруження $\sigma^{2'2'}$ в цьому перерізі в два рази менше, чим визначені за результатами плоского розв'язання.

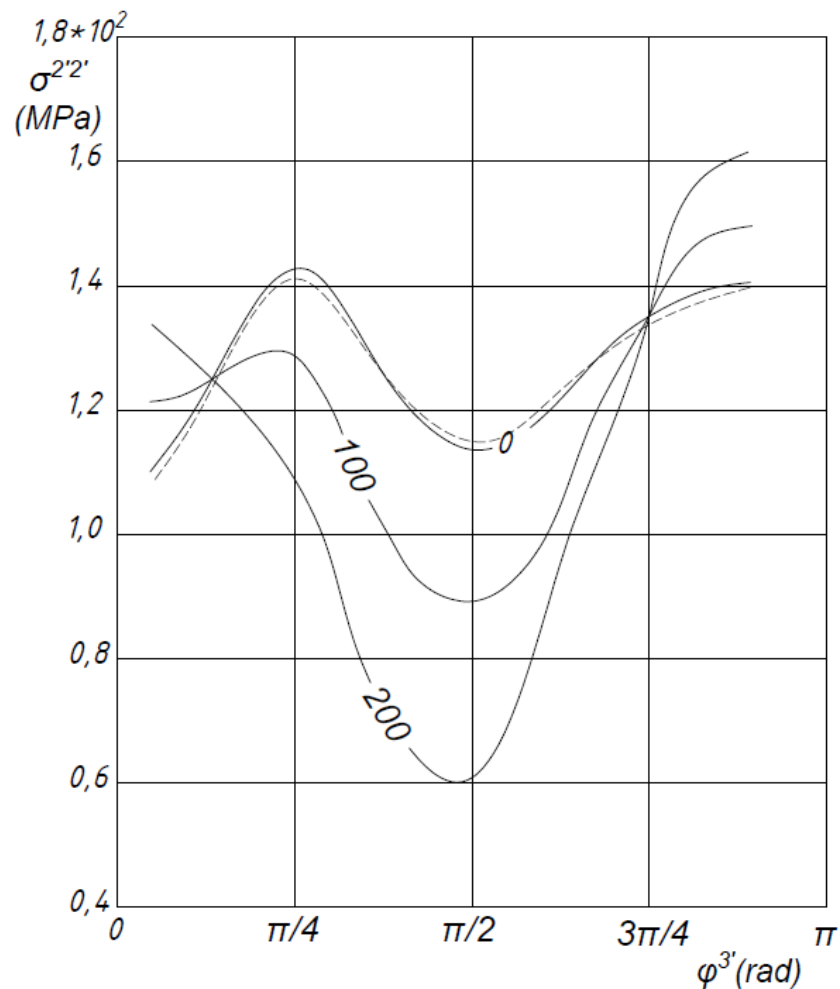


Рис. 4.5 Розподіл напружень по внутрішньому діаметру трубчастого елемента

Таким чином, наявність згинальних навантажень призводить до зникнення максимуму на епюрі $\sigma^{2'2'}$, що отриманий без урахування на внутрішньому контурі при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Характер напружено – деформованого стану по колу, отриманий в результаті просторового розв’язання, що є суттєво нерівномірним. Різниця у величинах $\sigma_{max}^{2'2'}$ та $\sigma_{min}^{2'2'}$ при $Q = 20 \text{ МПа}$ складає приблизно 11,5 МПа, в той час як перепад на епюрі $\sigma^{2'2'}$ без врахування згину не перевищує 3,5 МПа.

На рис. 4.6 представлені ізолінії інтенсивності пластичних деформацій на розгортці внутрішньої поверхні трубчастого елемента при максимальному рівні згинальних навантажень.

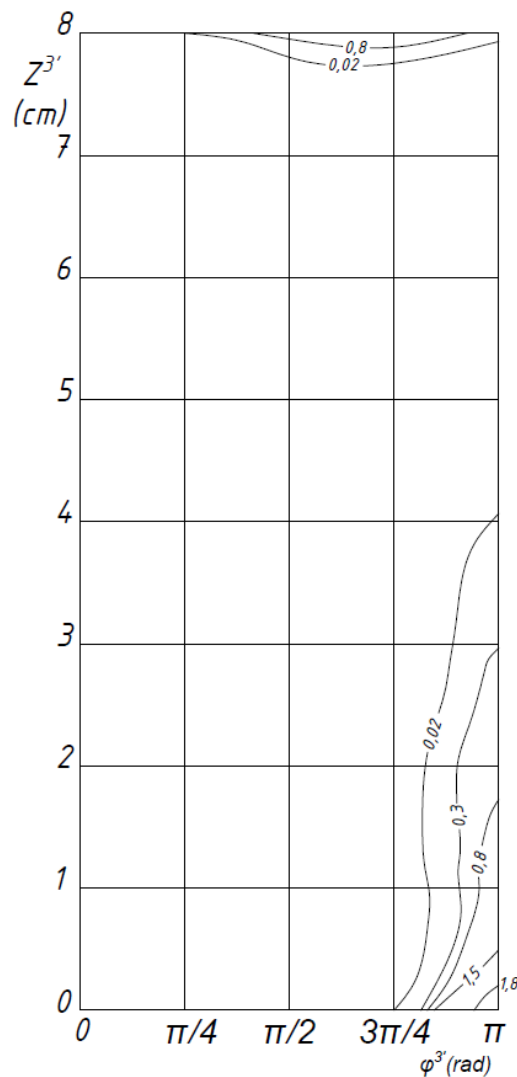


Рис. 4.6. Ізолінії інтенсивності пластичних деформацій на розгортці внутрішньої поверхні трубчастого елемента.

По вертикальній осі відкладені значення $Z^{3'}$, по горизонталі - кутові координати α . Аналіз кривих дозволяє зробити висновок, що максимальна інтенсивність пластичних деформацій досягається на внутрішньому контурі нижньої частини вертикального перерізу трубчастого зразка. Область, що прилегла до вертикальної осі пластичних деформацій сягає 65% довжини зразка, проте інтенсивність цих деформацій, на більшій частині зони їх розвиток невелика. По колу ця зона пластичності розташовується від $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ до $\alpha = \pi$, на інтервалі довжиною $\frac{\pi}{6}$ їх інтенсивність перевищує 1%. У місці жорсткої заробки розташована ще одна зона пластичної деформації, її протяжність складає приблизно $\frac{5\pi}{8}$, але глибина проникнення пластичних деформацій по перерізу не перевищує 0,1 товщини стінки.

У заключення треба зауважити, що тільки аналіз даної конструкції з позиції просторової задачі термопластичності, що забезпечує врахування залежності фізико – механічних характеристик матеріалу від температури та врахування згинаючого навантаження на область вирізу, що дозволяє виявити реальні особливості її деформування.

4.2. Дослідження впливу товщини фланця на напружено-деформований корпусної деталі

Корпусна деталь складається з фрагментів, що чергуються, загальний вигляд одного з яких представлений на рис. 4.7.

Досліджуваний об'єкт є напівциліндром змінного радіусу, з'єднаний з жорстко закріпленим на станині фланцем. Радіус внутрішньої поверхні циліндричної ділянки R в області перешийка становить 20 мм, в області максимального розширення $R = 30$ мм. Товщина оболонки h залишається постійною та дорівнює 5 мм. Між перешийком і розтрубом знаходиться

перехідна ділянка, форма якої описана дугами двох кіл радіусом 16 мм (рис. 9.24). Довжина фрагмента $L=70$ мм. Досліджується напружено-деформований стан корпусу з фланцем, товщина якого дорівнює товщині стінки циліндричної ділянки h . Радіус галтельного переходу R_2 становить 75 мм. На рис. 4.8 зображено поперечний переріз фланця та вказані всі необхідні розміри.

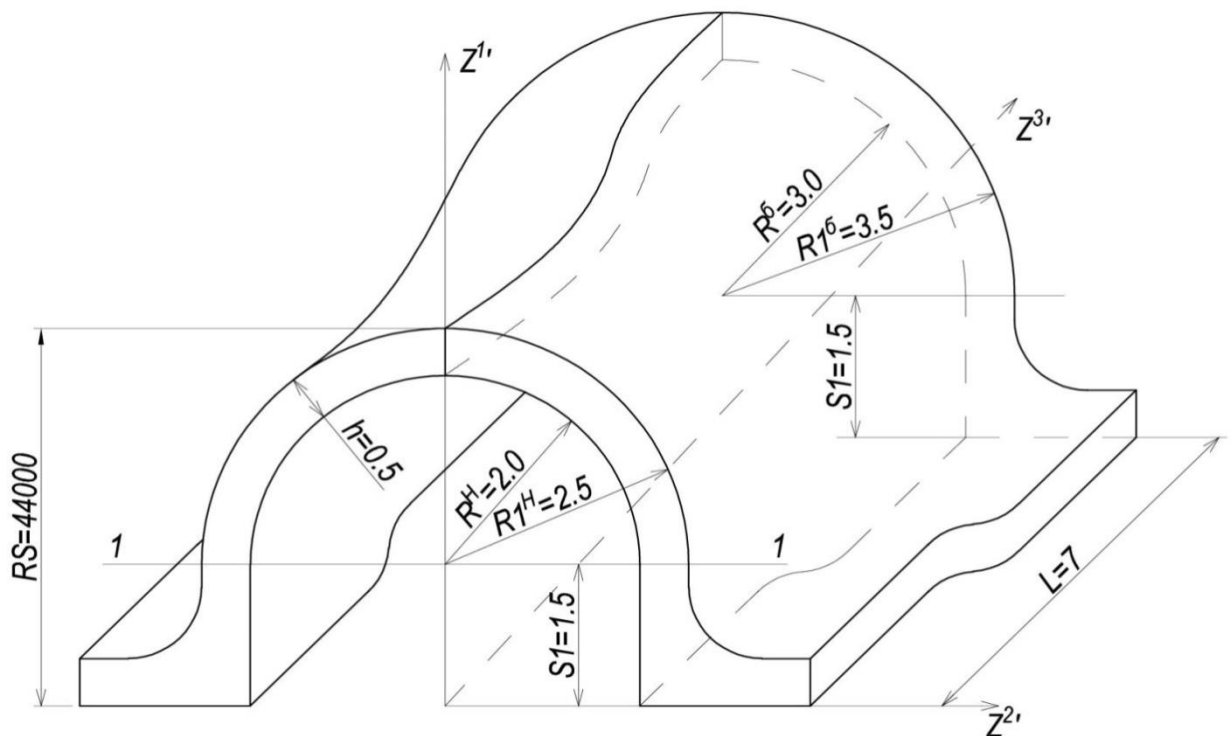


Рис.4.7. Корпусна деталь

По внутрішній поверхні корпусна деталь навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, інтенсивністю 29 МПа. Модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, межа плинності при чистому зсуві $\tau_s = 160$ МПа. Граничні умови на торцях фрагмента:

$$\frac{U^3}{Z^3} = 0,5L \quad (9.2)$$

моделюють площину симетрії. По довжині фланця прийнято відсутність зміщень у всіх трьох напрямках.

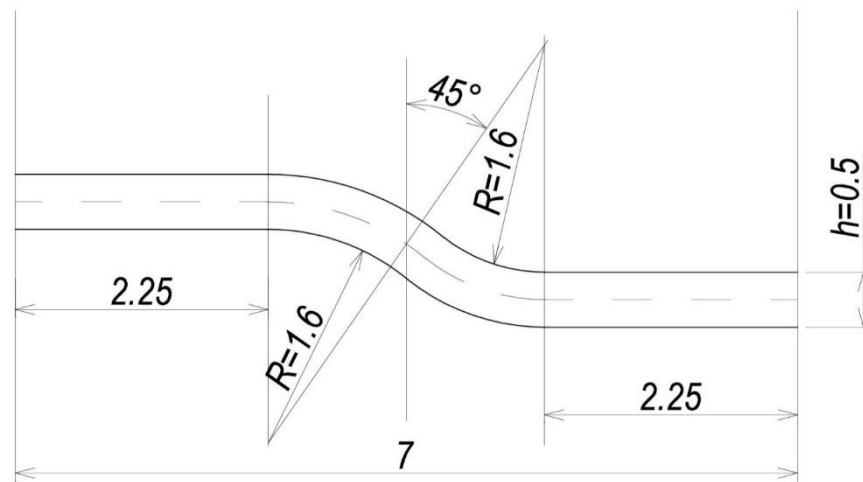


Рис. 4.8. Перехідна ділянка між перешийком і розтрубом корпусної деталі.

Розрахункова схема об'єкта показано на рис. 4.9, але в рис. 4.10а зображена апроксимуюча сітка в поперечному перерізі фланця. Для більш точного опису геометрії корпусу використовується нерівномірною сітка скінчених елементів як за товщиною, так і за довжиною об'єкта. Уздовж Z^3 застосовується розкладання в ряд за базовими функціями.

З метою обґрунтування достовірності одержуваних результатів була встановлена збіжність залежно від числа скінчених елементів у площині поперечного перерізу та числа членів ряду, що утримуються. В результаті проведених досліджень прийнята сітка скінчених елементів із загальним числом вузлів 102, вздовж Z^3 зберігалось 9 членів розкладання. Подальша зміна цих параметрів призводить до відхилень результатів розв'язання в межах 1,5%.

На першому етапі розрахунок корпусної деталі проводився пружною постановкою. Аналіз результатів розв'язання дозволяє зробити висновок, що найбільший рівень напружень досягається в точках А і С на внутрішній поверхні і в точці на зовнішній (див. рис. 4.9). Для цих точок побудовано криві інтенсивності дотичних напружень за довжиною виробу (рис. 4.11).

