

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**ПОДВОРНИЙ АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ**



УДК 539.3+ 624.074.04

**ДЕФОРМУВАННЯ, ДИНАМІКА ТА СТІЙКІСТЬ КОНСТРУКТИВНО  
АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ  
ПОСТАНОВЦІ**

05.23.17 – Будівельна механіка

**РЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

**Київ – 2024**

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Київському національному університеті будівництва і архітектури (КНУБА м. Київ), Національному університеті водного господарства та природокористування (НУВГП м. Рівне) Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант:** доктор технічних наук, професор  
**ГРАЧ ВОЛОДИМИР МИРОСЛАВОВИЧ,**  
Київський національний університет будівництва і архітектури Міністерства освіти і науки України,  
професор кафедри будівельної механіки.

**Офіційні опоненти:** доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України  
**ЖУК ЯРОСЛАВ ОЛЕКСАНДРОВИЧ,**  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України,  
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки;

доктор технічних наук, професор  
**МАРЧУК ОЛЕКСАНДР ВАСИЛЬОВИЧ,**  
Національний транспортний університет Міністерства освіти і науки України,  
завідувач кафедри опору матеріалів і машинознавства;

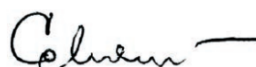
доктор технічних наук, професор  
**КОЗУБ ЮРІЙ ГОРДІЙОВИЧ,**  
Державний заклад «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» (м. Полтава) Міністерства освіти і науки України,  
професор кафедри математики та інформатики.

Захист відбудеться «21» червня 2024 р. о 13<sup>00</sup> на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.04 при Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, ауд. 319.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31 або за посиланням:  
<https://www.knuba.edu.ua/specjalizovanavchena-rada-d-26-056-04/>

Реферат розісланий «20» травня 2024 року.

В. о. вченого секретаря спеціалізованої  
вченої ради Д 26.056.04  
доктор технічних наук, професор



І. І. Солодей

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Зменшення матеріаломісткості циліндричних оболонкових конструктивних елементів із забезпеченням умов їх надійної експлуатації досить часто пов'язано із використанням композитних матеріалів. Це питання стає особливо важливим у зв'язку із можливим застосуванням конструктивно анізотропних композитних оболонкових систем в авіаційній, ракетній, космічній галузях, а також в машинобудуванні та будівництві. Їх розрахунки щодо встановлення характеристик деформування, динаміки та стійкості, які здійснюються на основі відомих двовимірних моделей, не завжди задовольняють вимогам стосовно їх точності. Тому логічним і важливим є побудова розрахункових моделей, що дозволяють найбільш повно враховувати параметри, які описують напружено-деформований стан, коливання та стійкість цих оболонок.

Розв'язання проблем розрахунків циліндричних конструктивно анізотропних композитних оболонок може бути пов'язане з використанням просторових співвідношень лінійної теорії пружності. В них же слід враховувати, що при виготовленні таких оболонкових систем, наприклад, шляхом укладання на оправку попередньо ортотропного волокнистого матеріалу в конструкції він отримує властивості більш низького порядку симетрії пружних характеристик. Тобто на макрорівні утворюється матеріал, що має одну площину пружної симетрії, яка є паралельною серединній поверхні оболонки. Відповідно до узагальненого закону Гука деформації розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення конструкцій стають взаємопов'язаними. Зазначене суттєво ускладнює розрахунки оболонкових конструкцій порівняно з тими, що виготовлені, наприклад, із ортотропного матеріалу.

Відомо, що традиційні композитні матеріали не завжди здатні використовуватись в умовах високих температур. Тому для їх захисту може використовуватися новий клас композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ). Знано, що типовий ФГМ є неоднорідним за товщиною композитом і виготовленим з різних фаз матеріальних складових, як правило, кераміки й металів або наноматеріалів. Завдяки змінним за товщиною властивостям такий матеріал здатний протистояти високотемпературному впливу та забезпечувати необхідні пружні характеристики основної несучої конструкції. Дослідження напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій, виготовлених з традиційних композитів, захищених з боку високотемпературних полів шарами функціонально-градієнтних матеріалів, також раціонально проводити в рамках співвідношень тривимірної теорії пружності.

Підсумовуючи, можливо зауважити, що проблеми тривимірного розрахунку напружено-деформованого стану, коливань товстостінних і стійкості нетонких конструктивно анізотропних циліндричних оболонок є недостатньо вивченими. З погляду на це, поставлені та розв'язані в дисертаційній роботі проблеми є важливими для розвитку розрахунків композитних конструкцій, а також актуальними й такими, що мають як наукові, так і прикладні значення.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась відповідно до наукових програм, тематики та загальних планів

досліджень кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування й пов'язана з виконанням держбюджетних наукових тем. Автор був керівником держбюджетної теми «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок обертання в уточнених постановках» (№ держ. реєстрації 0113U004051) і відповідальним виконавцем держбюджетної теми «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок в уточненій та тривимірній постановках» (№ держ. реєстрації 0117U000654). Також автор був виконавцем таких тем: «Науково-технічні аспекти розробки математичних моделей і реалізація на їх основі методик розрахунку конструкцій з композитних матеріалів» (№ держ. реєстрації 0199U001924), «Розробка теоретичних основ розрахунку статично-невизначених конструкцій з композитних матеріалів при різних режимах навантаження» (№ держ. реєстрації 0101U001892), «Розробка змішаного варіаційного принципу та методів розв'язання нелінійних задач механіки композитних оболонок» (№ держ. реєстрації 0107U004177), «Побудова канонічної системи рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенка і методів розв'язання задач стійкості оболонок з композитів» (№ держ. реєстрації 0110U000818). Всі теми мали бюджетне фінансування та виконувались за дорученням Міністерства освіти і науки України.

**Мета дослідження** у розв'язанні важливої науково-технічної проблеми, яка полягає у використанні просторових співвідношень лінійної теорії пружності для створення алгоритмів, розрахункових моделей, комп'ютерних програмних продуктів і проведення на цій основі досліджень:

- конструктивно анізотропних композитних товстостінних циліндричних оболонок стосовно встановлення параметрів їх напружено-деформованих станів, що знаходяться в полі силових дій від розподілених бокового або осьового тисків, дотичного зсувного зусилля рівномірно розподіленого на торцю (кручення), а також температурних впливів;
- знаходження параметрів, що характеризують вільні коливання товстостінних шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонкових конструкцій при урахуванні різноманітних умов закріплення їх торців і структурній будові за товщиною;
- встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та стійкості нетонких конструктивно анізотропних композитних циліндричних оболонок, що знаходяться в полі дії: розподіленого бокового чи осьового тисків, дотичного зсувного зусилля, рівномірно розподіленого на торцю.

**Завдання дослідження.** Для досягнення поставленої мети необхідно реалізувати такі завдання:

- модифікувати варіаційний принцип Ху – Васідзу, який ґрунтується на використовуваному в аналітичній механіці методі Гамільтона, стосовно виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла описують деформування та динаміку товстостінних анізотропних композитних циліндричних оболонок;

- спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, розробити, при використанні просторової теорії пружності, підхід щодо побудови системи з

шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок;

- привести тривимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружено-деформований стан (НДС) товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском, до одновимірної нормального виду Коші, використавши метод Бубнова – Гальоркіна. У випадку осьового тиску або розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення) приведення тривимірної системи рівнянь рівноваги до одновимірної здійснити методом прямих;

- тривимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружено-деформований стан товстостінних анізотропних циліндричних оболонок від температурної та термосилової дій, скориставшись методом Бубнова – Гальоркіна, привести до одновимірної нормального виду Коші;

- для встановлення параметрів про вільні коливання товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій розробити підхід, що спирається на метод Бубнова – Гальоркіна, стосовно приведення просторової системи диференціальних рівнянь руху до одновимірної;

- привести тривимірну систему диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок до одновимірної нормальної форми Коші, застосовуючи метод Бубнова – Гальоркіна. При розв'язку задачі стійкості від дії осьового тиску, розподіленого торцевого зсувного навантаження (кручення) чисельним методом прямих, використати метод дискретних перетворень Фур'є для знаходження напружень, що описують параметри докритичного НДС;

- розробити алгоритми та створити, на основі числового методу дискретної ортогоналізації, програмні комплекси для персональних комп'ютерів (ПК), що дозволять реалізувати одновимірні системи диференціальних рівнянь щодо встановлення для товстостінних анізотропних шаруватих композитних циліндричних оболонок параметрів вільних коливань, напружено-деформованих станів від силового, температурного та термосилового впливів;

- використовуючи створені програмні комплекси для ПК, дослідити та проаналізувати вплив на параметри, що описують напружено-деформований стан товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, дії бокового та осьового тисків, розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення);

- використовуючи створені комп'ютерні програмні комплекси для ПК, провести дослідження впливу на параметри напружено-деформованих станів товстостінної анізотропної циліндричної оболонки, виготовленої з композитного матеріалу, який захищений з боку температурного поля високої інтенсивності шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ), температурного та термосилового впливів;

- дослідити та отримати нові дані про вплив на параметри вільних коливань конструктивно анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій з волокнистих і функціонально-градієнтних матеріалів різних видів граничних умов на торцях, структурної будови за товщиною;

- розробити алгоритм і скласти, при використанні числового методу дискретної ортогоналізації, комп'ютерний програмний комплекс для персональних комп'ютерів

(ПК), в якому в єдиному процесі поєднати встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок;

- дослідити та отримати нові дані про вплив на стійкість нетонких циліндричних оболонок з волокнистих і функціонально-градієнтних композитних матеріалів конструктивної анізотропії, різних видів граничних умов, структурної будови за товщиною при дії них: бокового зовнішнього та осевого тисків, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого по торцях оболонки (кручення).