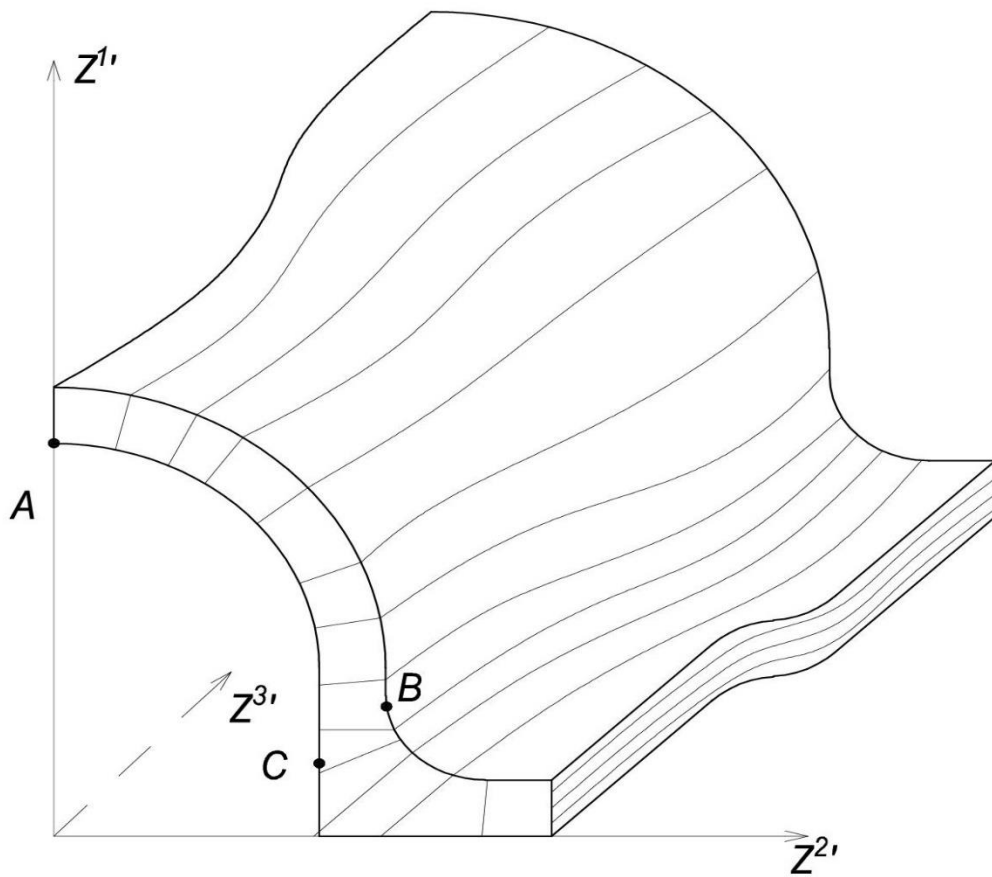


Рис. 4.9. Розрахункова схема об'єкта

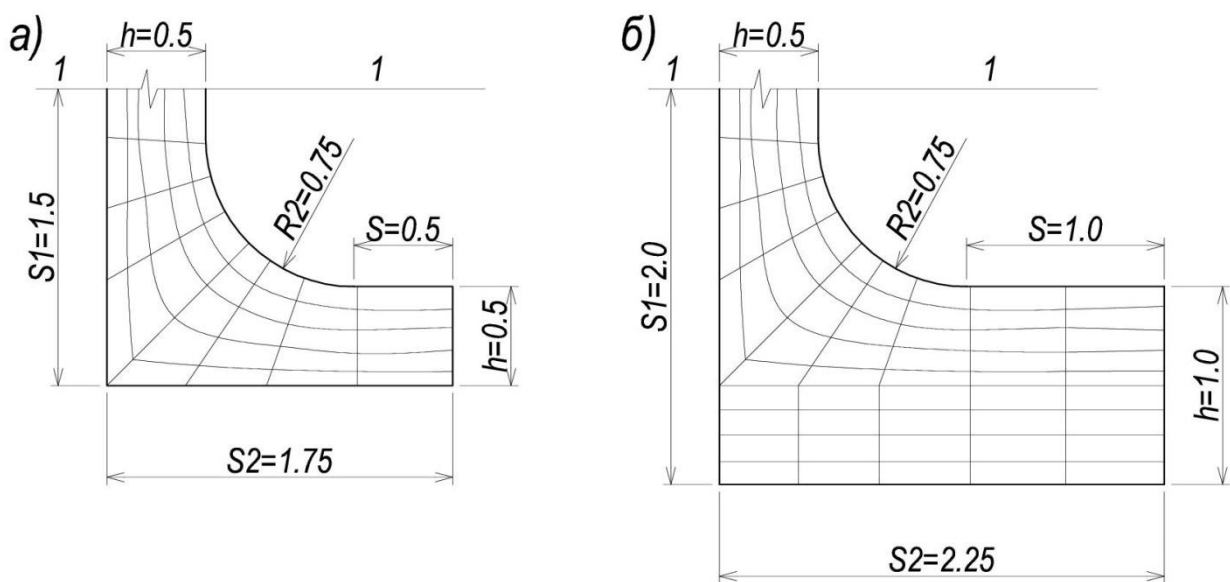


Рис. 4.10. Апроксимуюча сітка в поперечному перерізі фланця

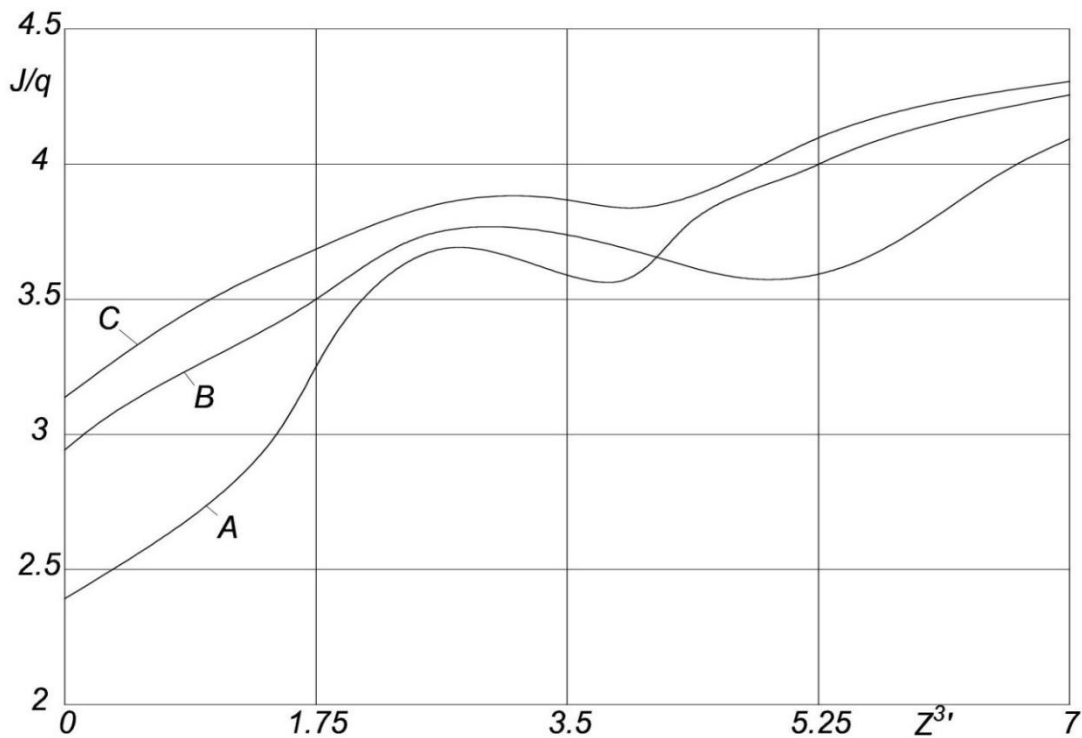


Рис. 4.11. Криві інтенсивності дотичних напружень за довжиною виробу

Як бачимо, максимальний рівень інтенсивності у всіх точках, що розглядаються, досягається в перерізі, що лежить в площині симетрії з боку розтруба. Оскільки при даній межі плинності пластичні деформації розвиватимуться при $I/q = 4$, можна прогнозувати наявність трьох зон пластичності.

Оскільки найвища інтенсивність дотичної напружень має місце на внутрішньому контурі об'єкта (точки А і С) для визначення небезпечної області побудуємо розподіл інтенсивності дотичних напружень по колу (рис. 4.12). Епюра має два яскраво виражені максимуми і за даними пружного розрахунку можна припустити наявність двох зон пластичності, що становлять небезпеку - одна в центральній частині циліндричної ділянки, інша - поблизу жорсткого закладення.

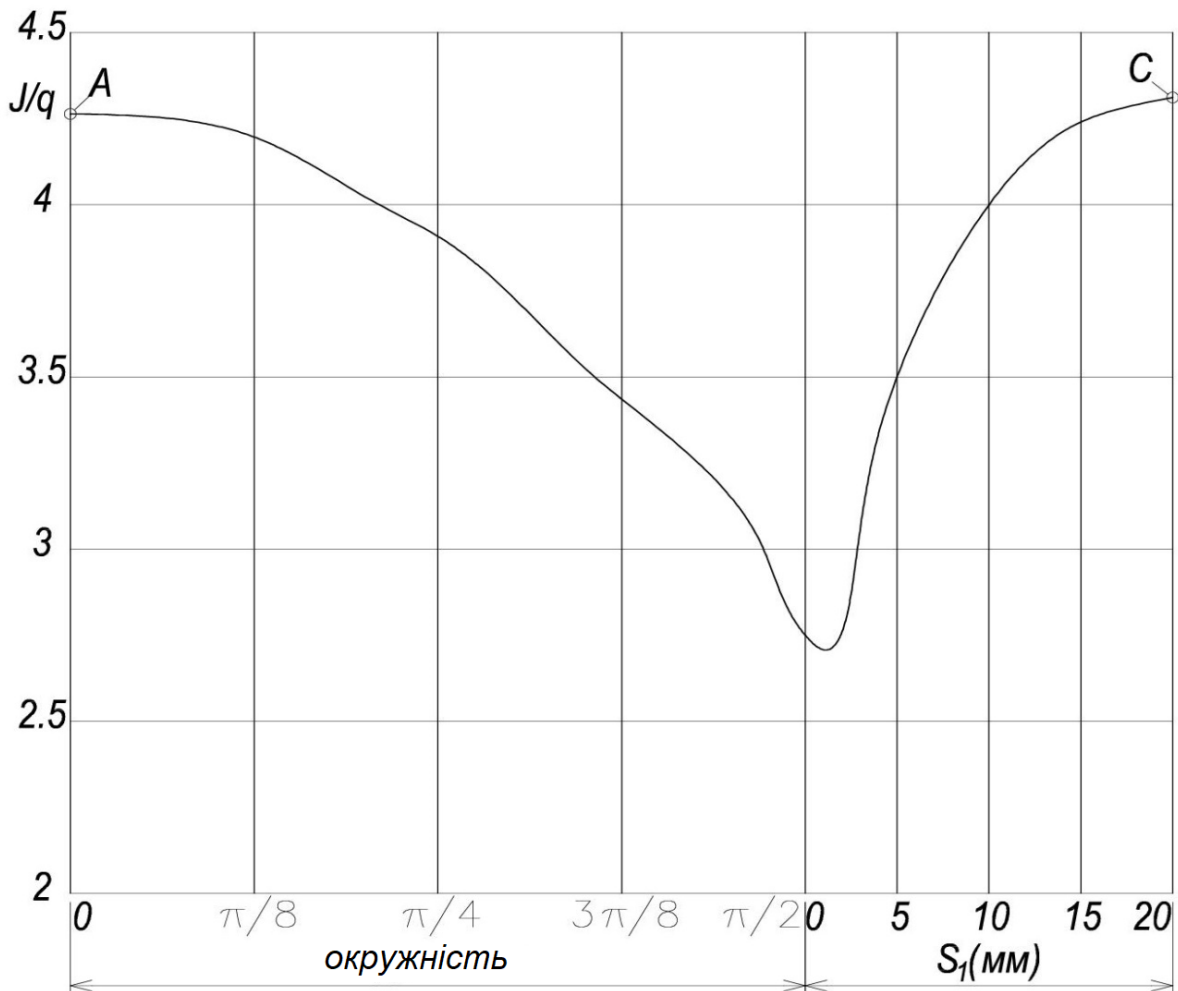


Рис. 4.12. Розподіл інтенсивності дотичних напружень по колу

Для уточнення отриманої інформації було наведено розрахунок корпусної деталі в пружно-пластичній постановці.

Результати розв'язання задачі в пружно-пластичній постановці представлені у вигляді ізоліній пластичних деформацій на рис. 4.13, 4.14. Як і передбачалося, у процесі деформування з'являються три зони пластичності, дві з яких розташовані на внутрішній поверхні – у центральній частині циліндричної ділянки (в околиці точки А) та в районі жорсткого закладення (в околиці точки С), а одна на зовнішньому контурі в області стику галтелі та прямолінійної ділянки (точка В). Хоча зони А і мають достатню протяжність вздовж Z^3 і захоплюють по довжині більшу частину розтруба, їх інтенсивність мала і в області максимуму не перевищує 0,15%. Небезпечною є зона пластичності в області закріплення фланця на станині, довжина якої перевищує довжину

розтруба. Зона С впритул прилягає до защемленого кута фланця і максимальна інтенсивність у цій галузі становить 0,5%.

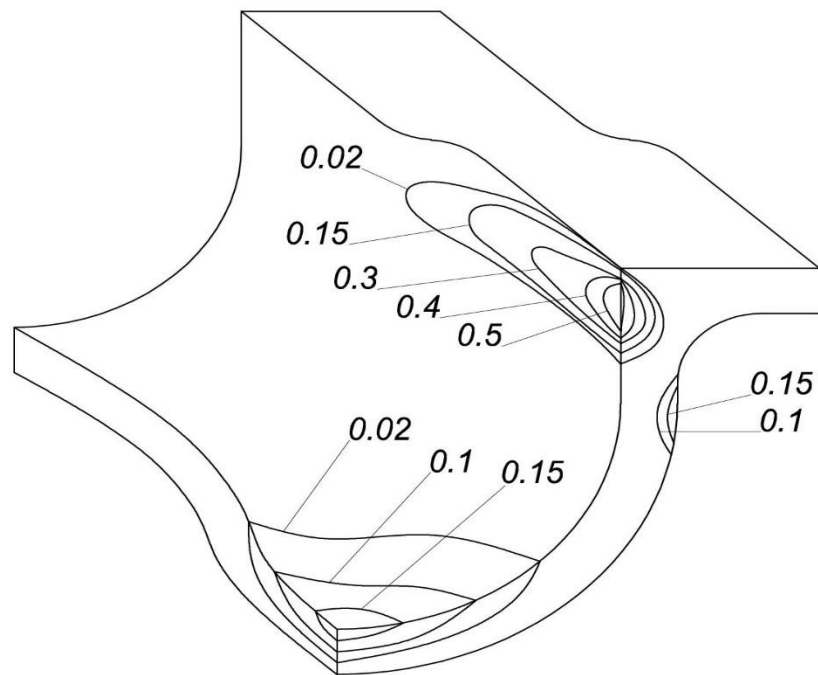


Рис. 4.13. Ізолінії пластичних деформацій

Таким чином, оцінка несучої здатності конструкції, проведена на базі пружного розрахунку, дозволила лише визначити галузі виникнення пластичних зон. Виявлення небезпечної зони пластичних деформацій можливе лише з урахуванням пружно-пластичного розв'язання.

Одним із способів зменшення пластичних деформацій в області закріплення є збільшення геометричних розмірів фланця. Розглянемо напружено деформований стан корпусу з фланцем, товщиною $2h$. Розміри поперечного перерізу потовщеного фланця та варіант розбиття його на скінчені елементи показані на рис. 4.10, б. В цьому випадку також спостерігається виникнення трьох зон пластичності. Протяжність уздовж Z^3 і максимальна інтенсивність пластичних деформацій в областях А і В для корпусу з потовщеним фланцем (рис. 4.14) незначно відрізняються від отриманих раніше з фланцем товщиною h . Надалі розрізнятимемо фланець № 1 і фланець № 2 відповідно товщиною h і $2h$.

У зоні, що лежить поблизу жорсткого закладення, інтенсивність пластичних деформацій для корпусної деталі з фланцем № 2 більш ніж у 3 рази нижча, ніж за наявності тонкого фланця і становить 0,15%.

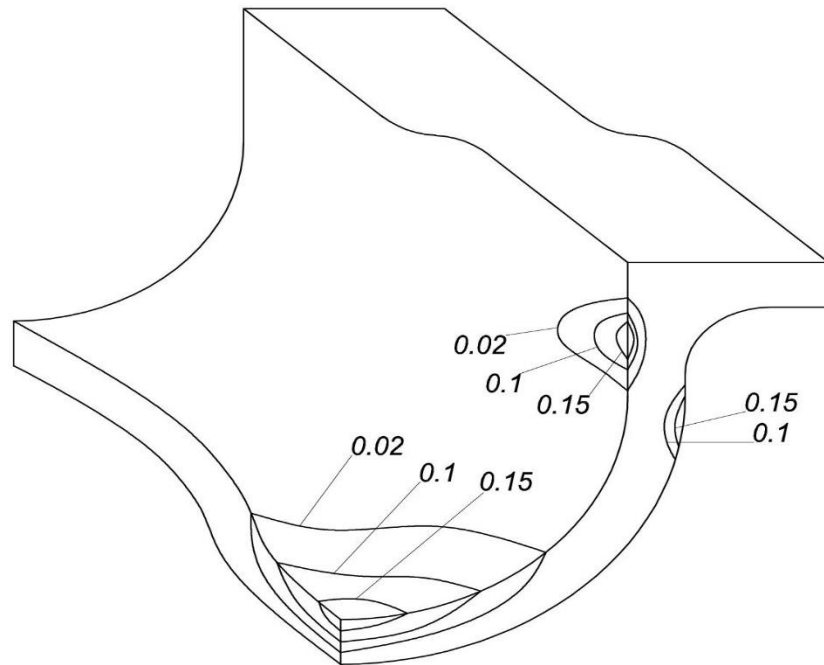


Рис. 4.14. Ізолінії пластичних деформацій

Таким чином, потовщення фланця дозволило знизити інтенсивність пластичних деформацій у небезпечній ділянці і при такому конструктивному рішенні максимальний рівень пластичних деформацій для всіх трьох зон пластичності однаковий. Слід також відзначити, що застосування потовщеного фланця дозволило локалізувати зону пластичності і її довжина в цьому випадку не перевищує половини довжини розтруба.

Представляє також інтерес зіставити характер зміни напружень за внутрішнім і зовнішнім контуром перерізу, що лежить у площині симетрії з боку розтруба, в якому досягається максимальний рівень пластичних деформацій.

Розподіл окружних напружень за внутрішнім та зовнішнім контурами деталі показано на рис. 4.15, 4.16 відповідно.

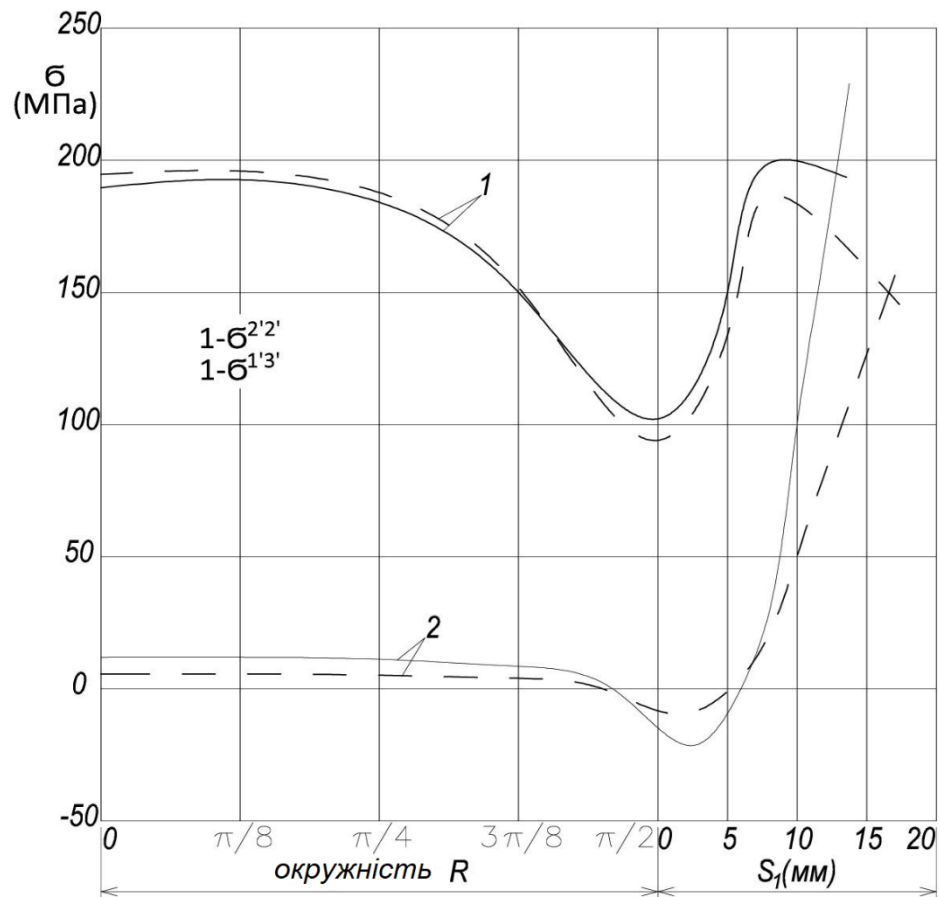


Рис. 4.15. Розподіл кільцевих напружень за внутрішнім контуром деталі

На рис. 4.15 епюри $\sigma^{2'2'}$ позначені цифрою 1, а цифрою 2 - графіки дотичних напружень, які досягають значної величини в області жорсткого зачеплення. На стику циліндричного та прямолінійного ділянок на внутрішній поверхні відбувається помітне падіння величини $\sigma^{2'2'}$, а на зовнішній – збільшення. Слід зауважити, що товщина фланця мало впливає на розподіл як нормальних, так і дотичних напружень по циліндричних поверхнях. Потовщення фланця викликає зниження $\sigma^{2'2'}$ і $\sigma^{3'1'}$ в області їх максимальних значень на внутрішньому контурі і деяке збільшення стискаючих окружних напружень в районі гальмування. Загалом застосування фланця № 2 не призвело до скільки-небудь істотної зміни картини напружено-деформованого стану в областях, що не прилягають до жорсткого закладення.

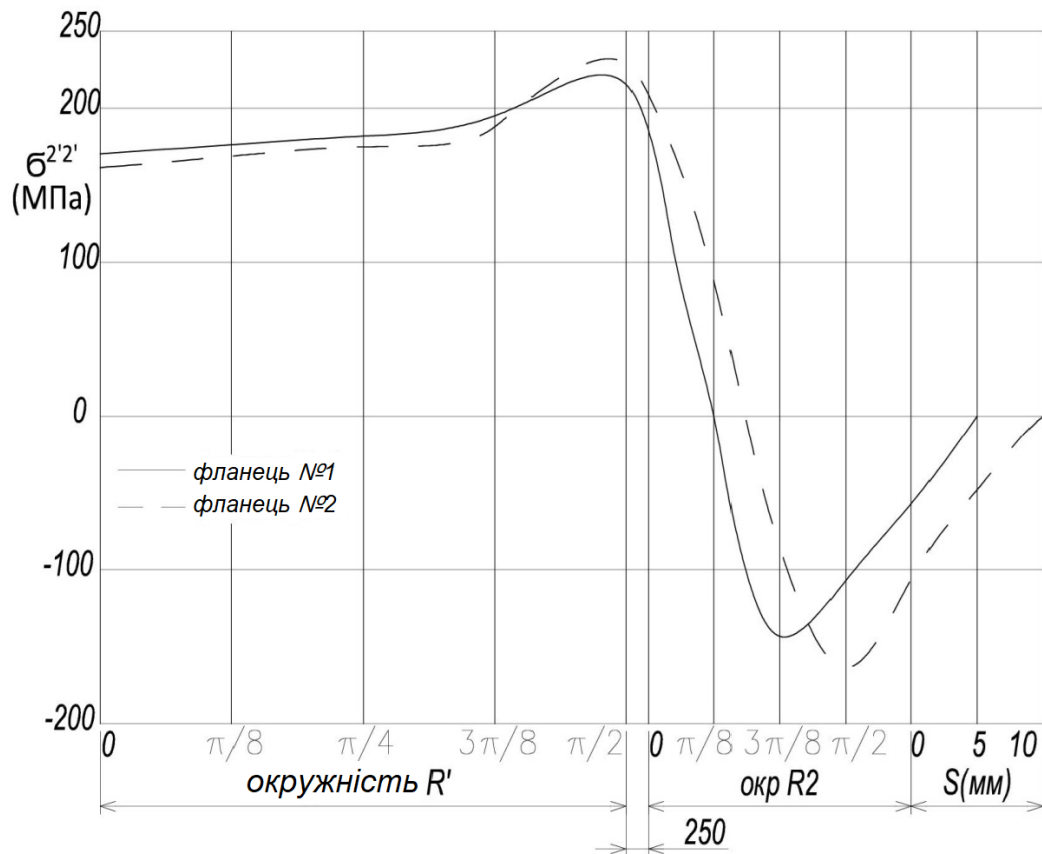


Рис. 4.16. Розподіл кільцевих напружень за зовнішнім контуром деталі

У цьому випадку додаткова витрата матеріалу на виготовлення потовщеного фланця цілком виправдана. Це призводить до зниження рівня пластичних деформацій та напружень у небезпечній області та забезпечує продовження терміну служби корпусної деталі.

4.3. Аналіз процесу протяжки полоси прямокутного перерізу

Як додаток НМСЕ до вирозв'язання просторових задач пластичного формозмінення призматичних тіл проведено дослідження процесу протягування смуги. Операція протяжки застосовується з метою збільшення довжини заготівлі рахунок зменшення її поперечного перерізу (рис. 4.17, 4.18). Контакт заготівлі та інструменту при протяжці здійснюється не по всій поверхні заготівлі, а лише на

її частині, тобто. Існують досить протяжні зовнішні зони, що не взаємодіють з інструментом.

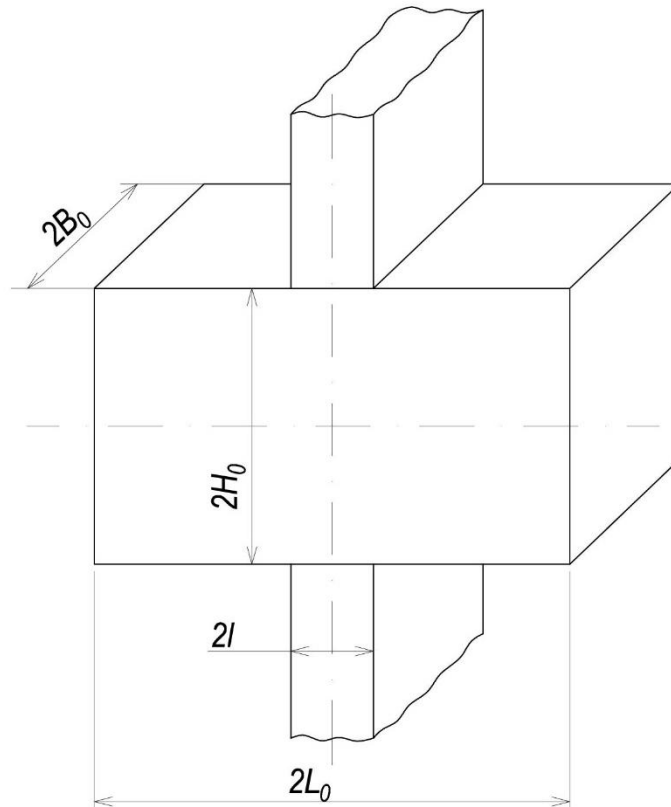


Рис. 4.17. Заготівка у не деформованому стані

Протяжка є важливою операцією обробки металів тиском, цей спосіб застосовується під час виробництва багатьох відповідальних деталей енергетичного та транспортного машинобудування. Розробка технології протяжки потребує правильної оцінки характеру напружено-деформованого стану заготівлі. Отримання такої інформації можливе лише на базі чисельних методів, серед яких найбільшого поширення набув метод скінчених елементів. В роботі процес протяжки розглянуто МСЕ в плоскій постановці [72].

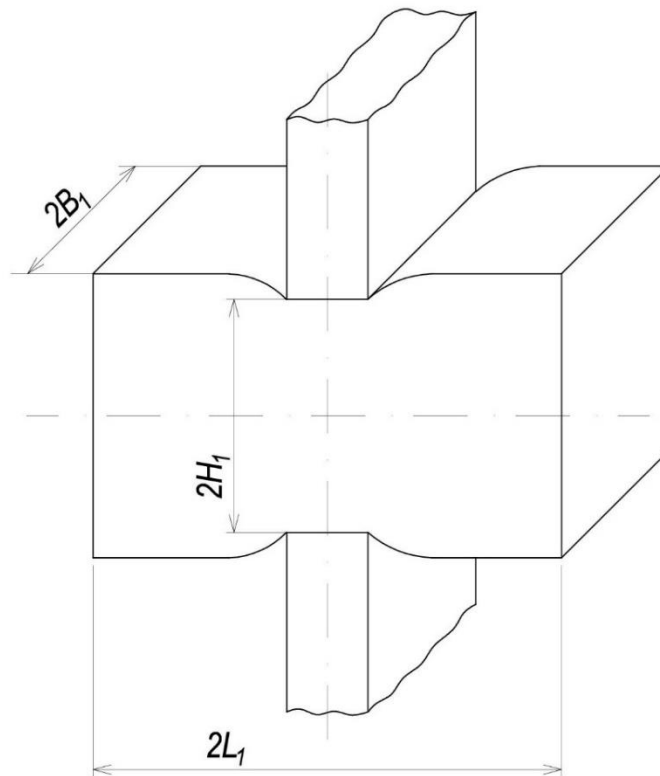


Рис. 4.18. Заготівка у деформованому стані

Мета цього дослідження полягає у визначенні просторової картини напружено-деформованого стану смуги у процесі протяжки та зіставленні просторового розв'язання з плоским.

Розглянемо протяжку смуги, розміри поперечного перерізу якої у недеформованому стані $2H_0 = 2B = 80$ мм, її довжина $2L_0 = 130$ мм, а довжина робочої частини бойка $2L = 25$ мм. Матеріал заготівлі – сплав Д16. Фізичні характеристики матеріалу прийняті відповідно до графіка кривих деформаційного зміцнення при $T = 450$ °С.

Для обґрунтування адекватності вихідних співвідношень процесу деформування були побудовані траєкторії точок С і D, що лежать на поверхні тіла, що вільно деформується (рис. 4.19). Їхня конфігурація близька до прямої, що свідчить про правильність вибору рівнів стану.

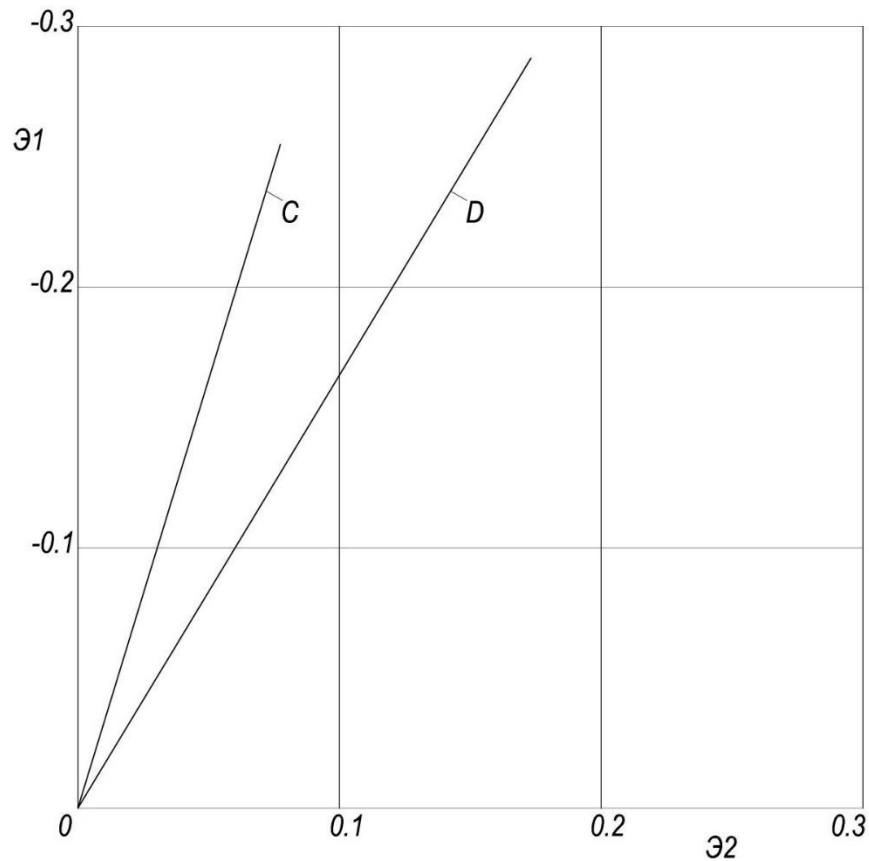


Рис. 4.19. Траєкторії точок С і D

Розрахункова схема показана на рис. 4.20. У площині поздовжнього перерізу нанесена сітка скінчених елементів, нерівномірна в напрямку Z^2 , уздовж осі Z^3 використовувалось 'використовувалося розкладання в ряд поліномам. Рух інструменту моделювався задачум жорстких зсувів ΔU^1 у напрямку Z^1 .