**Об'єктом дослідження** є нетонкі та товстостінні анізотропні циліндричні оболонки, виготовлені з композитних та функціонально-градієнтних матеріалів, що мають одну площину пружної симетрії.

**Предметом дослідження** є параметри лінійного НДС анізотропних товстостінних циліндричних оболонок, виготовлених з матеріалу з однією площиною пружної симетрії, під дією стискаючих або крутних навантажень, впливом змінного за товщиною температурного поля; параметри вільних коливань анізотропних товстостінних циліндричних оболонок; величини критичних навантажень, при яких докритичний рівноважний стан стає нестійким і нетонка циліндрична оболонка раптово змінює форму деформування (явище біфуркації); вплив механічних властивостей волокнистих композитів, кераміко-металевих та нанокерамічних ФГМ; вплив геометрії конструкції, конфігурації шаруватих пакетів з цих матеріалів, умов закріплення оболонок на процес деформування, вільні коливання та величини критичних навантажень.

**Методи дослідження.** Поставлена в роботі мета досягається шляхом виведення при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, систем тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла, описують деформування, динаміку товстостінних і стійкість нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонок. Приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних до одновимірних нормального виду Коші, у випадку розподіленого бокового тиску здійснюється при використанні процедури методу Бубнова – Гальоркіна. Зменшення розмірності системи, при дослідженні напружено-деформованого стану, у випадку осевого тиску та кручення проводиться при використанні методу прямих. Встановлення параметрів докритичного НДС, отриманих чисельним методом прямих, та процедурою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна при розв'язку задач стійкості від осевого тиску та кручення, проводиться за використання методу дискретних перетворень Фур'є. Чисельний розв'язок одновимірних крайових задач НДС, динаміки та стійкості реалізується чисельним методом Рунге-Кутта з дискретною ортогоналізацією за С.К. Годуновим.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у створенні розрахункової моделі та проведенні дослідження напружено-деформованого стану (від силового, температурного й термосилового впливу) та параметрів вільних коливань товстостінних і стійкості нетонких анізотропних циліндричних композитних шаруватих оболонок, матеріал яких має одну площину пружної симетрії, паралельну серединній поверхні. При цьому:

*Уперше:*

- модифіковано варіаційний принцип Ху – Васідзу стосовно виведення систем тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла описують деформування та динаміку товстостінних і стійкість нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонок;

- приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь до одновимірних здійснено при використанні процедури методу Бубнова – Гальоркіна, за яким всі функції напружень й переміщень розкладаються у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямом і вздовж твірної циліндричної оболонки;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених програмних комплексів для персональних комп'ютерів (ПК), розв'язано нові задачі щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонок від зовнішньої силової дії;

- реалізовано використання розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп'ютерних програмних комплексів для ПК щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, виготовлених з композитного матеріалу, який захищений з боку високого температурного поля шаром функціонально-градієнтного матеріалу;

- розроблений алгоритм і створений при використанні числового методу дискретної ортогоналізації комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому в єдиному процесі поєднані встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких шаруватих анізотропних циліндричних оболонок;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп'ютерних програмних комплексів для ПК, отримані нові дані щодо впливу анізотропії, лінійного деформування на втрату стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів;

- за допомогою числових досліджень отримано нові дані про вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу відносно координатних осей конструкції, при різних граничних умовах, геометрії та структурній будові оболонки, на її стійкість при дії осьового тиску, зовнішнього бокового тиску, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого на торцях оболонки (кручення);

- встановлено, що при стиску шаруватих оболонок з косоперехресним армуванням розрахункові критичні навантаження для нетонких анізотропних циліндричних оболонок можуть бути суттєво завищеними, якщо користуватись традиційною для оболонок із композитів моделлю ортотропного тіла;

- розроблені нові методики чисельного розрахунку стосовно деформування, стійкості дозволяють проводити структурну оптимізацію параметрів анізотропних циліндричних оболонок і в той же час отримувати дані, що не викликають ніяких сумнівів стосовно їх достовірності.

*Удосконалено:*

- при використанні складених алгоритмів програмні комплекси для персональних комп'ютерів щодо розв'язання задач зі встановлення параметрів

вільних коливань товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів.

*Набули подальшого розвитку:*

- підходи щодо дослідження в просторовій постановці впливу анізотропії, структурної будови за товщиною, умов закріплення на параметри вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів.

**Достовірність основних положень та здобутих результатів** забезпечується математичною коректністю постановки задач; співставленням отриманих результатів розв'язку задач з даними, що приведені в науковій літературі; застосуванням надійних і детально апробованих методів аналітичного та чисельного інтегрування при розв'язку однорідних і неоднорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю отриманих результатів при використанні чисельних методів та контролем їх точності.

**Практична цінність результатів.** Результати роботи суттєво розширюють можливості використання підходів будівельної механіки щодо впровадження розробленого розрахункового підходу для розв'язку просторових задач теорії анізотропних оболонкових конструкцій. Практичне значення представленої роботи в розробці підходів і відповідних алгоритмів на основі тривимірних співвідношень лінійної теорії пружності, що представлені в обчислювальних програмних комплексах для ПК і використовуються для чисельних розрахунків задач деформування, динаміки товстостінних і стійкості нетонких шаруватих циліндричних оболонок із матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Реалізація проблеми розрахунків параметрів деформування та стійкості реалізується при дії на циліндричні оболонки різноманітних видів статичного навантаження та температурного впливу. При цьому оцінено вплив на напружено-деформований стан, стійкість та частоти вільних коливань анізотропії композитного матеріалу, різних умов закріплення торців, шаруватості та геометрії циліндричних оболонок. Підходи та алгоритми, що реалізовані в програмних обчислювальних комплексах для ПК, впроваджено в ДП «Антонов» м. Київ, в Київському національному університеті будівництва і архітектури, в Національному університеті водного господарства та природокористування (м. Рівне) при виконанні держбюджетних тем згідно із замовленням МОН України. Дані з досліджень цієї роботи були використані при підготовці монографії, навчального посібника та підручника «Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності» для здобувачів вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», а також під час проведення науково-практичних конференцій викладацького складу, аспірантів і студентів. Також результати цієї роботи були використані при виконанні магістерських робіт студентами, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Мости і транспортні тунелі». Здобуті в дисертаційній роботі результати можливо використати під час проектування анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій в науково-дослідних, виробничих закладах і установах.

**Особистий внесок здобувача.** Отримані в представленій до захисту роботі розрахункові моделі, підходи, алгоритми та програмні комплекси, основні результати, що складають дисертаційну роботу, здобуті автором. Вони відображені



в індивідуальних та спільних публікаціях, де автор сформулював, поставив і розробив розрахункові математичні моделі задач про напружено-деформований стан, вільні коливання та стійкість анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.

Конкретний внесок автора дисертації в кожен наукову працю, опубліковану зі співавторами, наведено на С. 36 – 41.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати досліджень та окремі розділи роботи доповідалися на: VII Міжнародній науково-технічній конференції «АВІА-2007», НАУ (Україна, Київ, 2007 р.); на IX Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (Україна, Львів, 2014 р.); на 3<sup>rd</sup> int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS<sup>1</sup> (Germany, Braunschweig, 2015); на IV Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки», КНУ ім. Т. Шевченка (Україна, Київ, 2017 р.); на V Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», ОДАБА (Україна, Одеса, 2018 р.); на VIII Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», ОДАБА (Україна, Одеса, 2021 р.); на Міжнародній конференції «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво», НТУ (Україна, Київ, 2022 р.); на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (Україна, Львів, 2023 р.); на Міжнародній науково-технічній конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта», яка проходила в рамках форуму інженерів-механіків, присвяченого 125-річчю заснування КПІ ім. Ігоря Сікорського та навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту (Україна, Київ, 2023 р.); VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки», КНУ ім. Т. Шевченка, (Україна, Київ, 2023 р.); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2006–2023 рр.).

**Публікації.** За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 38 наукових праць, серед яких: чотири статті у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії «А» [1, 6–8], з них – три у періодичному виданні, що індексується в наукометричній базі Web of Science [6–8] інша в Scopus [1]; п'ятнадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії «Б» [9–23], сім статей у закордонних фахових журналах [2–5, 35, 37, 38], з них – чотири у періодичних виданнях, що індексуються в наукометричних базах Scopus, віднесених до другого і третього кuartилів (Q2 та Q3) [2–5]; одинадцять публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських і міжнародних наукових конференцій [24–34] та одна монографія [36], що видана у співавторстві.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, огляду літератури, шести розділів основної частини, загальних висновків, списку використаних літературних джерел із 324 найменувань, додатків, викладена на 383

сторінках друкованого тексту, серед яких 305 сторінок основного тексту, 112 рисунків, 72 таблиці і 22 сторінок додатків.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність роботи, сформульовано мету та поставлені задачі для її досягнення, визначені наукова новизна роботи та її практична цінність.

**В огляді літератури** міститься короткий огляд і аналіз досліджень напружено-деформованого стану, стійкості та вільних коливань композитних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці, виконаних різними авторами. Згідно з оглядом, найбільш вивченими типами оболонок є конструкції, виготовлені із композитних матеріалів, головні напрями пружності яких співпадають з осями прийнятої системи координат.

Дослідження товстостінних, а також нетонких оболонкових конструкцій потребує застосування тривимірних підходів. Однією з таких є лінійна тривимірна теорія пружності, а також уточнені теорії розрахунку оболонок, що базуються на підходах, коли тривимірний розрахунок апроксимується двовимірним. Значний внесок в розвиток та побудову методів розрахунків, що стосуються напружено-деформованого стану, вільних коливань та стійкості цих конструкцій в просторовій постановці, було зроблено такими авторами: Александров А.Я., Амбарцумян С.О., Бабич І.Ю., Баженов В.А., Беспалова О.І., Болотін В.В., Вабіщевич М.О., Василенко А.Т., Васильєв В.В., Власов В.З., Гайдайчук В.В., Гегелія Т.Г., Григолюк Е.І., Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Гринченко В.Т., Гузь О.Н., Жук Я.О., Іванченко Г.М., Козуб Ю.Г., Колчин Г.Б., Купрадзе В.Д., Лехніцкий С.Г., Лізунов П.П., Ломакін В.О., Лур'є А.І., Максим'юк Ю.В., Марчук О.В., Мяченков В.І., Назаренко В.М., Немиш Ю.М., Немчинов Ю.І., Новожилов В.В., Панкратова Н.Д., Пискунов С.О., Победря Б.Є., Подільчук Ю.М., Підстригач Я.С., Папкович П.Ф., Рвачев В.Л., Саркисян В.С., Семенюк М.П., Солодей І.І., Тимошенко С.П., Трач В.М., Улітко А.Ф., Чирков О.Ю., Шкриль О.О. та інші.

Проте залишається актуальною задача дослідження впливу анізотропії, обумовленої неспівпадінням головних напрямів пружності матеріалу з осями власної системи координат оболонки на напружено-деформований стан, стійкість та параметри вільних коливань оболонкових конструкцій в тривимірній постановці. Складність розв'язку таких задач обумовлена тим, що матеріал цих конструкцій в осях оболонки необхідно розглядати як такий, що має одну площину пружної симетрії, паралельну до серединної поверхні оболонки. В цьому випадку анізотропії деформації розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення стають взаємопов'язаними, що не має місця при розрахунках, наприклад, оболонок з ортотропних матеріалів.

**У першому розділі** показано, що відповідно до варіаційного принципу Ху – Васідзу рівняння руху, співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу  $\Pi_1$ , що визначається з інтегралу для динамічних задач:

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[ e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2 \right\} dt. \quad (1)$$

Тут варіюються без додаткових умов переміщення  $u_i$ , деформації  $e_{ij}$ , напруження  $\sigma_{ij}$ , напруження  $p_i$  на поверхні  $S_2$ , що викликані переміщеннями  $\bar{u}_i$ . Також у цьому функціоналі  $W(e_{ij})$  – потенціальна енергія деформації,  $T(u_i)$  – кінетична енергія,  $\Phi(u_i)$ ,  $\Psi(u_i)$  – потенціали об’ємних і поверхневих навантажень.

Потенціальна енергія деформації у векторно-матричному представленні записується так:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T B \varepsilon, \quad (2)$$

тут  $\varepsilon^T = (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{z\theta})$ ,  $B$  – матриця коефіцієнтів пружності.

З умови стаціонарності варіації функціоналу  $\delta\Pi_1 = 0$  отримуємо рівняння:

$$\sigma = B \varepsilon, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0 \quad (5)$$

і граничні умови  $\sigma_{ij}n_j = \bar{F}_i$  на поверхні  $S_1$  та умови  $u_i = \bar{u}_i$  й напруження  $p_i = \sigma_{ij}n_j$  на  $-S_2$ .

При записі обернених до співвідношень пружності (3) залежностей деформацій від напружень відповідно до гіпотези Дюгамеля-Неймана врахуємо температурну дію на оболонку:

$$\varepsilon = A \sigma + g, \quad (6)$$

де матриця  $A = B^{-1}$ , вектор  $g^T = (g_{zz}, g_{\theta\theta}, g_{rr}, g_{r\theta}, g_{rz}, g_{z\theta})$  характеризує температурну дію на конструкцію. Компоненти вектора  $g$  визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} g_{zz} &= \alpha_{zz} T; & g_{\theta\theta} &= \alpha_{\theta\theta} T; & g_{rr} &= \alpha_{rr} T; \\ g_{z\theta} &= \alpha_{z\theta} T; & g_{rz} &= \alpha_{rz} T; & g_{r\theta} &= \alpha_{r\theta} T. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $\alpha_{zz}$ ,  $\alpha_{\theta\theta}$ ,  $\alpha_{rr}$  – коефіцієнти лінійного температурного розширення за напрямками  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  відповідно (рис. 1);  $\alpha_{z\theta}$ ,  $\alpha_{rz}$ ,  $\alpha_{r\theta}$  – коефіцієнти лінійного температурного зсуву,  $T$  – температура, що відраховується від температури вихідного недеформованого стану.

Для виведення модифікованого змішаного варіаційного принципу Ху – Васідзу розділимо вектори  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  та  $g$  на дві частини так:

$$\begin{aligned} \sigma_1^T &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}), & \sigma_2^T &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}), \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), & \varepsilon_2^T &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}), \end{aligned}$$

$$g_1^T = (g_{rr}, g_{r\theta}, g_{rz}), \quad g_2^T = (g_{zz}, g_{\theta\theta}, g_{z\theta}). \quad (8)$$

Для скорочення записів співвідношення термопружності (6) та інші будемо записувати у матричному представленні:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

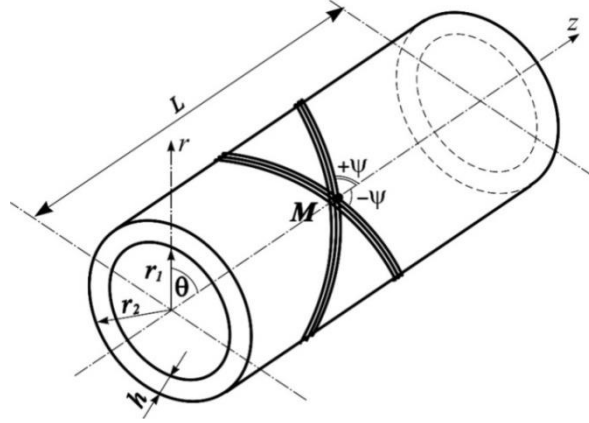


Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка

Потенціальну енергію деформації  $W(e_{ij})$  представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} W_1 = W(\sigma_1, \varepsilon_2) - \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) = & -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 + \\ & + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - \frac{1}{2} G_1^T B_{11}^{-1 T} \sigma_1 - \\ & - \frac{1}{2} G_1 B_{11}^{-1 T} \sigma_1^T + \frac{1}{2} G_1^2 B_{11}^{-1} - (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1 T}) G_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Кінетична енергія  $T(u_i)$  в (1) має вигляд:

$$T(u_i) = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dr d\theta dz, \quad (11)$$

де  $\dot{u}_r$ ,  $\dot{u}_\theta$ ,  $\dot{u}_z$  – швидкості в напрямі осей циліндричної системи координат  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  (рис. 1), а  $\rho$  – густина матеріалу, з якого виготовлена конструкція.

Також відповідно до (1) представимо потенціал поверхневих навантажень:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 = & \iint_{S_1} [(q_r^- u_r + q_\theta^- u_\theta + q_z^- u_z, h_1, t) + \\ & + (q_r^+ u_r + q_\theta^+ u_\theta + q_z^+ u_z, h_{n+1}, t)] dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$  – переміщення, що співпадають з осями прийнятої циліндричної системи координат (рис. 1), а  $t$  – час.  $Q$  – навантаження.

Тоді кінцевий вигляд функціоналу  $\Pi_1$ , що приведений в (1), такий

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V [W(\sigma_1, \varepsilon) - T(u_i)] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 \right\} dt. \quad (13)$$

Його варіація, що обумовлена зміною компонентів вектора переміщень і напружень, набирає вигляду:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[ -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2(u) B_{11}^T B_{12}^{-1}) \sigma_1 - \frac{1}{2} G_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} G_1 B_{11}^{-1T} \sigma_1^T \right] \delta\sigma_1 - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta\varepsilon_2 + \left[ \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - (\varepsilon_1^T(u) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1T}) G_1 \right] \delta u - T(u) \delta u \right\} dV + \iint_{S_1} (\Psi(u) \delta u) dS_1 - \iint_{S_2} p_i (u - \bar{u}) \delta p dS_2 \Bigg\} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Лінійні геометричні співвідношення для циліндричних оболонкових конструкцій мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; \quad e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут  $e_{rr}^i$ ,  $e_{zz}^i$ ,  $e_{\theta\theta}^i$  – відносні лінійні деформації за напрямом координатних осей  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ , а  $e_{rz}^i$ ,  $e_{r\theta}^i$ ,  $e_{z\theta}^i$  – дотичні до відповідних координатних поверхонь відносні зсувні деформації (рис. 1).