Як показує експеримент [153], при вибраних співвідношеннях геометричних розмірів робочої частини бойків і поперечного перерізу заготовки контактне ковзання при протяжці між сухими шорсткими плитами відсутня. Тому на поверхнях контакту заготівлі та інструменту прийняті граничні умови, що відповідають повному "прилипанню". При розв'язанні задачі в плоскій постановці для моделювання умов плоскої деформації у напрямку Z^3 приймалася відсутність зміщень U^3 бокової поверхні тіла.

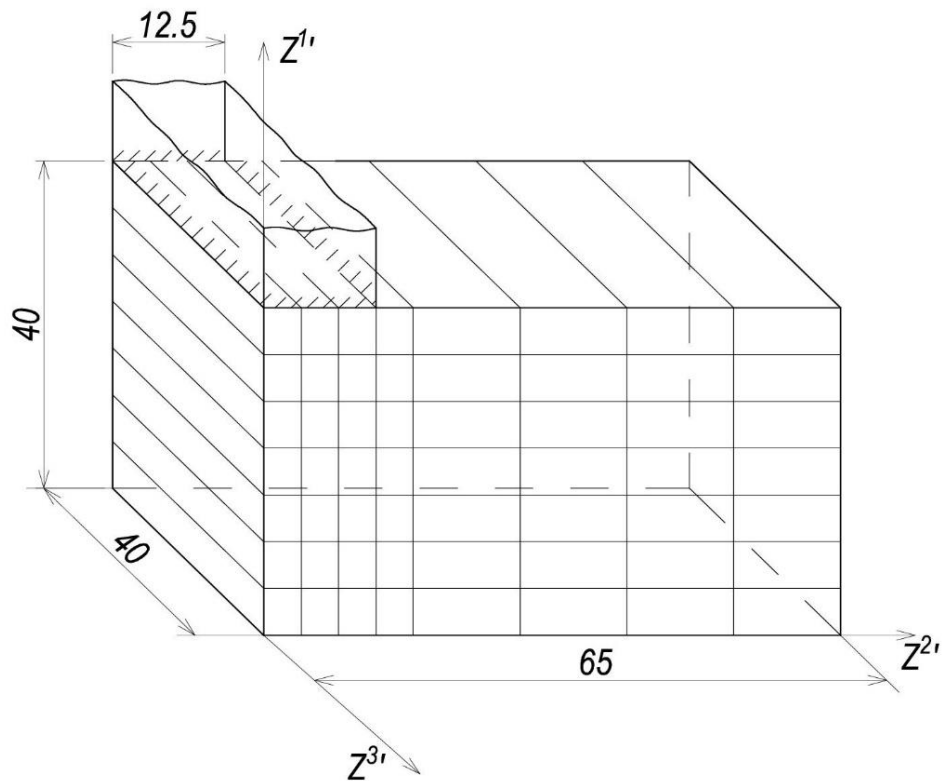


Рис. 4.20. Розрахункова схема

Процес пластичного формозмінення розглянуто до ступеня обтиснення за висотою, що дорівнює 18,8%.

Для обґрунтування достовірності одержуваних результатів було проведено ряд досліджень зі збіжності залежно від числа скінчених елементів у площині $Z_3' = 0$, числа членів, що утримуються, розкладання вздовж Z_3' , величини кроку по периметру зміщення і точності розв'язання систем нелінійних рівнянь. Було встановлено, що для апроксимації об'єкта достатньо використовувати сітку із загальним числом вузлів у площині поздовжнього перерізу, рівним 96, а вздовж Z_3' утримувати 5 перших членів розкладання. Згущення сітки скінчених елементів в 1,5 рази і збільшення числа членів розкладання, що утримуються, в 2 рази призводить до уточнення результату менш ніж на 3%. Величина кроку вимушеного зсуву $\Delta U_1'$ обрана рівною 1,5 мм і мало впливає на збіжність результату. Так, збільшення кроку в 3 рази призвело до втрати точності обчислень лише на 1%. Дослідження точності розв'язання систем нелінійних

рівнянь показало, що для даної задачі збіжність була досягнута при $E = 10^{-5}$. Збільшення параметра E на порядок дало уточнення на 1,7%.

Один із варіантів положення апроксимуючої сітки в деформованому стані представлений на рис. 4.21. Для деталізації зміни форми тіла у процесі протяжки розглянемо переміщення найбільш характерних ділянок тіла. На рис. 4.22-4.24 наведені епюри переміщень U_3' точок бічної поверхні тіла в поперечній площині симетрії, U_3' в поздовжній площині симетрії та U_2' по лінії АВ у поздовжній площині симетрії на різних стадіях протяжки. Цифрами 1 позначені криві, отримані при $E_1 = 3,8\%$, цифрами 2 – при $E_1 = 11,3\%$, 3 – при $E_1 = 18,8\%$. Пунктирною лінією (рис. 4.24) показано відповідну епюру U_2' , побудовану за результатами розв'язання плоскої задачі.

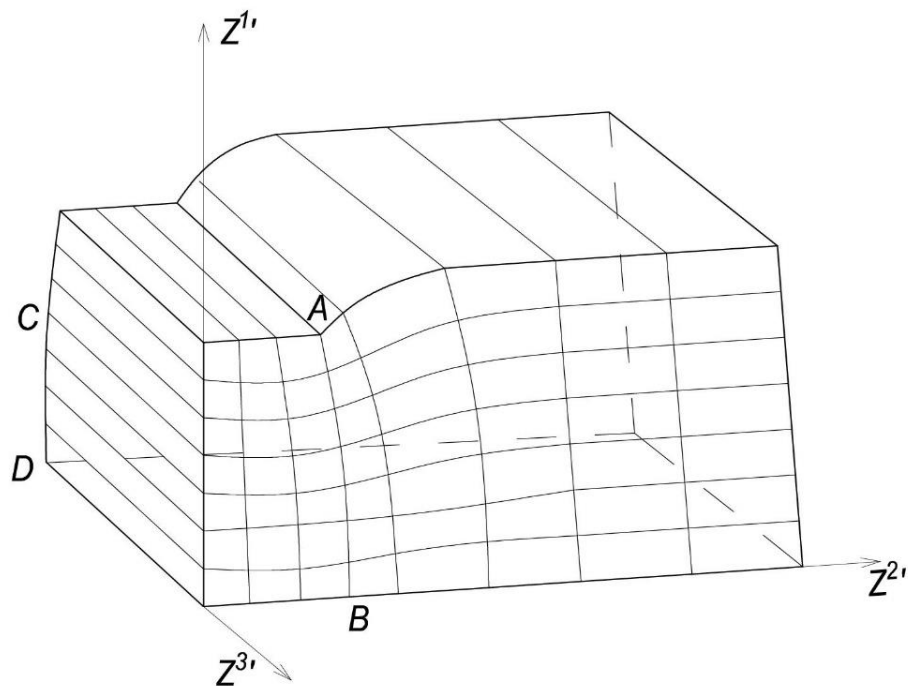
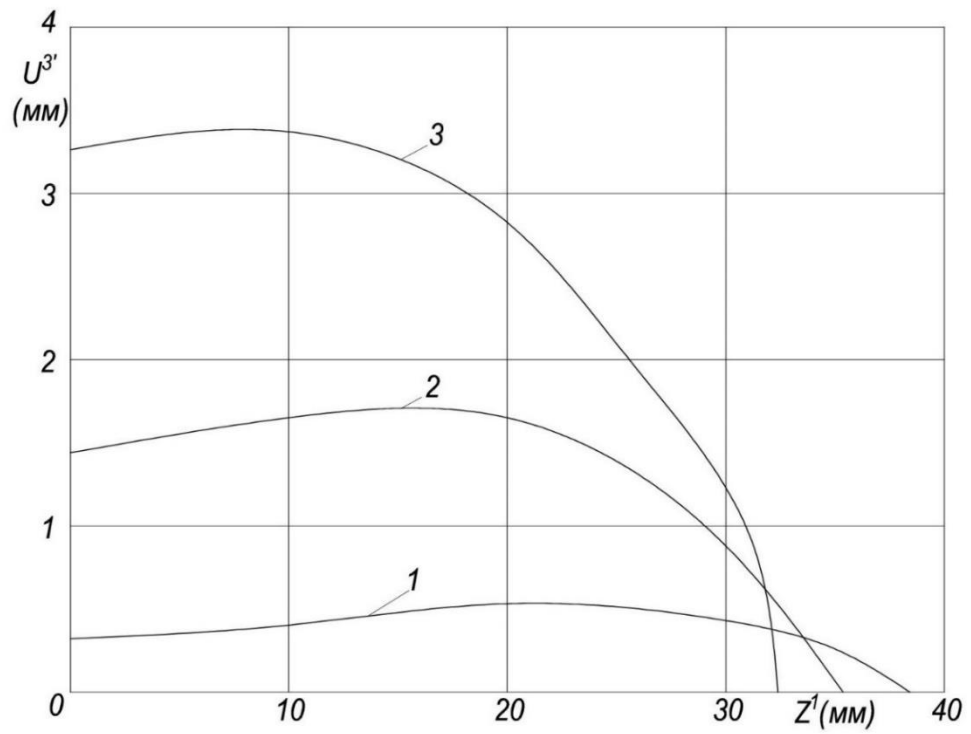
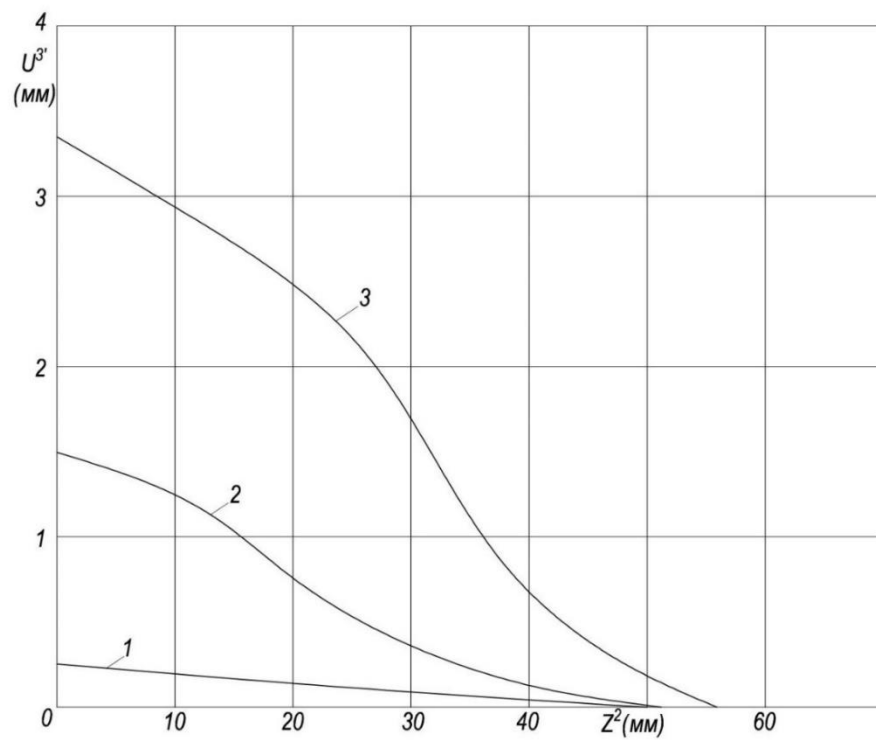


Рис. 4.21. Апроксимуюча сітка в деформованому стані

Основна відмінність просторового розв'язання від плоского полягає в тому, що бочкоутворення відбувається не тільки в площині $Z^3 = 0$, але і по всій бічній поверхні заготовки (рис. 4.22, 4.23).

Рис. 4.22. Епюри переміщень $U^{3'}$ Рис. 4.23. Епюри переміщень $U^{3'}$

Облік переміщень $U^{3'}$ призводить до суттєвої кількісної зміни картини переміщень точок тіла у поздовжній площині симетрії (рис. 4.24). В області

максимальних зсувів U^2 плоске розв'язання дає результат, завищений на майже 60% порівняно з просторовим.

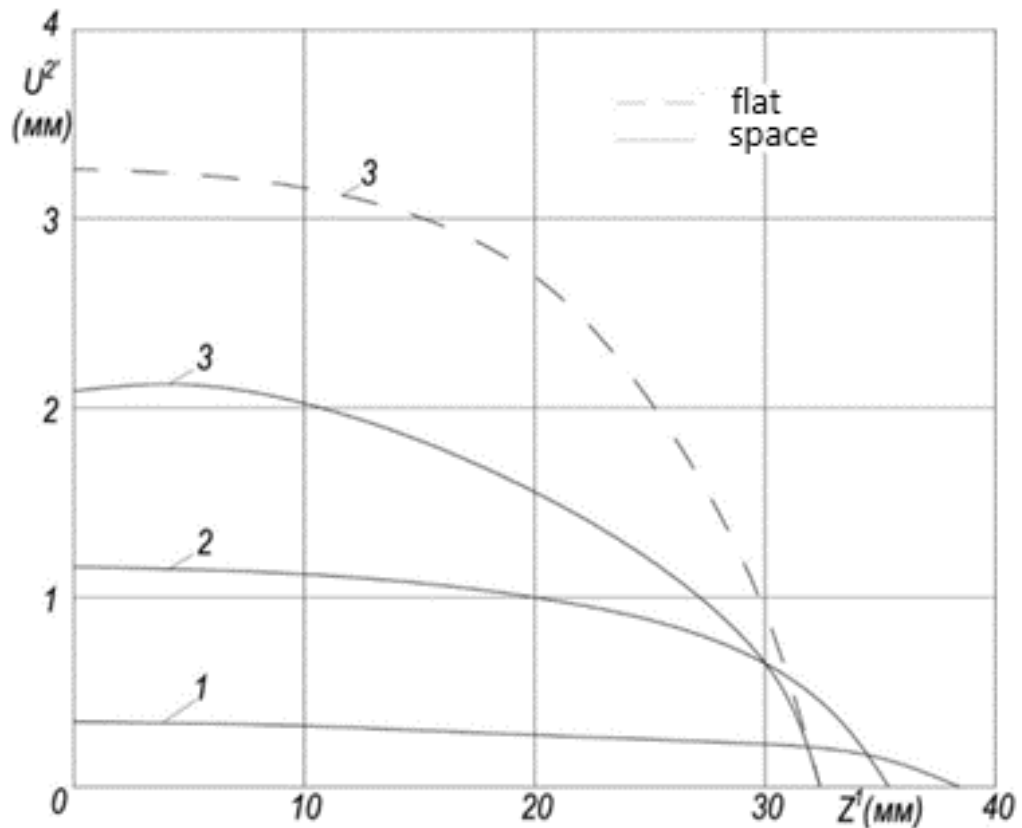


Рис. 4.24. Епюри переміщень U^2

Епюри деформацій по координаті Z^1 на осі симетрії заготовки при максимальному ступені обтиснення представлені на рис. 4.25. Плоске розв'язання (пунктирна лінія) дає поздовжні деформації ϵ^{22} на осі симетрії на 60% завищені в порівнянні з тривимірним. Нижчий рівень деформацій ϵ^{22} , отриманих у просторовій постановці, пов'язаний з урахуванням формозмінення вздовж Z^3 і, отже, наявністю деформацій ϵ^{33} . Аналогічне розбіжність результатів спостерігається і зі зіставленні графіків ϵ^{22} , побудованих уздовж поздовжньої осі симетрії заготовки (рис. 4.26).