З умови стаціонарності (14), при використанні виразів для напружень  $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ , переміщень  $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ , геометричних співвідношень (15), залежностей для варіації кінетичної енергії (11), а також варіації роботи зовнішніх сил (12) і прирівнювання виразів при незалежних варіаціях напружень  $\delta\sigma_{rr}$ ,  $\delta\tau_{r\theta}$ ,  $\delta\tau_{rz}$  і переміщень  $\delta u_r$ ,  $\delta u_\theta$ ,  $\delta u_z$  в інтегралі за об'ємом  $V$  до нуля, отримуємо систему рівнянь руху у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} - \\ - \frac{c_{12}^i}{r} \alpha_{zz}^i T - \frac{c_{22}^i}{r} \alpha_{\theta\theta}^i T - \frac{c_{26}^i}{r} \alpha_{z\theta}^i T + \rho^i \omega^2 u_r + q_r; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \\ - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \rho^i \omega^2 u_z + q_z; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \\ - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_\theta + q_\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \alpha_{rr}^i T - a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{zz}^i T - \\
&- a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{zz}^i T - a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{zz}^i T - \\
&- a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{z\theta}^i T; \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \alpha_{rz}^i T; \\
\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i + \alpha_{r\theta}^i T.
\end{aligned} \tag{16}$$

Тут  $r$  – радіус циліндра, який не залежить від координат  $z$  та  $\theta$ ;  $\sigma_{rr}^i$ ,  $\tau_{rz}^i$ ,  $\tau_{r\theta}^i$  – компоненти тензора напружень (8);  $u_z^i$ ,  $u_\theta^i$ ,  $u_r^i$  – переміщення точок кожного  $i$ -го шару оболонки за напрямками відповідно осей циліндричної системи координат  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  (рис. 1);  $\omega$  – є частотою вільних коливань;  $\rho^i$  – густина матеріалу, з якого виготовлений  $i$ -й шар конструкції;  $\alpha_{zz}^i$ ,  $\alpha_{\theta\theta}^i$ ,  $\alpha_{rr}^i$  – коефіцієнти лінійного температурного розширення за напрямками  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  відповідно;  $\alpha_{z\theta}^i$ ,  $\alpha_{rz}^i$ ,  $\alpha_{r\theta}^i$  – коефіцієнти лінійного температурного зсуву,  $T$  – температура, що відраховується від температури вихідного недеформованого стану. Сталі  $c_{kl}^i$  ( $k, l = 1, 2, 3, 6$ ) – це характеристики  $i$ -го шару матеріалу, що визначаються за допомогою механічних констант  $a_{kl}^i$  матеріалу оболонки.

Таким чином, при використанні варіаційного рівняння (14) виведена тривимірна система руху лінійної теорії пружності (16) у змішаній формі з шести диференціальних рівнянь. Вона записана в частинних похідних, відносно шести компонентів векторів  $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$  і  $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$  та може бути застосована для розрахунку напружено-деформованого стану від силової та температурної дії, а також знаходження частот вільних коливань анізотропної шаруватої товстостінної композитної циліндричної оболонки. Головна відмінність отриманої системи рівнянь від представлених в літературі в тому, що вона є системою диференціальних рівнянь руху. Для її виведення було використано модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу. З її використанням може бути встановлено напружено-деформований стан та частоти вільних коливань в тривимірній постановці товстостінної композитної шаруватої анізотропної циліндричної оболонки.

Розв'язок системи (16) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при  $r = r_1$ :

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_r^0(z); \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_z^0(z); \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_\theta^0(z);$$

і  $r = r_2$ :

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_z^n(z); \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_\theta^n(z). \tag{17}$$

Умовам на торцях при  $z = 0$ ,  $z = L$  (рис. 1), наприклад,

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \tag{18}$$

Та умовам жорсткого контакту шарів для напружень і переміщень:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i),\end{aligned}\quad (19)$$

де  $i$  – номер шару оболонки.

**У другому розділі** викладено методику і алгоритм розв'язку рівнянь напружено-деформованого стану (НДС) та розв'язана задача дослідження напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних композитних шаруватих циліндричних оболонок при вісесиметричних силових навантаженнях в тривимірній постановці.

Для розв'язку задачі про напружено-деформований стан від силової дії шаруватих анізотропних товстостінних оболонкових конструкцій в просторовій постановці використаємо систему рівнянь (16), знехтувавши доданками, що враховують температурну дію та частоту вільних коливань.

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями приймемо у формі (15).

Співвідношення закону Гука, без урахування доданків, що враховують температурну дію, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії, запишемо спираючись на співвідношення (9):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; & e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i.\end{aligned}\quad (20)$$

Тут зв'язок між відносними лінійними та кутовими деформаціями і переміщеннями встановлюється у формі (15).

Зв'язок між пружними константами матеріалу кожного  $i$ -го шару з однією площиною пружної симетрії та пружними сталими ортотропного матеріалу встановлюється за С.Г. Лехніцьким.

Для анізотропної циліндричної оболонкової конструкції (рис. 1) розглянемо такі типи умов закріплення торців при  $z=0$  та  $z=L$ :

1. Наявність на торцях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкій з неї:

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (21)$$

2. Наявність на торцях циліндра осьових напружень  $\sigma_{zz}$ , розподілених таким чином, що торець залишається плоским:

$$\tau_{rz}^i = \tau_{z\theta}^i = u_z^i = 0. \quad (22)$$

3. Дія осьових і дотичних напружень, при якій торці не зміщуються в осьовому напрямі та не закручуються:

$$\tau_{rz}^i = u_z^i = u_\theta^i = 0. \quad (23)$$

4. Дія поперечних дотичних напружень, розподілених так, що торці не мають зміщень в радіальному напрямі:

$$\sigma_{zz}^i = \tau_{z\theta}^i = u_r^i = 0. \quad (24)$$

Розглянемо анізотропні циліндричні оболонки, що знаходяться під дією розподіленого, на бокових поверхнях оболонки, внутрішнього або зовнішнього тиску.

Зауважимо, що розв'язок задач НДС циліндричних оболонок, під розподіленим боковим тиском, анізотропія шарів яких обумовлена утворенням однієї площини пружної симетрії для граничних умов (23), (24), представлено в роботах Я.М. Григоренка та його учнів, а для умов (21)÷(22) вперше в цій роботі.

При розв'язку тривимірної системи рівнянь (16) для граничних умов на поверхнях (17) і торцях, наприклад, (21) циліндричної оболонки, використовується аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна. Згідно з ним, компоненти напружень і переміщень системи (16) розкладемо в подвійні тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної циліндра  $z$  та коловою координатою  $\theta$  так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (17) та (21):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
 u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Тут  $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) – коефіцієнти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки:  $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, u_r, u_z, u_{\theta}$ , а  $p, m, k$  – хвильові числа в цих рядах. Параметр  $l_m = m\pi/L$ , де  $L$  – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Однією з цілей даної роботи є дослідження стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці під сталим в коловому напрямі навантаженням. Тому до моменту втрати стійкості докритичний напружено-деформований стан циліндричних оболонок є вісесиметричним і компоненти НДС є незмінними за коловою координатою. З урахуванням цього після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (16) за допомогою співвідношень (25), отримаємо для кожного  $i$ -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші:

$$\frac{dy^i}{dr} = T^i(r) \bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = \overline{1, 12}), \quad (26)$$



де  $\bar{y}^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}\}^T$  – розв’язуюча вектор-функція, а  $T^i(r)$  – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що залежить від аргумента  $r$ .

До системи рівнянь (26) необхідно приєднати відповідні неоднорідні рівняння, що описують граничні умови на поверхнях оболонки:

$$B_1 \bar{y}(r) = b_1; \quad r = r_1; \quad (27)$$

$$B_2 \bar{y}(r) = b_2; \quad r = r_2. \quad (28)$$

Тут  $B_1, B_2$  – матриці розміром  $6 \times 12$ , що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (17).

Система (26), разом з граничними умовами на поверхнях перпендикулярних напрямку інтегрування (27) та (28), дозволяє визначати функції, що описують напружено-деформований стан оболонки (25)  $y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}$  за її товщиною.

Після розв’язку системи (26), визначення компонентів напружень  $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$  та переміщень  $u_r^i, u_z^i, u_\theta^i$  проведемо при використанні тригонометричних рядів (25). Напруження  $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$  і  $\tau_{z\theta}^i$  в довільній точці оболонки визначаються відповідно до закону Гука у формі (20).

Для розв’язку задачі про напружено-деформований стан циліндричних шаруватих оболонок з анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії під дією осьової сили використаємо розв’язуючу систему рівнянь (16). Розв’язок системи (16) отримуємо, використовуючи такі граничні умови:

- на внутрішній ( $r = r_1$ ) і зовнішньої ( $r = r_2$ ) поверхнях оболонки:

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \quad (29)$$

- на торцях:

$$\sigma_{zz}^i = \sigma_{zz}^i, \quad u_r^i = u_\theta^i = 0, \quad (30)$$

де  $\sigma_{zz}^i$  – напруження на торцях циліндра, що відповідають осьовій стискаючій силі.

Для розв’язку системи (16) і визначення компонентів НДС оболонок введемо вектор  $\bar{N}^i = \{\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, u_r^i, u_z^i, u_\theta^i\}^T$ . Діючи у припущенні, що докритичний напружено-деформований стан є вісесиметричним, перетворимо тривимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних (16) в двовимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних у векторній формі:

$$\frac{d\bar{N}^i}{dr} = F^i \left( r, z^i, \bar{N}^i, \frac{\partial \bar{N}^i}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{N}^i}{\partial z^2} \right). \quad (31)$$

Одним з підходів, який дозволяє розв’язати двовимірну систему (31) шляхом її приведення до одновимірної, є метод прямих, що ґрунтується на використанні скінченно-різницевої моделі. Відповідно до нього, система (31) приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом заміни похідних за координатою  $z$  різницевиими співвідношеннями. Для цього розбиваємо інтервал

зміни похідних за координатою  $z$  на  $n-1$  рівних відрізків за допомогою  $n$  рівновіддалених перерізів, тобто

$$\begin{aligned}\frac{\partial x(r, z_j)}{\partial z} &\approx \frac{1}{2(z_{j+1} - z_j)}(x(r, z_{j+1}) - x(r, z_{j-1})); \\ \frac{\partial^2 x(r, z_j)}{\partial z^2} &\approx \frac{1}{(z_{j+1} - z_j)^2}(x(r, z_{j+1}) - 2x(r, z_j) + x(r, z_{j-1})).\end{aligned}\quad (32)$$

Тут  $x$  – компоненти напружено-деформованого стану системи (31);  $j = \overline{1, n}$ , де  $n$  – кількість рівновіддалених перерізів, якими розбивається оболонка вздовж твірної.

З урахуванням (32) співвідношення (31) перетворюються в систему порядку  $bn$  звичайних диференціальних рівнянь відносно похідної за координатою  $r$ :

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r, n)\bar{y}^i. \quad (33)$$

Тут прийнято:  $\bar{y}^i = \{\sigma_{rr}^{il}; \tau_{rz}^{il}; \tau_{r\theta}^{il}; u_r^{il}; u_z^{il}; u_\theta^{il}; \dots; \sigma_{rr}^{ij}; \tau_{rz}^{ij}; \tau_{r\theta}^{ij}; u_r^{ij}; u_z^{ij}; u_\theta^{ij}; \dots; \sigma_{rr}^{in}; \tau_{rz}^{in}; \tau_{r\theta}^{in}; u_r^{in}; u_z^{in}; u_\theta^{in}\}^T$ ;  $j = \overline{1, n}$ ,  $T^i(r)$  – матриця коефіцієнтів при невідомих компонентах напружень і переміщень.

До системи рівнянь (33) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$C_1 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_1; \quad (34)$$

$$C_2 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_2, \quad (35)$$

де  $C_1, C_2$  – матриці розміру  $3n \times bn$ , що мають діагонально-кліткову структуру.

Після розв'язку системи (33) значення напружень  $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$  і  $\tau_{z\theta}^i$  в довільній точці оболонки визначають за законом Гука в формі (20).

Для розв'язку задачі про напружено-деформований стан циліндричних шаруватих оболонок з анізотропних матеріалів з однією площиною пружної симетрії під дією торцевого рівномірно розподіленого зсувного зусилля (крутного моменту  $S$ ) використаємо розв'язуючу систему диференціальних рівнянь (16).

Розв'язок системи (16) отримаємо використовуючи граничні умови:

- на внутрішній ( $r = r_1$ ) і зовнішній ( $r = r_2$ ) поверхнях оболонки:

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \quad (36)$$

- на торцях:

$$\tau_{z\theta}^i = \tau_{z\theta}^{\prime i}, \quad \tau_{rz}^i = u_z^i = 0, \quad (37)$$

де  $\tau_{z\theta}^{\prime i}$  – напруження на торцях циліндра, що відповідають торцевому рівномірно розподіленому зсувному зусиллю.

Для розв'язку задачі використовуємо алгоритм методу прямих, описаний вище, та отримуємо систему порядку  $bn$  звичайних диференціальних рівнянь відносно похідної за координатою  $r$ :

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r, n)\bar{y}^i. \quad (38)$$

Тут прийнято:  $\bar{y}^i = \left\{ \sigma_{rr}^{i1}; \tau_{rz}^{i1}; \tau_{r\theta}^{i1}; u_r^{i1}; u_z^{i1}; u_\theta^{i1}; \dots; \sigma_{rr}^{ij}; \tau_{rz}^{ij}; \tau_{r\theta}^{ij}; u_r^{ij}; u_z^{ij}; u_\theta^{ij}; \dots; \sigma_{rr}^{in}; \tau_{rz}^{in}; \tau_{r\theta}^{in}; u_r^{in}; u_z^{in}; u_\theta^{in} \right\}^T$ ;  $j = \overline{1, n}$  – кількість рівновіддалених перерізів, якими розбивається оболонка вздовж твірної,  $T^i(r)$  – матриця коефіцієнтів при невідомих компонентах напружень і переміщень.

До системи рівнянь (38) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$C_1 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_1; \quad (39)$$

$$C_2 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_2, \quad (40)$$

де  $C_1, C_2$  – матриці розміру  $3n \times 6n$ , що мають діагонально-кліткову структуру.

Після розв'язку системи (38) значення напружень  $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$  і  $\tau_{z\theta}^i$  в довільній точці оболонки визначаються відповідно до закону Гука у формі (20).

Реалізація отриманих одновимірних задач (26), (33), (38) про напружено-деформований стан товстостінної циліндричної оболонки проводилась при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Спираючись на системи диференціальних рівнянь, що описують напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок в тривимірній постановці (26), (33), (38), отримано розв'язки задач для цих конструкцій під розподіленим зовнішнім, осьовим тисками та дією торцевого рівномірно розподіленого зсувного зусилля. Ці результати здобуто за використання двох підходів. В першому з них реалізовано основний анізотропний просторовий розв'язок, який спирається на закон Гука (20) «АПР», у другому, так звані, «анізотропні» механічні характеристики закону Гука (20)  $c_{16}^i = c_{26}^i = c_{36}^i = a_{45}^i = 0$  і він позначений ортотропний просторовий розв'язок «ОПР».

За допомогою розробленого підходу визначено параметри напружено-деформованого стану товстостінних (відношення товщини  $h$  до радіуса серединної поверхні  $r$  складає  $h/r=1/5$ , відношення довжини  $L$  до радіуса серединної поверхні таке  $L/r=2$ ) анізотропних шаруватих циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішніх силових факторів.

Використовуючи розроблену обчислювальну програму для ПК, досліджено вплив зміни структурної будови шаруватого пакета оболонки за товщиною та зміни граничних умов на її торцях на параметри НДС при повороті головних напрямів пружності матеріалу відносно власної криволінійної системи координат оболонкової конструкції, що знаходиться в умовах зовнішнього бокового розподіленого тиску, осьового тиску та кручення.

Результати дослідження НДС товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією розподіленого бокового тиску для граничних умов на торцях (21), представлено на рис. 2. На них показано залежність від кута повороту  $\psi$  головних напрямів пружності матеріалу перехресно укладених шарів відносно осей криволінійної системи координат оболонки напружень  $\tau_{z\theta}$  (рис. 2 (а)) на зовнішній поверхні та переміщення  $u_\theta$  (рис. 2 (б)) на серединній

поверхні. Позначення кривих на рис. 2 таке: 1 – одношарова оболонка, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова і 1' – представляє результати, отримані без урахування так званих «анізотропних» констант матеріалу, підхід «ОПР».