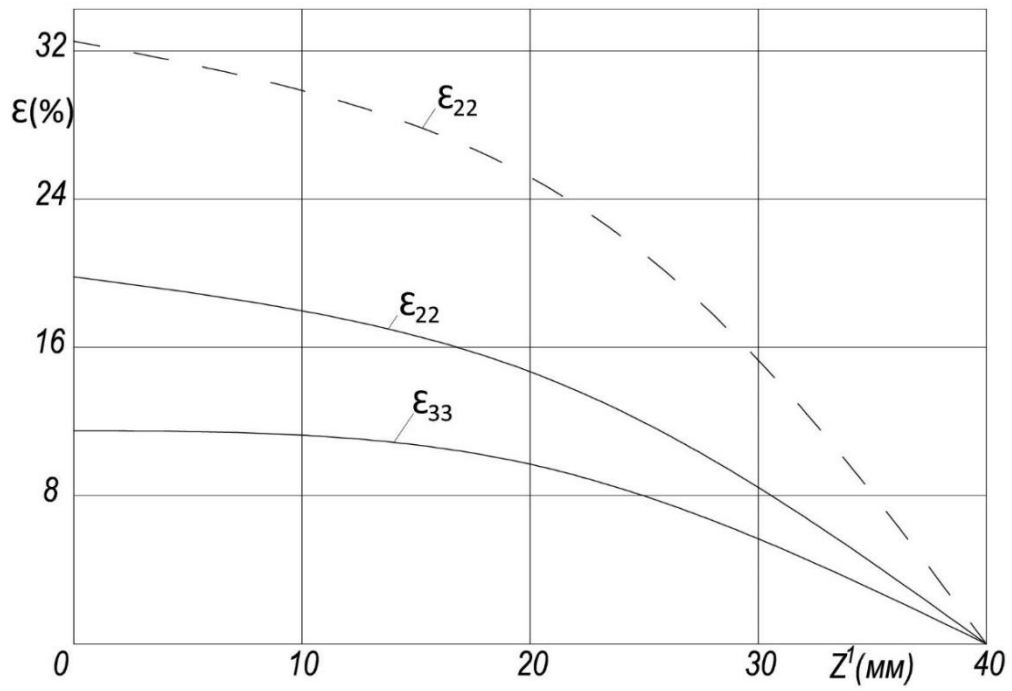


Рис. 4.25. Епюри деформацій

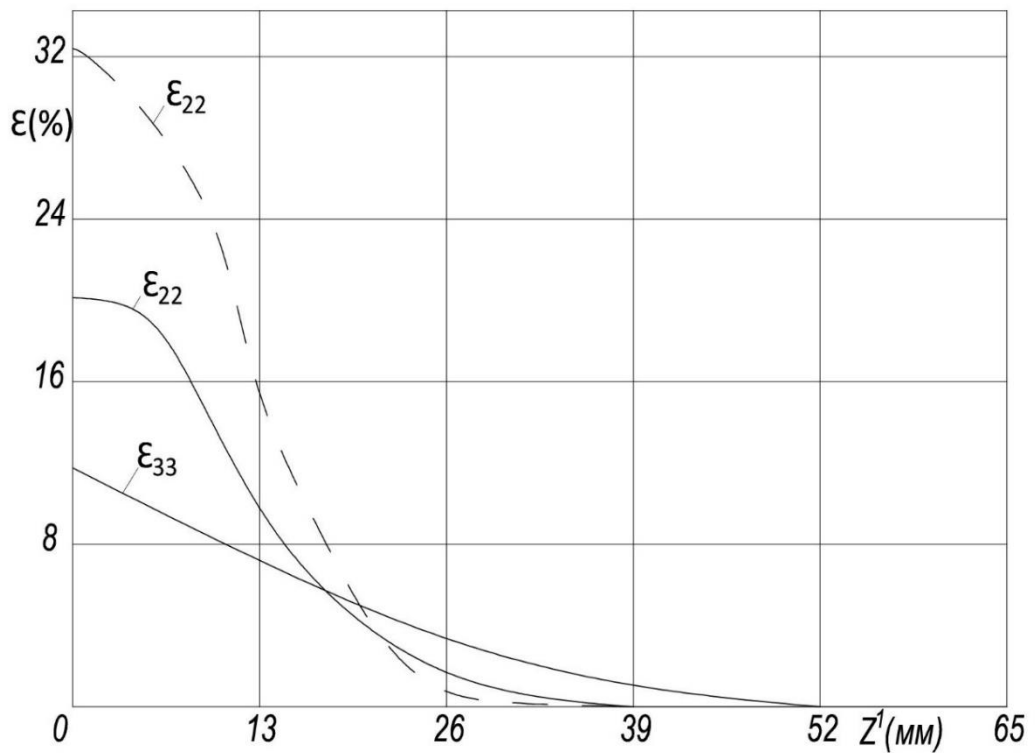


Рис. 4.26. Епюри деформацій

На рис. 4.27, 4.28 наведено ізолінії інтенсивності пластичних деформацій у поздовжньому перерізі тіла площиною $Z^3 = 0$ відповідно для просторового та

плоского розв'язання. Виявилося, що у цій галузі розподіл пластичних деформацій, отриманий обох варіантів розрахунку, є досить близьким.

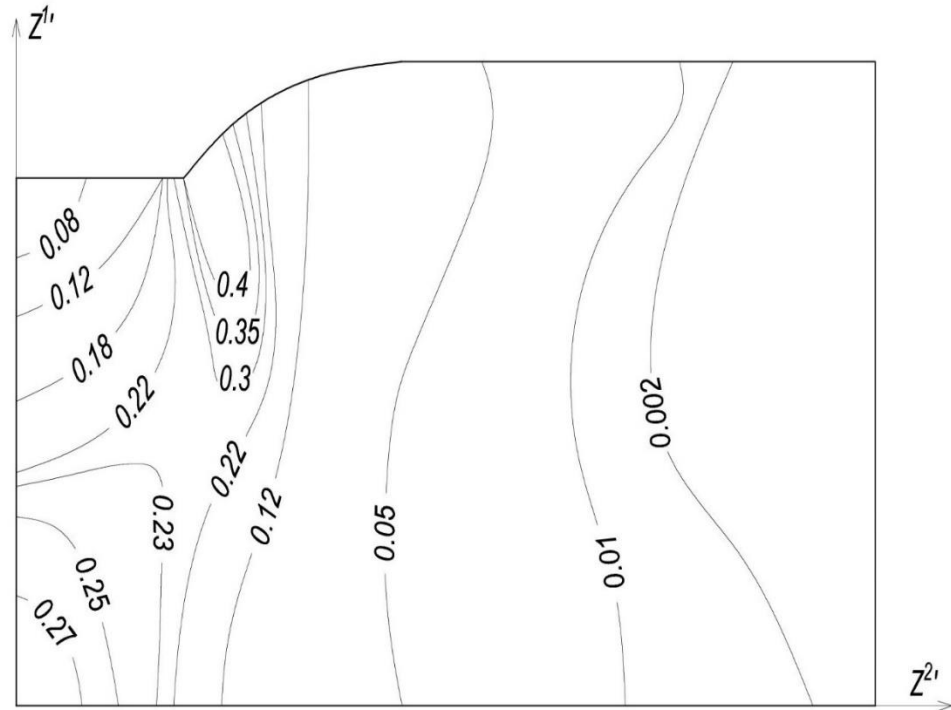


Рис. 4.27. Ізолінії інтенсивності пластичних деформацій

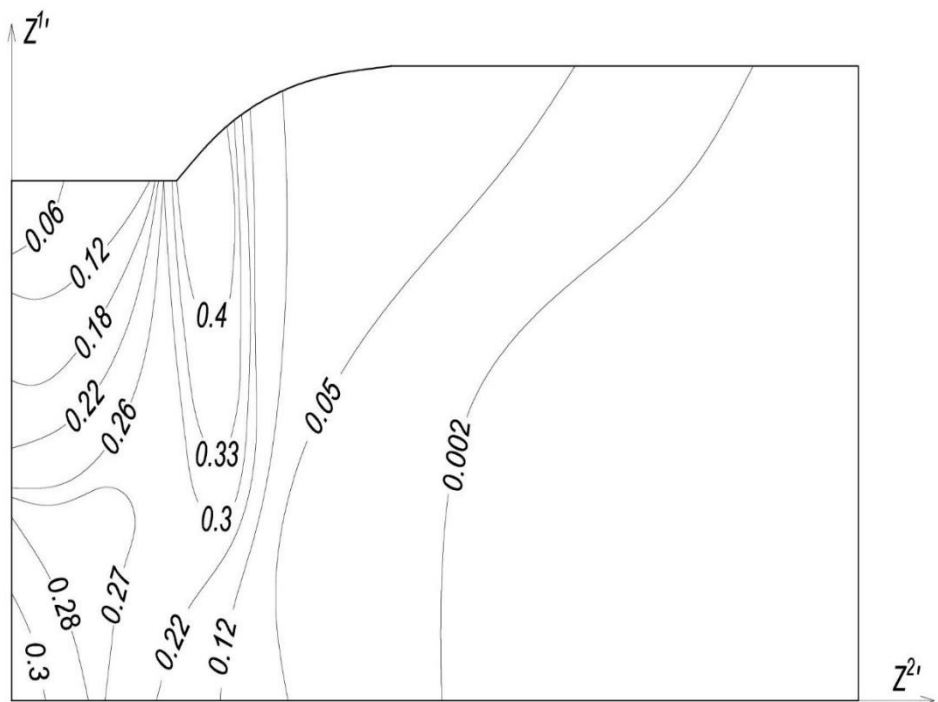


Рис. 4.28. Ізолінії інтенсивності пластичних деформацій

Епюри напружень $\sigma^{1'1'}$, побудовані вздовж вертикальної осі симетрії заготовки (рис. 4.29) для плоского і просторового розв'язання, мають якісно однаковий характер. На межі області утрудненої деформації в обох випадках спостерігається зростання стискаючих напружень, а в приконтатній області відбувається їхнє деяке зменшення. Це добре узгоджується з результатами, наведеними у роботі [140] з урахуванням плоского розрахунку.

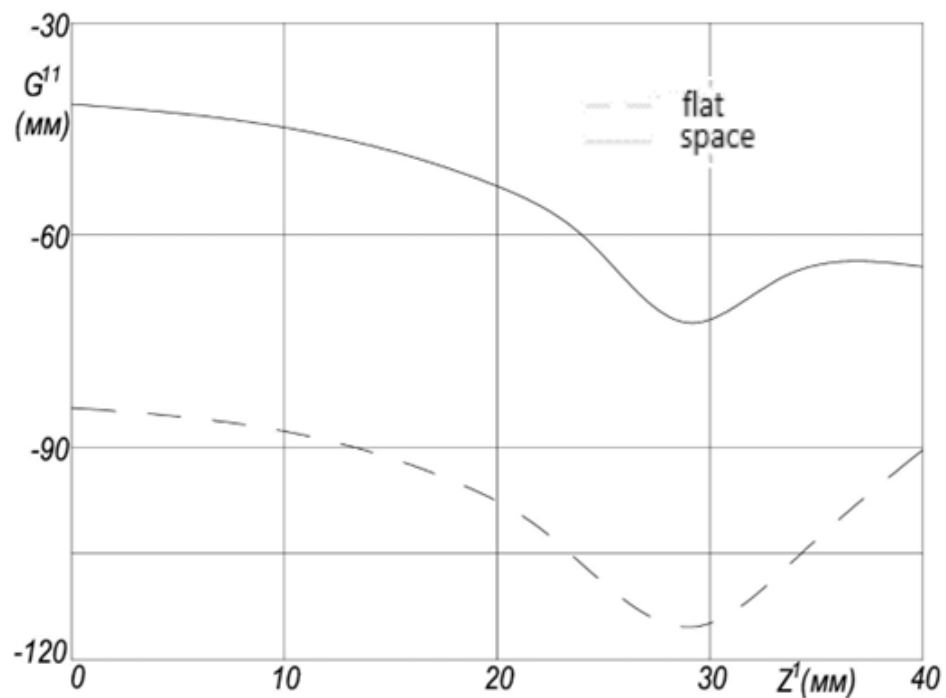


Рис. 4.29. Епюри напружень $\sigma^{1'1'}$

Кількісні розбіжності між значеннями $\sigma^{1'1'}$ отриманими в тривимірній і плоскій постановці в області максимуму, становлять приблизно 60%.

Однією з важливих характеристик процесу, що розглядається, є зусилля протяжки. Графіки залежності зусилля протяжки від ступеня деформації по висоті наведені на рис. 4.30. Їх порівняння показує, що при максимальному ступені деформації плоске розв'язання дає результат більш ніж на 30% підвищений у порівнянні з просторовим.

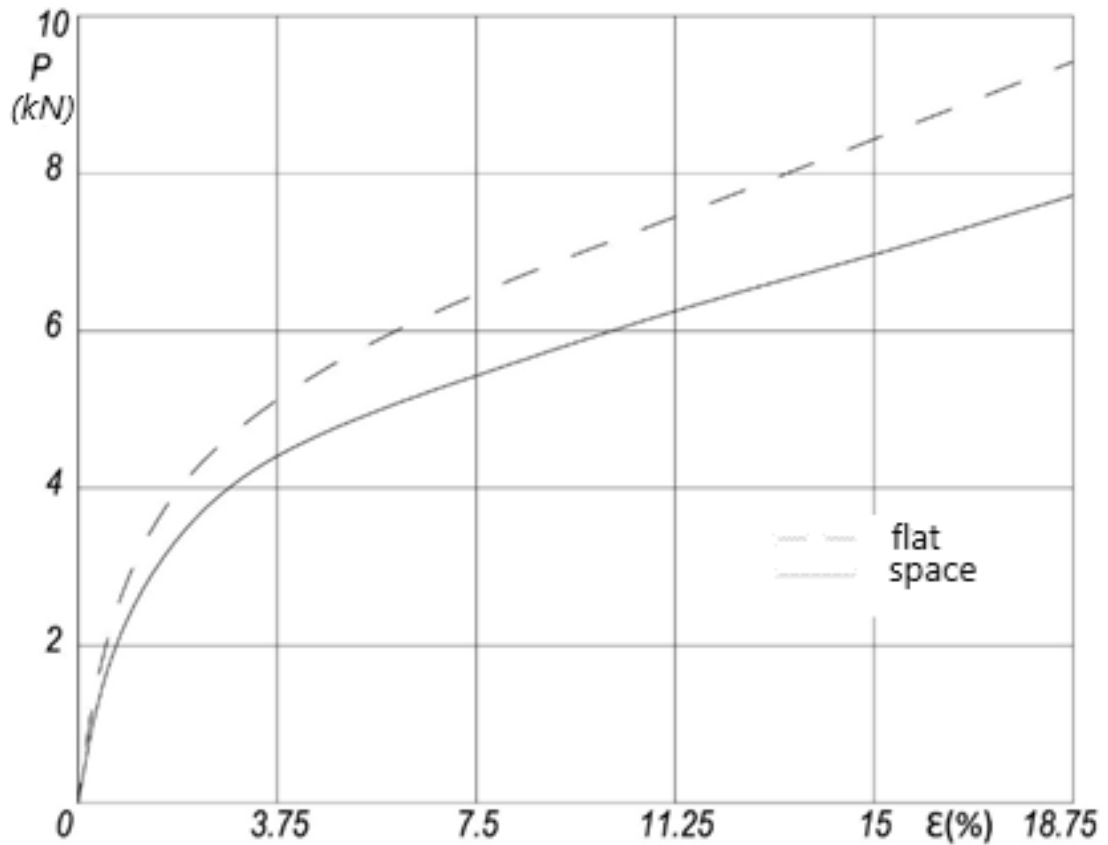


Рис. 4.30. Графіки залежності зусилля протяжки від ступеня деформації по висоті.