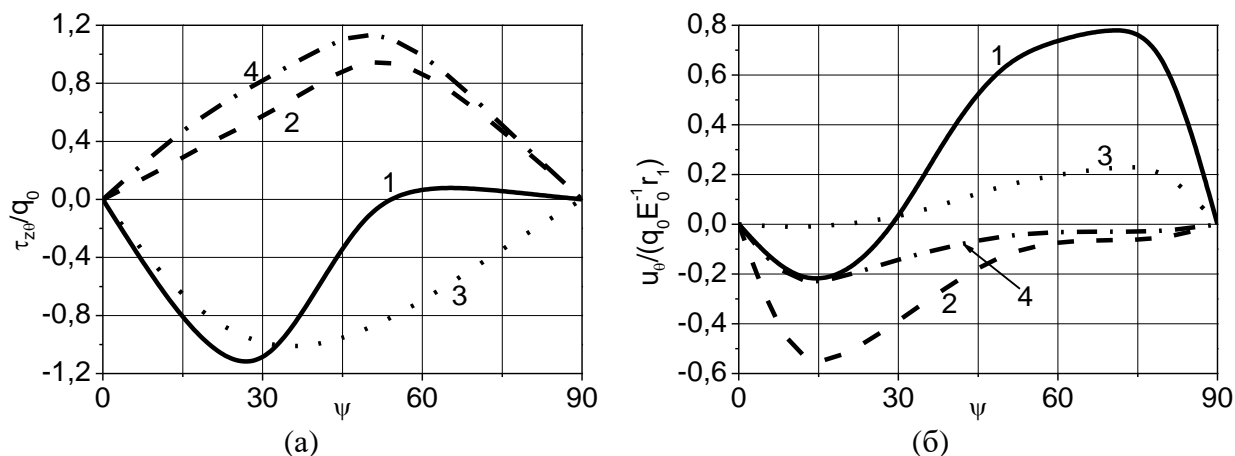


Рис. 2. Залежність параметрів НДС анізотропних оболонок під розподіленим боковим тиском, при зміні кількості шарів, від кута  $\psi$ :  $\tau_{z\theta}$  – (а);  $u_\theta$  – (б)

Рис. 2 (а), що описує дотичні напруження  $\tau_{z\theta}$ , вказує на те, що знак  $\tau_{z\theta}$  залежить від знаку кута повороту  $\psi$  волокон шару поверхні, до якого прикладене розподілене зовнішнє навантаження. Якщо для одношарового циліндра (крива 1) та для зовнішнього шару тришарового (крива 3) має місце орієнтація осей ортотропії « $+\psi$ », то напруження  $\tau_{z\theta}$  або від'ємні в усьому діапазоні зміни кута  $\psi$ , або їх максимальні значення є від'ємними. Для випадків дво- (крива 2) та чотиришарових (крива 4) оболонок, де волокна зовнішнього шару повернуті на кут « $-\psi$ » величини  $\tau_{z\theta}$  – додатні. Знаки величин переміщень в коловому напрямі  $u_\theta$ , як видно з графіків рис. 2 (б), так само, як і дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$ , залежать від орієнтації волокон шару, до якого прикладене розподілене бокове навантаження.

На рис. 3 представлено характер зміни дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  залежно від збільшення парної кількості перехресно армованих під кутом  $\psi = \pm 50^\circ$  шарів у випадку зовнішнього розподіленого бокового тиску на анізотропну циліндричну оболонку. На рис. 4 показаний розподіл  $\tau_{z\theta}$  за товщиною цієї ж циліндричної оболонки при десяти шарах  $\psi = \pm 50^\circ$ .

З аналізу результатів рис. 3 видно, що дотичні напруження  $\tau_{z\theta}$  при збільшенні кількості шарів  $\psi = \pm 50^\circ$  зростають поступово і стають співвимірними із нормальними напруженнями  $\sigma_{zz}$  для розглянутого випадку навантаження. При цьому напруження  $\tau_{z\theta}$  зростають на 32% при збільшенні кількості шарів від 2-х до 8-ми. Подальше збільшення кількості шарів призводить до зменшення цих розбіжностей до 0,5% при порівнянні пакетів з, наприклад, 18-ма та 20-ма шарами.

З рис. 4 видно, що величини дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  при розподіленому боковому тиску на шаруватий циліндр змінюють свої знаки при переході від шару до шару на протилежні та змінюються в межах до 5% для окремих шарів.

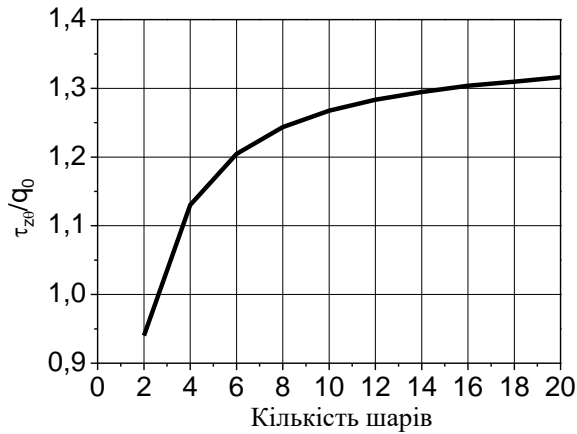


Рис. 3. Залежність напружень  $\tau_{z\theta}$  від збільшення парної кількості шарів

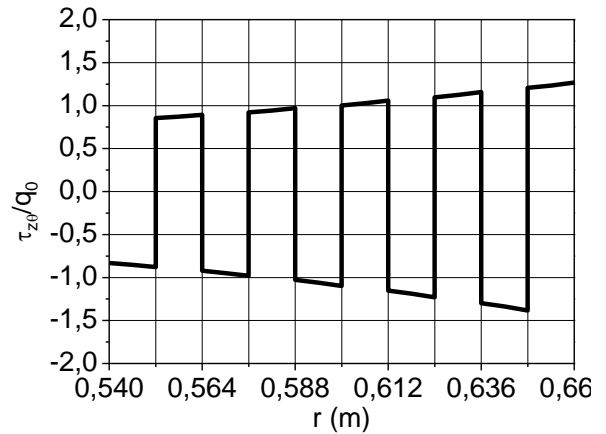


Рис. 4. Розподіл напружень  $\tau_{z\theta}$  за товщиною десятишарової оболонки

Залежність параметрів НДС товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією осевого тиску для граничних умов на торцях (30) від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу  $\psi$  перехресно укладених шарів, представлено на рис. 5.

На рис. 5 представлено напруження  $\tau_{z\theta}$  (рис. 5 (а)) на зовнішній поверхні та переміщення  $u_\theta$  (рис. 5 (б)) на серединній поверхні. Позначення кривих на рис. 5 відповідають таким, що і на рис. 2.

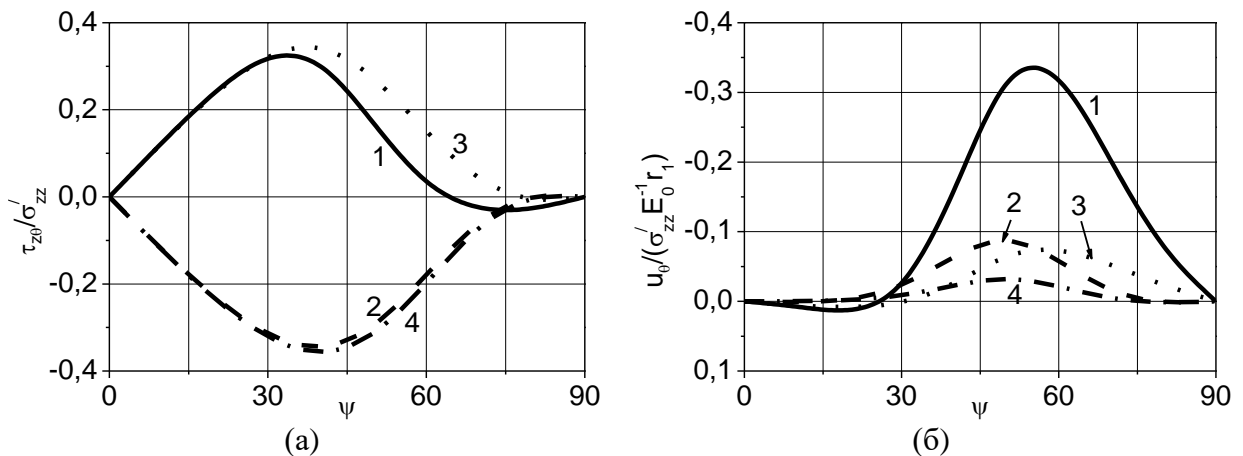


Рис. 5. Залежність параметрів НДС циліндричних анізотропних оболонок під дією осевого тиску, при зміні кількості шарів, від кута  $\psi$ :  $\tau_{z\theta}$  – (а);  $u_\theta$  – (б)

Аналіз рис. 5 (а) вказує на те, що знаки при максимальних величинах дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  залежать від кількості шарів з перехресним армуванням волокнистим ортотропним матеріалом. Для непарної кількості (криві 1, 3) вони додатні, для парної (криві 2, 4) – від’ємні. Вплив збільшення кількості шарів на переміщення за коловим напрямом  $u_\theta$  відображено на рис. 5 (б). Взаємне розташування кривих свідчить про те, що зі збільшенням кількості шарів анізотропної оболонки переміщення  $u_\theta$  зменшуються.

Рис. 6 характеризує розподіл величин дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  залежно від

збільшення парної кількості шарів, що перехресно армовані під кутом  $\psi = \pm 50^0$  для випадку осьового тиску на анізотропну циліндричну оболонку.