Таким чином, зіставлення параметрів напружено-деформованого стану заготовлі в процесі протяжки, отриманих у плоскій та просторовій постановках, дозволяє зробити висновок, що дослідження необхідно проводити на базі просторового розрахунку.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Основні результати, отримані в дисертаційній роботі, полягають в наступному:

1. На основі НМСЕ розроблена ефективна чисельна методика розв'язання просторових задач термопружності, термопластичності при малих і великих пластичних деформаціях для криволінійних неоднорідних призматичних тіл з довільними граничними умовами на торцях.

В процесі розробки методики і програм отримані наступні результати:

- розроблений криволінійний неоднорідний призматичний скінчений елемент, оригінальний для дослідження масивних і тонкостінних просторових конструкцій, матриця жорсткості якого виведена у відповідності з методикою НМСЕ;
- запропонований підхід розвинутий на випадок великих пластичних деформацій, розв'язувальні співвідношення для дослідження геометрично нелінійних об'єктів побудовані в актуальній конфігурації;
- проведено порівняння ефективності НМСЕ і традиційного МСЕ, що охоплює ряд аспектів: дослідження збіжності ітераційного процесу розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь в залежності від вибору параметра релаксації, порівняння збіжності апроксимації переміщень при збільшенні числа членів розкладу, викликане вибором системи базисних функцій і її вплив на ефективність метода в цілому;
- розроблений комплекс програм, який реалізує НМСЕ стосовно криволінійних неоднорідних призматичних тіл з урахуванням фізично і геометрично нелінійних задач.

2. Достовірність отриманих результатів підтверджена розв'язанням ряду тестових задач в пружній, пружно-пластичній постановках і при великих пластичних деформаціях. При розв'язанні складних прикладних задач для обґрунтування достовірності проводились дослідження по збіжності в

залежності від кількості членів ряду і кількості СЕ, а також від точності розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь і величини кроку по параметру зміщення. Встановлено, що використання НМСЕ перевершує по ефективності традиційний МСЕ для виділеного класу задач.

3. Розв'язок складних просторових задач, пов'язаних з оцінкою параметрів НДС реальних об'єктів – співставлення результатів плоского і просторового розрахунку НДС трубчатого елемента при термосиловому навантаженні показало, що урахування в просторовій постановці згинаючі навантаження на область вирізу викликають перерозподіл напружень в перерізі тіла і тому аналіз даного об'єкта потрібно проводити тільки на базі просторового розв'язку.

Дослідження впливу розмірів фланці на розподіл напружень і зон пластичних деформацій корпусної деталі, навантаженої внутрішнім тиском дозволило підібрати такі розміри фланця, при яких інтенсивність пластичних деформацій в області їх максимальних значень знижується в 3 рази, що дозволяє продовжити ресурс роботи конструкції.

Вивчення пластичного формозмінення полоси прямокутного перерізу в процесі протяжки в плоскій і просторовій постановках показало, що плоска постановка дає результати для різних параметрів, характеризуючи процес, збільшених на 30-60% в порівнянні з просторовим розрахунком. В цьому випадку, щоб отримати достовірну картинку НДС необхідно розв'язувати задачу в просторовій постановці.

4. Розроблена методика і алгоритми реалізовані у вигляді пакету прикладних програм і можуть використовуватися в проектній практиці, наукових дослідженнях, навчальному процесі.

5. Результати роботи можуть бути застосовані в наукових і проектно-конструкторських установах, при дослідженні процесів деформування криволінійний неоднорідний призматичний тіл з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності, при проведенні розрахунків на міцність і

прогнозуванні ресурсу відповідальних елементів конструкцій в машинобудуванні, енергетиці, та транспорті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 11–20.
2. Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, В. П. Андрієвський // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 78. – С. 3–17.
3. Андрієвський В.П. Вплив урахування геометричної нелінійності на величину розрахункового ресурсу хвостовика лопатки ГТУ / В. П. Андрієвський, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – Вип. 85. – С. 31–50.
4. Андрієвський В.П. Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 64–72.
5. Астанін, В. В. Граничний стан циліндричної оболонки з композиційного матеріалу за наявності пошкоджень / В. В. Астанін, М. М. Бородачов, С. Ю. Богдан // Проблемы прочности. - 2012. - № 2. - С. 61-75
6. Баженов В. А. Дослідження процесу континуального руйнування ротора парової турбіни з дефектом в умовах повзучості / В. А. Баженов, С. О. Пискунов, Р. М. Остапенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – № 83. – 2009. – С.3-14.
7. Баженов В.А. Вплив урахування геометричної не лінійності на величину ресурсу ялинкового з'єднання в умовах повзучості / В.А.Баженов, С.О.Пискунов, Ю.В.Максим'юк, С.В.Мицюк // Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми міцності». – 2022. – № 3. – С. 33–38.

8. Баженов В.А. Математичне моделювання процесів розвитку магістральних тріщин в тілах обертання складної структури з урахуванням формозмінення / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2018. – Вип. 101. – С. 111–120.
9. Баженов В.А. Моделювання фізично і геометрично нелінійного деформування і руйнування вісесиметричних і плоско-деформованих тіл / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк // «Математичні проблеми технічної механіки – 2013»: Матеріали міжнародної наукової конференції, м. Дніпродзержинськ, 16–29 квітня.: – Дніпродзержинськ, 2013. – С 101.
10. Баженов В.А. Моментна схема методу скінчених елементів в фізично і геометрично нелінійних задачах механіки деформівного твердого тіла / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // III Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» – К.: КНУБА., 24-25.09.2019.
11. Баженов В.А. Напружено-деформований стан і формозмінення в тілах обертання складної структури / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 3–12.
12. Баженов В.А. Напружено-деформований стан і формозмінення масивних і тонкостінних об'єктів / В.А. Баженов, Ю.В. Максим'юк // Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі». (Київ, 18-20 жовтня 2018). –К., 2018. – С 97.
13. Баженов В.А. Оцінка ресурсу корпусу стопорного клапана парової турбіни при термосиловому навантаженні з урахуванням формозмінення / В.А.Баженов, С.О.Пискунов, Ю.В.Максим'юк, О.О.Шкриль // Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми міцності». – 2022. – № 4. – С. 56–64.

14. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. КНУБА, 2005. 298 с.
15. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Особливості визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів. Опір матеріалів і теорія споруд. № 76. 2005. с.86-97.
16. Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. К., КНУБА, 2012. 248 с.
17. Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Солодей І.С. Чотиривимірна скінченноелементна апроксимація простору та часу в нестационарних задачах динаміки на основі НМСЕ. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.72. 2003. с.119-134.
18. Баженов В.А., Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І. Дослідження динамічної пружнопластичної взаємодії неоднорідних тіл на основі НМСЕ. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.67. 2000. с.3-17.
19. Баженов В.А., Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І. Ефективність алгоритмів розв'язання пружних та пружно-пластичних задач динаміки напіваналітичним методом скінченних елементів. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.64. 1998. с.99-115.
20. Бобир М. І. Метод розв'язання задач пластичності із врахуванням пошкодженості. Ч.1.Теорія / М. І. Бобир, К. М. Рудаков, О. І. Трубачов // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 3. – С. 44–47.
21. Бобир М. І. Метод розв'язання задач пластичності із врахуванням пошкодженості. Ч.2. Алгоритм і результати чисельного розрахунку / М. І. Бобир, К. М. Рудаков, О. І. Трубачов // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004. – № 4.– С. 78–83.
22. Вабіщевич М.О. Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування неоднорідних просторових тіл з урахуванням появи та

- розповсюдження тріщини в умовах динамічного навантаження. Дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17. Київський національний університет будівництва і архітектури. Київ, 2020. 326 с.
23. Ватуля Г.Л., Проказа Е.А. Чисельне визначення висоти зводу обвалення за допомогою ПК «ЛПРА».Збірник наукових праць УкрДАЗТ. 2015. вип.151. с.76-82.
 24. Визначення параметрів напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл при термосиловому навантаженні / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк // Вісник НТУ «ХП» Технології та обладнання виробництва – 2015. – №21(1130). – С. 128-135.
 25. Визначення тріщиностійкості лопатки турбіни з напіваналітичною тріщиною / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.О. Шкриль, Д.В. Богдан // Опір матеріалів і теорія споруд № 90, 2012. – С.3-15.
 26. Гуляр О. І. Визначення J - нтеграла в вісесиметричних тілах з тріщинами методом реакцій / О. І. Гуляр, Ю. В. Максим'юк // Математичні проблеми технічної механіки – 2011: міжнар. наук. конф., 13–15 квіт. 2011 р. : матеріали конф. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2011. □ С. 101.
 27. Гуляр О. І. Вірогідність моментної схеми скінчених елементів в геометрично нелінійних задачах термов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням пошкодженості матеріалу / О. І. Гуляр, Ю. В. Максим'юк // «Людина і космос» 50-річчя космічної ери : IX міжн. мол. наук.-практ. конф., 18–20 квіт. 2007 р. : матеріали конф. – Дніпропетровськ, 2007. - С. 276.
 28. Гуляр О. І. Вплив геометрично нелінійного деформування на величину ресурсу хвостовика лопатки в умовах повзучості / О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // Математичні проблеми технічної механіки – 2010 : міжнар. наук. конф., 19–20 квіт. 2010 р. : матеріали конф. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2010. - С. 96.
 29. Гуляр О. І. Розв'язання геометрично нелінійних задач вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу / О. І. Гуляр, Ю. В. Максим'юк //

- Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій : міжнар. наук.-техн. конф. пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (1919–2006), 17–19 жовт. 2007 р. : тези доп. – Дніпропетровськ : ДНУ, 2007. - С. 103–104.
30. Гуляр О. Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл / О. Гуляр, Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 6. – С. 72–84.
31. Гуляр О.І. Визначення J-інтеграла при скінченоелементному розв'язанні задач змішаного руйнування / О. І. Гуляр, О. С. Сахаров, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – Вип. 82. – С. 111–125.
32. Гуляр О.І. Дослідження нелінійного деформування складених оболонки обертання середньої товщини / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Технічні науки та технології: науковий журнал. – 2018. – №2(12). – С 9-24.
33. Гуляр О.І. Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу / О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк, Б. І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 79. – С. 18–42.
34. Дослідження еволюції напружено-деформованого стану і визначення розрахункового ресурсу масивних елементів вісесиметричних конструкцій на основі універсального скінченного елемента / В.П. Андрієвський, Ю.В. Максим'юк, С.В. Мицюк, С.О. Пискунов // Вісник НТУ «ХПІ» Системний аналіз, управління та інформаційні технології – 2018. – №22(1298). – С. 66-72.

35. Дослідження напруженого стану зварного ротору на основі моментної схеми МСЕ / С.О. Пискунов, О.І. Гуляр, Ю.В. Максим'юк [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98. – С. 163–172.
36. Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89. – С. 143–157
37. Іванченко Г.М. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінчених елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк // Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.
38. Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості / О. С. Сахаров, Ю. В. Щербіна, О. В. Гондляр, В. І. Сівецький. – К. : Поліграфконсалтинг, 2006. – 156 с.
39. Карнаухов В.Г., Ревенко Ю.В. Стаціонарні коливання та дисипативний розігрів в'язкопружних тонкостінних елементів при дії на них рухомого навантаження. Вестник национального технического университета “ХПИ”. Харьков. 2002. Вып. 9, т. 8. С. 97-103.
40. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., П'ятецька О.В. Активне демпфірування осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзо-електричних включень. Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. 2003. №2. С.81-85.
41. Ковальчук Б. І. Рівняння теорії пластичності для процесів повторно-простого навантаження / Б. І. Ковальчук // Наук. Вісті Нац. техн. ун-ту України “КПІ”. – 2007. – № 5. – С. 91–97.
42. Кузьмінець М.П. Ефективність скінчених елементів з перемінними та усередненими механічними та геометричними параметрами напіваналітичного метода скінчених елементів / М.П. Кузьмінець, Ю.В.Максим'юк, І.Ю.Мартинюк // Науково-технічний збірник

- «Автомобільні дороги і дорожнє будівництва». – 2022. – Вип. 112. – С. 78-84.
43. Максим'юк Ю. Алгоритм розв'язання системи лінійних та нелінійних рівнянь напіваналітичним методом скінчених елементів для криволінійних неоднорідних призматичних тіл / Ю. Максим'юк, М. Гончаренко, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 7. – С. 101–108.
44. Максим'юк Ю. В. Використання методу реакцій для визначення J-інтеграла в задачах змішаного руйнування двовимірних тіл / Ю. В. Максим'юк // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів Київ, К.:КНУБА 4-6 листопада 2008р.
45. Максим'юк Ю. В. Вплив геометрично–нелінійного деформування на величину інваріантного J – інтеграла / Ю. В. Максим'юк // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів – в 2х частинах. – Ч.1. –К.: КНУБА, 2010. –196 с..
46. Максим'юк Ю. В. Дослідження вірогідності розв'язання задач в'язкопружнопластичності двовимірних тіл з урахуванням геометричної нелінійності методом скінчених елементів / Ю. В. Максим'юк // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів Київ, К.:КНУБА 5-9 листопада 2009р.
47. Максим'юк Ю. В. Дослідження впливу урахування геометричної нелінійності на величину ресурсу ялинкового з'єднання в умовах повзучості / Ю. В. Максим'юк // Розвиток наукових досліджень '2008 : міжн. наук.-прак. конф., 24–26 листоп. 2008 р. : матеріали конф. – Полтава, 2008. □ С. 44–45.
48. Максим'юк Ю. В. Методика розв'язання вісесиметричних задач геометрично нелінійного в'язкопружно-пластичного деформування / Ю. В. Максим'юк // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів Київ, К.:КНУБА 6-9 листопада 2007р.

49. Максим'юк Ю. Вузлові реакції та коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента на основі представлення переміщень поліномами / Ю. Максим'юк, О. Шкриль, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 9. – С. 54–62.
50. Максим'юк Ю. Моментна схема скінчених елементів в геометрично та фізично нелінійних задачах деформування вісесиметричних тіл обертання з урахуванням континуального руйнування/ Ю.Максим'юк, І.Мартинюк, О.Максим'юк // IV Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» кафедра ЗБК, КНУБА, 26 квітня 2023
51. Максим'юк Ю. Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108.
52. Максим'юк Ю. Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування / Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20.
53. Максим'юк Ю. Системи координатних функцій під час розкладання переміщень по поліномах/ Ю. Максим'юк, О. Козак, І. Мартинюк, В. Бучко // Будівельні конструкції теорія і практика. – 2022. – Вип. 10. – С. 150–157.
54. Максим'юк Ю.В. Алгоритм розв'язку задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2014. – Вип. 92. – С. 148–156.
55. Максим'юк Ю.В. Вантовий міст для автомобільного транспорту через р. Десна / Ю.В. Максим'юк, М.С. Воротілов // International scientific-practical

- conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2019” – К.: KNUCA., 27-29.11.2019 – 154-155s.
56. Максим'юк Ю.В. Визначення впливу урахування геометричної нелінійності на величину ресурсу стопорного клапана у випадку дискретного руйнування / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА: тези доповідей. – в 2х частинах (м.Київ, 8-11 листопада 2011 р.). – Ч.1. –К., 2011. – С 46.
57. Максим'юк Ю.В. Визначення тріщиностійкості вісесиметричних тіл з урахуванням формозмінення / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2018. – Вип. 100. – С. 202–213.
58. Максим'юк Ю.В. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл / Ю.В Максим'юк, І.І. Солодей, Р.Л. Стригун // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 102. – С. 252–262.
59. Максим'юк Ю.В. Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2017. – Вип. 99. – С. 151–159.
60. Максим'юк Ю.В. Моментна схема скінчених елементів в геометрично нелінійних задачах пружнопластичного деформування тіл обертання / Ю.В. Максим'юк, В.І. Мартиновський // International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2018” – К.: KNUCA., 28-30.11.2018 – 236-237s.
61. Максим'юк Ю.В. Напіваналітичний метод скінчених елементів в лінійних і нелінійних задачах деформування, руйнування та формозмінення просторових тіл з урахуванням неканонічності форми та складної структури / Ю.В. Максим'юк, І.Ю. Мартинюк, О.В. Максим'юк // III Науково-практична конференція «Будівлі та споруди спеціального призначення: сучасні матеріали та конструкції» – К.: КНУБА., 25-25.09.2021 – 73-74с.

62. Максим'юк Ю.В. Оболонковий скінчений елемент (СЕ) загального типу для розв'язання задач фізичної і геометричної нелінійності вісесиметричних оболонок та пластин / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА: тези доповідей (м.Київ, 5-8 листопада 2013 р.). –К., 2013. – С 57.
63. Максим'юк Ю.В. Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 97. – С. 186–193.
64. Максим'юк Ю.В. Розв'язання фізично і геометрично-нелінійних задач для тонкостінних об'єктів / Ю.В. Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА: тези доповідей. – в 2х частинах (м.Київ, 6-9 листопада 2012 р.). – Ч.1. –К., 2012. – С 55.
65. Максим'юк Ю.В. Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2015. – Вип. 94. – С. 244–251.
66. Максим'юк Ю.В. Розрахунок корпусних деталей занурюваних глибоководних апаратів з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності / Ю.В. Максим'юк, О.Ю. Башинська // «Recent Studies of Applied Sciences» International scientific-practical conference. Section: TECHNICAL SCIENCE – Kyiv, Ukraine 15-17 April 2015. – pp. 39.
67. Максим'юк Ю.В. Скінчений елемент загального типу для розв'язку вісесиметричної задачі нестационарної теплопровідності / Ю.В Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд – 2016. – Вип. 96. – С. 148–157.
68. Метод скінчених елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / [Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2018. – 316с.

69. Модифікований варіант метода реакцій в двовимірних задачах механіки руйнування / О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, О.О. Шкриль, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 88. – С. 12–17.
70. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл : Монографія / [Баженов В. А., Гуляр О. І., Сахаров О. С., Солодей І.І.]. – К. : КНУБА, 2012. – 248 с.
71. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл : Монографія / [Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С.]. – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
72. Напіваналітичний метод скінченних елементів в просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури / [Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максим'юк О.В.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2021. – 280с.
73. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С.О. Пискунов, І.І. Солодей, Ю.В. Максим'юк, А.Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 59–75.
74. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.С. Сахаров, О.І. Гуляр [та ін.] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 92. – С. 3–16.
75. Особливості реалізації моментної схеми скінчених елементів для визначення пружного стану проторових тіл складної форми / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, С.В. Мицюк // Опір матеріалів і теорія споруд № 90, 2012. – С.3-26.
76. Особливості розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності і повзучості з урахуванням геометричної не лінійності / О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк, Б.І. Сизевич // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 90. – С. 73–89.

77. Пискунов С. О. Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі термов'язко-пружнопластичного деформування вісесиметричних тіл / С. О. Пискунов, О. І. Гуляр, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83. – С. 25–42.
78. Пискунов С. О. Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання із використанням кругового скінченого елемента змінної площі поперечного перерізу / С. О. Пискунов, С. В. Мицюк, О. О. Шкриль // Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 71. – С. 198–203.
79. Пискунов С. О. Дослідження деформацій повзучості з урахуванням пластичних властивостей матеріалу / С. О. Пискунов // Опір матеріалів і теорія споруд. 2002. – Вип. 71. – С. 73–79.
80. Пискунов С. О. Ефективність алгоритму розв'язання геометрично нелінійної задачі в'язкопружно-пластичного деформування двовимірних тіл / С. О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Розвиток наукових досліджень '2009 : міжн. наук.-прак. конф., 18–20 трав. 2009 р. : матеріали конф. – Полтава, 2009. - С. 70–71.
81. Пискунов С. О. Моделювання напружено-деформованого стану і повзучості просторових тіл обертання складної форми // С. О. Пискунов Збірник наукових праць Севастопольського національного університету ядерної енергії і промисловості. – 2010. – № 2 (34). – С. 235–241.
82. Пискунов С. О. Моделювання повзучості та континуального руйнування ротора парової турбіни за наявності початкової неоднорідності матеріалу / С. О. Пискунов, Р. М. Остапенко // Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні. – Запоріжжя, 2009. – № 2 – С. 140–149.
83. Пискунов С.О. Визначення тріщиностійкості ротора парової турбіни при дії об'ємних сил / С.О. Пискунов, О.О. Шкриль, Ю.В. Максим'юк, // Опір матеріалів і теорія споруд – 2019. – Вип. 103. – С. 57–62.
84. Пискунов С.О. Вплив параметрів підкріплювального шару на стійкість і закритичну поведінку сферичних панелей / С.О. Пискунов, Ю.В.

- Максим'юк // Наукова конференція молодих вчених, аспірантів студентів КНУБА: тези доповідей (м.Київ, 15-17 березень 2017 р.). – К., 2017. – С 83.
85. Розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів для неоднорідних кругових і призматичних тіл складної форми / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, С.В. Мицюк // Опір матеріалів і теорія споруд № 90, 2012. – С.47-62.
86. Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання / В.А.Баженов, О.І.Гуляр, С.О.Пискунов, Р.М Остапенко // Опір матеріалів і теорія споруд № 82, 2008. – С.3-29.
87. Русинко А. Н. Аналітичний опис повзучості попередньо деформованого матеріалу / А. Н. Русинко // Машинознавство. – 2004. – № 1. – С. 13–16
88. Скальський В. Р. Оцінка об'ємної пошкоджуваності матеріалів методом акустичної емісії / В. Р. Скальський, О. Є. Андрейків. – Львів : Вид-во ЛНУ ім. І. Франка, 2006. – 330 с.
89. Солодей І.І. Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного метода скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки. Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. Збірник. К.:КНУБА, Вип.82, 2008. с.154-163.
90. Солодей І.І. Розв'язання просторових динамічних задач механіки нелінійного деформування і руйнування на основі сучасних скінченноелементних моделей. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Київський національний університет будівництва і архітектури. Київ, 2013. 339 с.
91. Термонапружений стан і тріщиностійкість роторів турбіни К-1000-60/1500 АЕС / М.Г. Шульженко, П.П. Гонтаровський, Н.Г. Гармаш, І.І. Мележик, Т.В. Протасова // Пробл. міцності. 2010. № 1. С. 152-158.
92. Чисельне моделювання процесів нелінійного деформування тіл з урахуванням великих пластичних деформацій / [Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Солодей І.І., Стригун Р.Л.] – Київ: Вид-во “Каравела”, 2019. – 223с.

93. A modified method for evaluating the invariant J-integral in finite-element models of prismatic bodies / V.A. Bazhenov, A.S. Sakharov, Y.V. Maksimyuk, A.A. Shkryl' // *International Applied Mechanics*. – 2016. – 52(2). pp. 140-146.
94. Altenbach J. Edge Effects of Moderately Thick Plates under Creep-Damage Conditions / J. Altenbach, H. Altenbach, K. Naumenko // *Technische Mechanik*. – 2004. – Band 24, Helf 3–4. – P. 254–263.
95. Anerkari P. Realiability of creep damage assesment of power plant components / P. Anerkari, F. Salonen // *5th Int.Conf. Pressure Vessel Techn.*, Sept. 9–14 1984. – San Fransisco (USA), 1984. – Vol. 2. – P. 1359–1365.
96. Application of damage mechanics to numerical fracture simulation / M. Kotoul, Z. Bilek, J. Hrebicek, P. Polcar // *Acta tecn. CAV*. – 1989. – Vol. 34, № 5 – P. 579–598.
97. Bassani L. Mechanics of damage, crack growth and life prediction under creep conditions / Bassani L. // *Materials Sci., Eng., Ser. A*. – 1988. – 103. – P.115-123
98. Bazhenov V.A. Convergence of the finite element method and the semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters / V.A. Bazhenov, M.V. Horbach, , I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 106. – P. 92-104.
99. Bazhenov V.A. Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects/ V.A. Bazhenov, A.A. Shkryl', Yu.V. Maksimyuk, I.Yu. Martyniuk // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2020. – Issue 105. – P. 24-32.
100. Bernauer G. Micro-mechanical modeling of damage and tearing – results of a European numerical round robin / Bernauer G, Brocks W. // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2002. 25. – P.363-384.

101. Betten J. A microcrack description of creep damage in crystalline solids with different behaviour in tension and compression / J. Betten, S. Sklepus, A. Zolochovsky // *Int. J. Damage Mech.* – 1999. – Vol. 8. – P. 197–232.
102. Bolotin V.V. A unified approach to damage accumulation and fatigue crack growth / Bolotin V.V. // *Eng. Fract. Mech.* – 1985/ - 22, №3. – P. 387-398.
103. Broberg H. Creep damage and rupture. A phenomenological study. / Broberg H.– Gothenburg: Chalmers University of Technology, 1975. – 32 p.
104. Caboche J.L. Continuous damage mechanics – a tool to describe phenomena before crack initiation /Caboche J.L.// *Nuct. Eng. and Desing.* – 1981. – 64. – P.233-247.
105. Chen G. G. The role of plastic strains in creep crack growth / G. G. Chen. T. R. Hsu // *Eng. Fracture Mechanics.* – 1991. – Vol. 39. – № 3. – P. 493–506.
106. Chen M.J., Them L.G., Cheung Y.K. Analysis of Thin Parallelogram Plates Bending by Spline-finite-strip Method // *ИНЬЮН МУСЮЭ ХЕ ЛИСЮЭ, Appl. Math. and Mech.* – 1984. – v.5 – N 6. – P.755-764.
107. Chernyshev D.O. Peculiarities of technique of teaching technical disciplines in the institution of higher education of the building profile / D.O. Chernyshev, Yu.V. Maksymiuk, Yu.S. Krasylnyk, H.L. Korchova, M.V. Rudenko // *Strength of materials and theory of structure.* – 2022. – Vol. 108. – P. 35-62.
108. Cheung Y.K. Static and Dynamic Behavior of Rectangular Plates Using Higher Order of Finite Strips // *Build Sci.* – 1972 – v.7 – N 3 – P.151-158.
109. Cheung Y.K. The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends // *Pros. Inst. of Civil Engns.* – 1968. – v.40 – May – P-7.
110. Cheung Y.K., Fan S.C. Static Analysis of Right Hox Girder Bridges by Spline-finite-strip Method // *Pros. Inst. Civ. Sng.* – 1983. – v.75 – June – P.311-323.
111. Cheung Y.K., Tham L.G. Mixed Formulation of Finite Strip Method // *J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer.* – 1982. – v.108 – N 2 – P.452-456.

112. Cheung Y.K., Tham L.G., Cheng K.P. Buckling of Sandwich Plate by Finite Layer Method // *Comput. and Struct.* – 1982. – v.15 – N 2 – P.131-134.
113. Cheung Y.K., Tham L.G., Li W.Y. Application of Spline-Finite-Strip Method in the Analysis of Curved Slab Bridge // *Proc. Inst. Civ. Eng.* – 1986. – v.81 – March – P.111-124.
114. Chow C. L. An anisotropic model of damage mechanic based on the endochronic theory of plasticity / C. L. Chow, X. F. Chen // *Int. J. Fracture.* – 1992. – Vol. 55, № 2. – P. 115–130.
115. Chow C.I. On crack initiation angle of mixed mode ductile fracture with continuum damage mechanics / Chow C.I., Wang J. // *Eng. Fract. Mech.* – 1989. – 32, №4. – P.601-612.
116. Chung Gong, Ivan Nelson, Kao Ding Chiu. Tai Wang Analytic Formulation of Stiffnes Matrix for Axisymmetric Solids // *Comput. and Struct.* – 1985. – v.20 – N 5 – P.803-815.
117. Dawe D.J. Static Analysis of Diaphragm-supported Cylindrical Shells Using a Curved Finite Strip // *Int. J. Numer. Eng.* –1977 – v.11 – N 9 – P.1347-1364
118. Dey S.S. Finite Strip Method of Analysis for Orthotropic Analysis Curved Bridge Desks // *Proc. Inst. Civ. Eng.* – 1980 – v.69 – June – P.511-519.
119. Egger G. Microstructural parameters for creep damage quantification // *Acta mech. mater.* – 1991. – Vol.39. – № 2. –
120. Evaluation of creep damage accumulation models : considerations of stepped testing and highly stressed volume / W. A. Grell, G. H. Niggeler, M. E. Groskreutz, P. J. Laz // *Fatigue and Fract. End. Mater. And Struct.* – 2007. – 30, № 8. – P. 689–697.
121. Gadamirski L., Wojewodzki W. Metoda elementow skonczonej w analize przyspieszonego pelzania konstrukcji // *Rozpr. inz.* – 1981. – Vol. 37. – № 2. – P. 299–354.
122. Habraken A.M., Charlier R. A Three-dimensional Finite Element for Simulation of Metal Forming Processes // 2 NUMIFORM 86: *Numer. Meth. Ind. Form.*

- Process.: Pros. 2nd Int. Conf. Gothenburg, 25-29 Aug., 1986.2– Rotterdam; Boston – 1986. – P.111-115.
123. Hayhurst D.R. Development of continuum damage in the creep rupture of notched bars / Hayhurst D.R., Dimmer P.R., Morrison C.J. // *Phil. Royal Society London. Ser. A.* – 1984. – 311. – P.103-129 .
124. Hayhurst D.R. The role of continuum damage mechanics in creep crack growth /Hayhurst D.R., Brown P.R., Morrison C.J. // *Phil. Royal Society London. Ser. A.* – 1984. – 311. – P.131-158.
125. Hayhurst D.R., Dimmer P.R., Chernuka M.W. Estimates of the creep rupture lifetime of structures using finite element method // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1975. – Vol. 23. – P. 335–355.
126. Helwany Sam. *Applied Soil Mechanics with ABAQUS Applications* / Helwany Sam. – Wiley, 2007.– 400 p.
127. Horvay G. The End Problem of Rectangular Strips // *J. Appl. Mech.* – 1953. – v.20 – N 1 – P.57-69.
128. Ihara C., Yanago T., Tanaka T. Estimation of creep life for metals based on damage mechanics // *Eng. Fract. Mech.* – 1991. – Vol. 39. – № 5. – P.887–893.
129. Jain S. K. A constitutive model for creep rupture / Jain S. K.; Nanda A. // *Mech. Adv. Mater. and Struct.* - 2010. – 17, №7. – C.459-466.
130. Jakowluk A. *Procesy pełzania i zmeczenia w materialach* / A. Jakowluk. – Warszawa. : Wyd.Nauk.Tech., 1993. – 484 p.
131. Jansson S. *Damage, crack growth and rupture in creep* / S. Jansson. – Goteborg : Chalmers Univ. Techn. Div. Solid. Mech., 1985. – 16 p.
132. Janz H.-U., Thuns H.J., Wurmnest W. Statische Berechnung von Rotationsschalen unter beliebiger nichtrotationssymmetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS // *Tech. Mitt. Krupp. Forsch. – Ber.* – 1978. – No 3 – s.111-126.