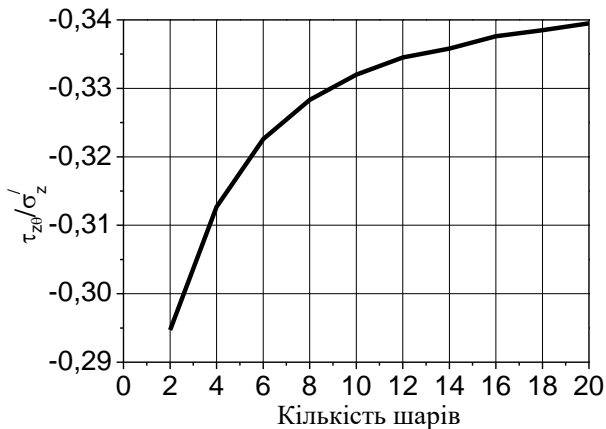


Рис. 6. Зміна напружень  $\tau_{z\theta}$  при збільшенні парної кількості шарів

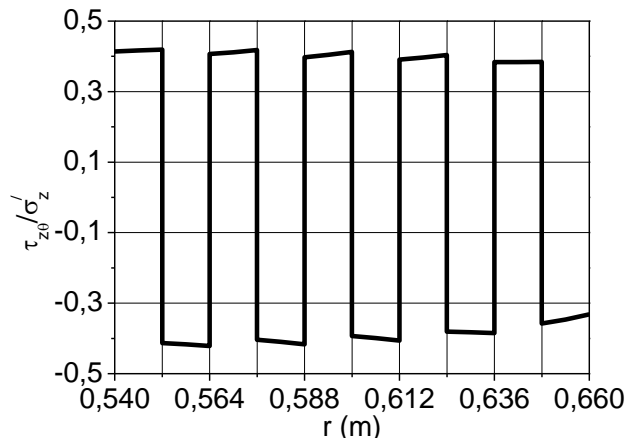


Рис. 7. Розподіл напружень  $\tau_{z\theta}$  за товщиною десятишарової оболонки

Аналізуючи результати, представлені на рис. 6, зробимо такі висновки. Дотичні напруження  $\tau_{z\theta}$  зі збільшенням кількості шарів зростають за абсолютними значеннями, так на початковому етапі збільшення кількості шарів від двох до двадцяти, на 15%.

На рис. 7 показаний розподіл компоненти НДС  $\tau_{z\theta}$  за товщиною десятишарової циліндричної оболонки під дією осьового тиску, при  $\psi = \pm 50^0$ . Як видно, напруження  $\tau_{z\theta}$  зменшуються за товщиною циліндра від внутрішньої поверхні до зовнішньої і це зменшення досягає 20%. Водночас, як і для випадку розподіленого бокового тиску, величини дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$  при осьовому тиску змінюють свої знаки при переході від шару до шару на протилежні.

Рис. 8 характеризує залежність параметрів НДС товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією крайового зсувного зусилля (кручення) для граничних умов (37) на торцях від кута повороту  $\psi$  головних напрямів пружності матеріалу перехресно укладених шарів.

На рис. 8 представлено напруження  $\sigma_{zz}$  (рис. 8 (а)),  $\sigma_{\theta\theta}$  (рис. 8 (б)) на зовнішній поверхні оболонки. Позначення кривих на рис. 8 відповідають таким, що представлені на рис. 2.

Згідно з рис. 8 (а) знаки максимальних значень нормальних напружень  $\sigma_{zz}$  залежать від парної або непарної кількості шарів в пакеті. Для парної кількості (криві 2, 4)  $\sigma_{zz}$  – додатні, а для непарної (криві 1, 3) – від'ємні. Подібний розподіл має місце і для нормальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  рис. 8 (б). При непарній кількості шарів пакета (криві 1, 3) максимальні значення цих напружень від'ємні, при парній (криві 2, 4) – додатні.

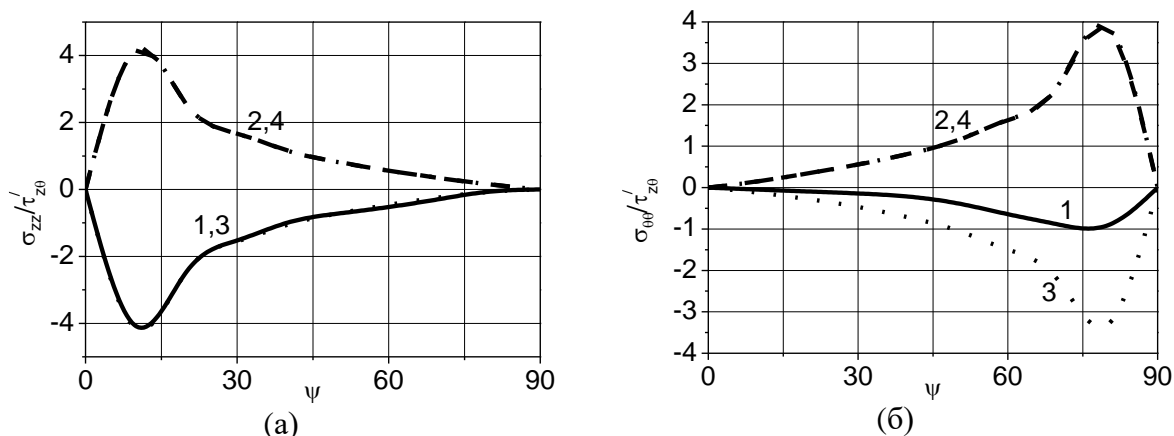


Рис. 8. Залежність параметрів НДС циліндричних анізотропних оболонок під дією кручення, при зміні кількості шарів, від кута  $\psi$  :  $\sigma_{zz}$  – (а);  $\sigma_{\theta\theta}$  – (б)

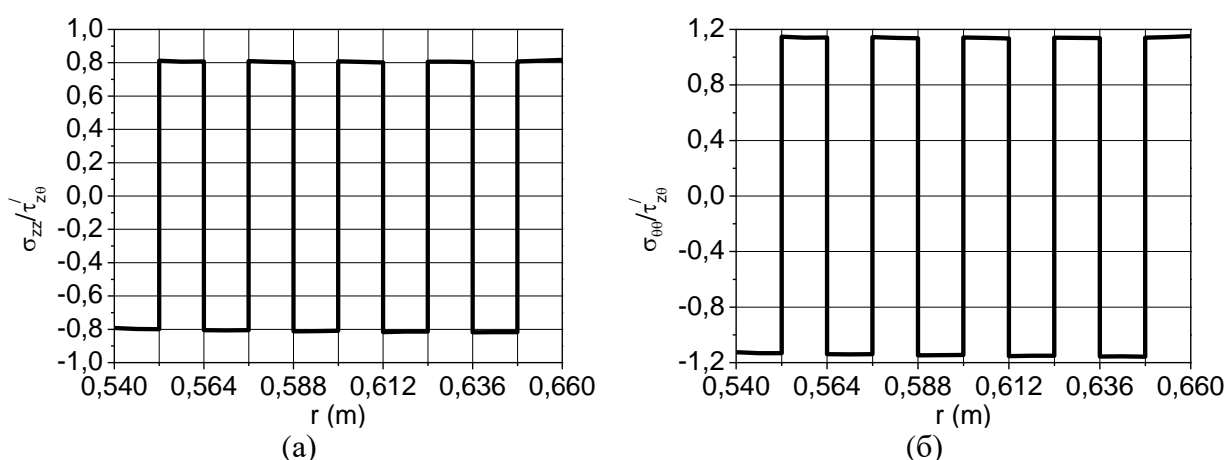


Рис. 9. Розподіл напружень  $\sigma_{zz}$  – (а);  $\sigma_{\theta\theta}$  – (б) за товщиною десятишарової циліндричної оболонки

На рис. 9 показаний розподіл компонент напружено-деформованого стану  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  у випадку кручення десятишарової анізотропної циліндричної оболонки за її товщиною при  $\psi = \pm 50^\circ$ . Аналізуючи результати, приведені на рис. 9, можемо зробити такі висновки. Величини нормальних напружень  $\sigma_{zz}$  (рис. 9 (а)) та  $\sigma_{\theta\theta}$  (рис. 9 (б)), у випадку кручення, при переході від шару до шару змінюють свої значення на протилежні. При цьому поступово зменшуючись від зовнішньої поверхні до внутрішньої за абсолютними значеннями на 3% для  $\sigma_{zz}$  та на 2,3% для  $\sigma_{\theta\theta}$ .

**У третьому розділі**, використовуючи тривимірну систему диференціальних рівнянь (16) лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що виведена при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, представлено підхід до розв'язку задачі про напружено-деформований стан від термосилової дії для анізотропних циліндричних товстостінних шаруватих оболонок з композитних матеріалів.

Композитні матеріали не завжди можуть використовуватись в умовах дії високих температур, оскільки їх механічні характеристики, при цьому, можуть суттєво погіршуватись. В роботі розглянуто випадок захисту циліндричних

оболонки з композитів від температурних полів високої інтенсивності функціонально-градієнтними матеріалами (ФГМ) як кераміко-металевими, так і такими, що виготовлені з наноматеріалів. Встановленню характеристик таких матеріалів присвячено значну кількість наукових досліджень як вітчизняних, так і зарубіжних вчених. Найповнішими з яких можливо вважати дослідження Shen Hui-Shen.

В роботі, в якості функціонально-градієнтного матеріалу, виготовленого з використанням наноматеріалу, розглядається варіант армування керамічної матриці вуглецевими нанотрубками, розглянутий в роботах К.В. Аврамова. При цьому припускається, що всі вуглецеві нанотрубки можливо розташувати у матеріалі за деяким наперед вибраним напрямом, утворивши таким чином ортотропний ФГМ у своїх власних осях.

Для розв'язку задачі про термонапружений стан шаруватих анізотропних оболонкових конструкцій в просторовій постановці використаємо систему рівнянь (16), знехтувавши доданками, що враховують вільні коливання.