133. Kawai M. Constitutive model for coupled inelasticity and damage // *Nikon kikai gakkai rombunshu A.* = *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* – 1995. – Vol. 61. – № 592. – P. 2684–2692.
134. Kim Y. Et al Elastic–plastic fracture mechanics method for finite internal axial surface cracks in cylinders / Kim Y., Kim J., Park Y. // *Engineering Fracture Mechanics* – 2004. – 71. P.925–944.
135. Kobayashi S. Three-dimensional Finite Element Analysis of Block Compression // *Int. J. Mech. Sci.* 1984. – v.26 – N 3 – P.165-176.
136. Kolupaev V. Modelling of the three-dimensional creep behavior of non-reinforced thermoplastics / V. Kolupaev, M. Moneke, N. Darsow // *Comput. Mater. Sci.* – 2005. – 32, № 3–4. – P. 400–406.
137. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions / Krajcinovic D. // *J Appl. mech.* – 1985. – 52. P. 829-834.
138. Leckie F.A., Hayhurst D.R. Constitutive equation for creep rupture // *Acta Metallurgica.* – 1977.– Vol.25. – P.1059–1070.
139. Lee C.H., Kobayashi S. Elastoplastic Analysis of Planestrain and Axisymmetric Flat Punch Indentation by Finite Element Method // *Int. J. Mech. Sci.* – 1970. – v.12 – N 4 – P.349-370.
140. Lee E.H., McMeeking R.M. Concerning Elastic and Plastic Components of Deformation // *Int. J. Solids and Struct.* – 1980 – v.16 – N 8 – P.715-721.
141. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture / Lemaitre J. // *J. Eng. Mat. and Tech.* – 1985. – 107. – P.83-89.
142. Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations / Lemaitre J.// *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.* – 1985. - №51. – P31-49.
143. Lemaitre J. Damage measurements /Lemaitre J., Dugaily J.// *Eng Fract. Mech.* – 1987. – 28, №5/6. P.643-661.

144. Lemaitre J. Evaluation de l'endommagement sur la resistance electrique des metaux /Lemaitre J., Dufailly J., Billardon R.// C.R,Acad Sci. Paris. – 1987. – 304, Ser.II, №12. – P.1050-1058.
145. Lesne P.M. Non local model to describe creep fracture in the framework of damage mechanics / Lesne P.M., Saaniami K. // La Recherche Aerospatiale. – 1990. – I. – P.23-26.
146. Li W.Y., Cheung Y.K., Tham L.C. Spline-finite-strip Analysis of General Plates // J. Eng. Mech. – 1986. v.112 – N 1-P.43-54.
147. Mackerle J. Creep and creep fracture/damage finite element modeling of engineering materials and structures : an addendum. Review / J. Mackerle // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2004. – 81. – P. 381–392.
148. Maksimyuk Y. Using of foreign experience in the application of pendulumsilencers in the high-rise building in the seismic districts of Ukraine / Y. Maksimyuk, I. Tkach // International scientific-practical conference of young scientists “BUILD-MASTER-CLASS-2017” – K.: KNUCA., 28.11-01.12.2017 – 442s.
149. Maksimyuk Yu.V. Analysis of derricking and slewing of the tower crane with consideration to driving mechanisms characteristics / Yu.V. Maksimyuk, K.I. Pochka, Yu.D. Abrashkevych, M.O. Prystailo, A.G. Polishchuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 361-374
150. Maksimyuk Yu.V. Analysis of structures with arbitrary kinematic boundary conditions by the semi-analytical finite element method / Yu.V Maksimyuk, V.P. Andriievskiy, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – P. 140-146.
151. Maksimyuk Yu.V. Investigation of the influence of flange thickness on the nature of the development of zones of plasticity in casing detail / Yu.V. Maksimyuk, Yu.A. Chuprina, O.V. Kozak, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Resistance of

- materials and theory of structures: scientific and technical collection. – Kyiv: KNUCA, 2022. – Issue. 108. – P. 97-106.
152. Maksimyuk Yu.V. Numerical analysis of the stressed-deformed state of a tubular element under thermal loading / Yu.V. Maksimyuk, O.V. Kozak, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 199-206
153. Maksimyuk Yu.V. Research of the stressed and deformed state of a metal strip in the broaching process / Yu.V. Maksimyuk, M.P. Kuzminets, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // Strength of Materials and Theory of Structures – Kyiv: KNUCA, 2022. – Issue 109. – P. 229-238.
154. Maksimyuk Yu.V. Software for the calculation of the strength of prismatic bodies /Yu. Maksimyuk, I. Martyniuk, M. Malykhin // Středoevropský věstník pro vědu a výzkum: Publishing house Education and Science – CZ, 2022. – Issue 9.
155. Maksimyuk Yu.V. Solution of systems of linear and nonlinear equations of prismatic and circular spatial /Yu. MaksimyukI. MartyniukM. MalykhinV. Andreychuk // News of Science and Education: Science and education LTD, Sheffield – GB, 2022. – Issue 9.
156. Maksymiuk Yu. Algorithm for solving systems of nonlinear equations using the semi-analytical method of finite elements / Maksymiuk Yu, Andriievskiy V.// The X International Scientific and Practical Conference "Trends and prospects for the development of modern education", November 20-22, 2023, Munich, Germany. – Pages 365-366.
157. Maksymiuk Yu.V. Priority directions of international airport infrastructure development / Yu.V.Maksymiuk, L.I.Chulinda, H.L.Korchova, K.I.Pochka // Strength of materials and theory of structure. – 2022. – Vol. 109. – P. 301-316.
158. Marquis D. Prediction of crack initiation and growth in structures by continuum damage theory /Marquis D., Billardon R., Benallal A. // Euromech Colloquim 147. Damage Mechanics. – Cachan, 1981. – P.231-242 .

159. Mecanique non lineaire des materiaux /Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S. // Paris.: Hermes Science, 2001.– 152 p.
160. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue / M.A. Miner // Ibid. – 1945. – 12, №1. – P. A159-A164.
161. Mondkar D.P., Pawell G.H. Finite Element Analysis of Nonlinear Static and Dynamic Response // Int. J. Num. Meth. in Eng. – v.11 – 1977. – N 3 – P.499-520.
162. Murakami S. Creep and damage of cooper under multiaxior states of stress / Murakami S., Sanomura Y.// Plasticity Tday. – London: Elsevier, 1985. – P.535-551.
163. Murakami S. Finite element analysis of the creep damage process, based on anisotropic creep damage theory / S. Murakami, M. Kawai, H. Rong // Nikon kikai gakkai rombunsu A. = Trans. ap. Soc. Mech. Eng. A. – 1987. – Vol. 53, № 488. – P. 795–801.
164. Naderi M. Fatigue life prediction of carbon/epoxy laminates by stochastic numerical simulation / Naderi M.; Maligno A. R. // Compos. Struct. – 2012. – 94, №3– C.1052-1059.
165. Nagtegaal Joop C. Rebelo Nuno on the Development of a General Purpose Finite Element Programm for Analysis of Forming Processes // «NUMIFORM 86: Numer. Meth. Ind. Form. Process.: Proc. 2nd Int. Conf. Gothenburg, 25-29 Aug., 1986.» – Rotterdam; Boston – 1986. – P.41-49.
166. Nishihara T., /Damage machanic correlation for high-cycle loading condition // Nishihara T., N. Yamada, Memor. Fac. Enineering Kyoto Univ. 1956, №3. – P.175-213.
167. Odkvist F. K. Mathematical theory of creep and creep rupture / F. K. Odkvist. – Clarindon Press, 1974. – 420 p.
168. Otevrel I. The simulated creep damage model and its application // Acta techn. CSAV. – 1993. – Vol. 38. – № 3. – P. 305–330.

169. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern / Palmgren A. // Z. Vereines Deutscher ING. - 1924.- 68, №14. – S.339-341.
170. Petyt M. Finite Strip Analysis of Flat Skinstringer Structures // J. of Sound and Vibr. – 1977. – v.54 – N 4 – P.537-541.
171. Pyskunov S.O. Finite element analysis of influence of non-homogenous temperature field on designed lifetime of spatial structural elements under creep conditions / S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksimyk, V.V. Valer // Applied Mathematics and Nonlinear. – 2016. – Sciences 1(1) (2016). pp. 170–176.
172. Rabotnov Y.N. Creep rupture / Rabotnov Y.N. // Proc. Appl. Mech Conf. – Pato Alto: Stanford University Publishers, 1968. – P. 343-349 .
173. Ribeiro M. L. A new damage model for composite laminates / Ribeiro Marcelo Leite; Tita Volnei; Vandepitte Dirk // Compos. Struct. – 2012. – 94, №2– C.635-642.
174. Robinson E.L. Effect of temperature variation on the longtime rupture strength of steels /Robinson E.L.// Trans. ASME. – 1952.-74, № 5.- P.777-780.
175. Singh P.S., Spilker R.L. Elastoplastic Analysis of Axisymmetric Structures Subject to Arbitrary Loads by Hybrid-stress Finite Elements // Comput. and Struct. – 1984. – v.1984. – v.19 – N 3 – P.447-465.
176. Smith G.T.R., Sridharan S. A Finite Strip Method for Bucleing of Plate Structures under Arbitrary Loading // Int. J. Mech. Sci. – 1978. – v.20 – N 10 – P.685-693.
177. Spilker R.L., Daugirda D.M. Analysis of Axisymmetric structures under Arbitrary Loading Using Hybrid-stress Model // Int. J. Numer. Eng. – 1981. – v.17 – N 4 – P.801-828.
178. Surdom G., Chenot J.L. Finite Element Calculation of Three-dimensional Hot Forging // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1987 – v.24 – N 11 – P.2107-2117.
179. Tang A. Determination of material constants in creep continuum damage constitutive equation / A. Tang, T. H. Hyde, W. Sun // Strain. – 1998. – Vol. 34, № 3. – P. 83–90.

180. Them L.G., Li W.Y., Cheung Y.K., Chen M.J. Bending of Shew Plates by Spline-finite-strip Method // *Comput. and Struct.* – 1986. – v.22 – N 1 – P.31-38.
181. Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear / Ani Ural et al. // *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005) – P.1148–1170 .
182. Tomohiro M. Creep damage estimation in pure copper using ultrasonic waves / M. Tomohiro, H. Masahiko, F. Hidekazu // *J. Soc. Mater. Sci. Jap.* – 1990. – Vol. 39 – № 437 – P. 208–213.
183. Two scale damage model and related numerical issues for thermo-mechanical high cycle fatigue/ Desmoran R., Kane A., Seyedi M., Sermage J.P. // *Eur. J. Mech. A.* – 2007. 26, №6, P.909-935. АНГЛ.
184. Ueda Yukio, Nakacho Keiji, Pujikubo Masahiko. Ishikawa Yoshiazu Application of Plastic Node Method to Thermal Elastoplastic and Dynamic Problems // *Нихон дзосэн ганнат ромбунсю J. Soc. Nav. Archit. Jap.* – 1983. – 153 – P.200-209.
185. Vorona Y.V. Reliability of results obtained by semi-analytical finite element method for prismatic bodies with variable physical and geometric parameters / Y.V. Vorona, Yu.V. Maksimyuk, I.Yu. Martyniuk, O.V. Maksimyuk // *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&-Technical collected articles* – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 107. – P. 184-192.
186. Wang Tiejun. A continuum damage model for weld effected zone under low cycle fatigue loading / Wang Tiejun, Lou Zhiwen.// *Eng. Fract. Mech.* – 1990. – 37, №4. – P.825-829.
187. Willems H. Investigation of creep damage in Alloy 800H using ultrasonic velocity measurements / H. Willems // *Nondestruct. Charact. Mater. II / Proc. 2nd Int.Symp.– Montreal (Canada), 1986. – New-York - London, 1987.– P. 471–473.*
188. Wilson W. K. A comparison of finite element solutuion for an elastic-plastic crack problem / W. K. Wilson, J. R. Osias // *Int. J.Fracture.* – 1978. 14. – P. 95 127.

189. Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C. Plastic (or viscoplastic) Behavior of Axisymmetric Bodies Subjected to Non-symmetric Loading Semi-analytical Finite Element Solution // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 1979. – v.14 – N 9 – P.1399-1412.
190. Xiong Changbing, Guo Shufen 3-D Finite Element Elastic-plastic Analysis for High Temperature // *Гути лисюэ сюэбао, Acta. Mech. Solida.* – 1985. – N 3 – P.364-369.
191. Yan-Huit Zhang. Investigation of fatigue damage to welded joints under variable amplitude loading spectra /Yan-Huit Zhang, Maddox S. J. // *Int. J. Fatigue.* 2009. 31, №1. P.138-152. АНГЛ.

ДОДАТКИ

Додаток А

Довідка про впровадження результатів дисертаційної роботи



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

пр-т. Повітряних Сил, 31, м Київ, 03037, Телефон: (044) 271-75-61, Факс: (044) 276-02-43

01.04.24 № 14-1.9/563

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Максим'юка О.В. на тему «Чисельне дослідження формозмінення просторових тіл напіваналітичним методом скінченних елементів» у наукових дослідженнях Науково-дослідного інституту будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури

Результати дисертаційної роботи Максим'юка О.В. на тему «Чисельне дослідження формозмінення просторових тіл напіваналітичним методом скінченних елементів» використані в Науково-дослідному інституті будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (НДІБМ КНУБА) при виконанні науково-дослідних робіт 2020 - 2024 років.

Науковий внесок Максим'юка О.В., полягає у створенні на основі напіваналітичного методу скінчених елементів нових ефективних чисельних підходів до аналізу процесів фізичного і геометрично нелінійного деформування для криволінійних неоднорідних призматичних тіл.

Довідка надана для представлення до спеціалізованої вченої ради за місцем захисту дисертації Максим'юка О.В. на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 131 «Прикладна механіка».

Директор
НДІ будівельної механіки,
д.т.н., професор

Підпис П.П. Лізунова засвідчую
Секретар вченої ради КНУБА



Петро ЛІЗУНОВ

Микола КЛИМЕНКО