Співвідношення закону Гука для матеріалу з однією площиною пружної симетрії з урахуванням доданків температурної дії запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{zz}^i T; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{\theta\theta}^i T; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{z\theta}^i T; \\ e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \alpha_{33}^i T - a_{13}^i \beta_{zz}^i T - a_{23}^i \beta_{\theta\theta}^i T - a_{36}^i \beta_{z\theta}^i T; \\ e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{r\theta}^i = a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i.\end{aligned}\quad (41)$$

Тут  $\beta_{zz}^i$ ,  $\beta_{\theta\theta}^i$ ,  $\beta_{z\theta}^i$  – термопружні коефіцієнти  $i$ -го шару, що залежать від температури  $T(^{\circ}\text{K})$ :

$$\begin{aligned}\beta_{zz}^i T &= (c_{11}^i \alpha_{zz}^i + c_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{16}^i \alpha_{z\theta}^i) T; \\ \beta_{\theta\theta}^i T &= (c_{12}^i \alpha_{zz}^i + c_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{26}^i \alpha_{z\theta}^i) T; \\ \beta_{z\theta}^i T &= (c_{16}^i \alpha_{zz}^i + c_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{66}^i \alpha_{z\theta}^i) T.\end{aligned}\quad (42)$$

Зв'язок між відносними лінійними, кутовими деформаціями та переміщеннями встановлюється у формі (15).

Між коефіцієнтами лінійного температурного розширення та зсуву матеріалу кожного  $i$ -го шару з однією площиною пружної симетрії  $\alpha_{zz}^i$ ,  $\alpha_{\theta\theta}^i$ ,  $\alpha_{z\theta}^i$ ,  $\alpha_{rr}^i$  і коефіцієнтами лінійного температурного розширення ортотропного однонапрявленого матеріалу  $\alpha_z^i$ ,  $\alpha_{\theta}^i$ ,  $\alpha_r^i$  має місце такий взаємозв'язок:

$$\begin{aligned}\alpha_{zz}^i &= \alpha_z^i \cos^2 \psi_i + \alpha_{\theta}^i \sin^2 \psi_i; & \alpha_{\theta\theta}^i &= \alpha_z^i \sin^2 \psi_i + \alpha_{\theta}^i \cos^2 \psi_i; \\ \alpha_{z\theta}^i &= 2(\alpha_z^i - \alpha_{\theta}^i) \cos \psi_i \sin \psi_i; & \alpha_{rr}^i &= \alpha_r^i.\end{aligned}\quad (43)$$

Тут  $\psi_i$  – кут повороту головних напрямів пружності матеріалу  $i$ -го шару до твірної оболонки (рис. 1).

Розв'язок системи (16) у випадку лише температурної дії на оболонку має задовольняти умовам на бічних поверхнях (29), а для випадку спільної



температурної та силової дій у вигляді, наприклад, зовнішнього розподіленого бокового тиску умовам (17).

Розглянемо випадок виконання на торцях циліндричної оболонкової конструкції, наприклад, умов (21). При розв'язку тривимірної системи рівнянь (16) для граничних умов на поверхнях (29) при температурному або (17) при термосиловому впливах та умовах на торцях (21) циліндричної оболонки скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна (25). Згідно з нею, розкладемо всі параметри НДС системи (16) в подвійні тригонометричні ряди вздовж твірної циліндра  $z$  та коловою  $\theta$  координатами так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (21).

Розглядається випадок сталої вздовж твірної та в коловому напрямі циліндричної оболонки температури. При цьому НДС товстостінних циліндричних оболонок вважається вісесиметричним, а отже, і компоненти, що описують такий стан конструкції, є сталими за коловою координатою.

З урахуванням цього, після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (16) за допомогою співвідношень (25), отримуємо для кожного  $i$ -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку нормальної форми Коші:

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r)\bar{y}^i + f^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = \overline{1,12}), \quad (44)$$

де  $\bar{y}^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^i; y_{2,m}^i; y_{3,m}^i; y_{4,m}^i; y_{5,m}^i; y_{6,m}^i\}^T$  – розв'язуюча вектор-функція.  $T^i(r)$  – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу  $r$ ,  $f^i$  – компоненти напруженого стану, що пов'язані з температурою в системі (16).

До системи рівнянь (44), у випадку лише температурного впливу, необхідно приєднати відповідні однорідні рівняння, що описують граничні умови на поверхнях оболонки:

$$B_1 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_1; \quad (45)$$

$$B_2 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_2. \quad (46)$$

Тут  $B_1, B_2$  – матриці розміром  $6 \times 12$ , що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (29).

У випадку термосилового впливу граничні умови на поверхнях оболонки приймаються у виді (27), (28).

Чисельна реалізація отриманої таким чином одновимірної задачі проводилась при використанні методу дискретної ортогоналізації.

Після розв'язку системи (44), визначення компонентів напружень  $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$  та переміщень  $u_r^i, u_z^i, u_\theta^i$  проведемо аналогічно випадку дії на оболонку лише силового навантаження (зовнішнього розподіленого бокового тиску). Напруження  $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$  та  $\tau_{z\theta}^i$  виразимо через розв'язуючі функції закону Гука (41), з використанням залежностей (15).

Для реалізації запропонованого підходу розглянуто напружено-деформований стан циліндричної оболонкової конструкції під спільним впливом температури та зовнішнім розподіленням боковим навантаженням.

В якості матеріалу оболонки вибраний волокнистий композит боропластик, який захищений на зовнішній поверхні оболонки від дії температурного поля високої інтенсивності функціонально-градієнтним матеріалом. ФГМ представлено двома видами: перший – кераміко-металевий, другий – нанокерамічний.

Температурне поле прийнято змінним лише за товщиною шару ФГМ оболонки від  $T=293^{\circ}\text{K}$  на його внутрішній поверхні, що відповідає температурі вихідного недеформованого стану до  $T=393^{\circ}\text{K}$  на зовнішній. Оболонка також знаходилась під дією зовнішнього розподіленого бокового тиску.

На рис. 10 для кута  $\psi = 60^{\circ}$  проілюстровано вплив на розподіл параметрів НДС за товщиною циліндричної оболонки температури (крива 1) та (крива 2) спільної дії розподіленого зовнішнього бокового тиску та температури. Структура ФГМ – кераміко-металева.

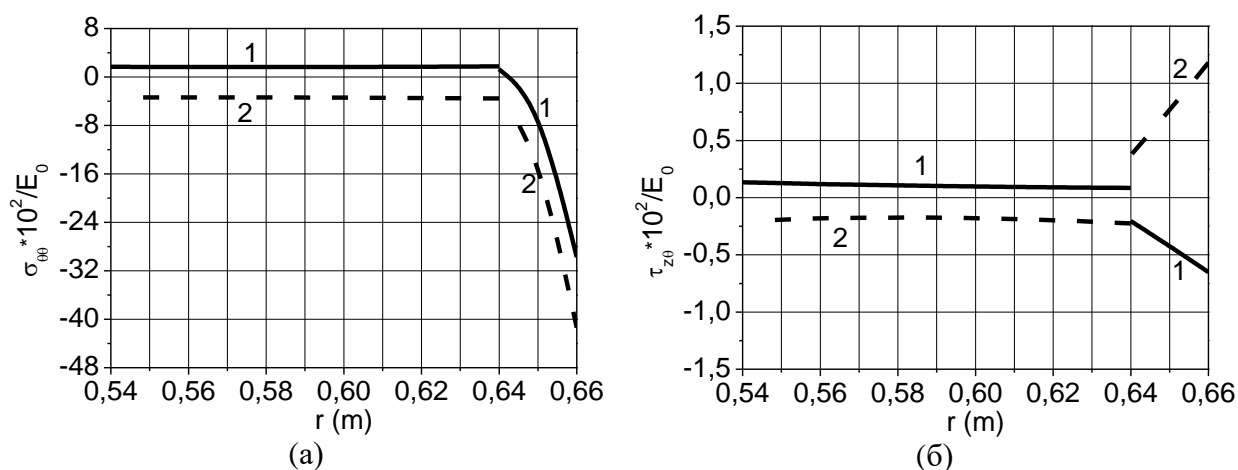


Рис. 10. Розподіл компонент НДС: а)  $\sigma_{\theta\theta}$ ; б)  $\tau_{z\theta}$  за товщиною оболонки із зовнішнім шаром з кераміко-металевого ФГМ

Аналізуючи результати, представлені на рис. 10, звернемо увагу на таке. У випадку спільної температурної та силової дій, розподіл компонент напружено-деформованого стану за товщиною оболонки змінився порівняно з лише температурним впливом. Так, розбіжність між максимальними значеннями напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  (рис. 10 (а)) під температурним впливом з та без силової дії знаходиться в межах 39%. Спільний термосиловий вплив на оболонку призвів до того, що дотичні напруження  $\tau_{z\theta}$  змінили знаки своїх значень за товщиною захисного шару ФГМ на протилежні порівняно з лише температурною дією. Розходження між абсолютними значеннями максимальних величин  $\tau_{z\theta}$  з та без силового впливу знаходяться в межах 81%.

На рис. 11 для кута  $\psi = 60^{\circ}$  представлено залежність розподілу параметрів НДС за товщиною циліндричної оболонки від температури (крива 1) та (крива 2) спільної дії розподіленого зовнішнього бокового тиску та температури. Вид ФГМ – нанокерамічний.

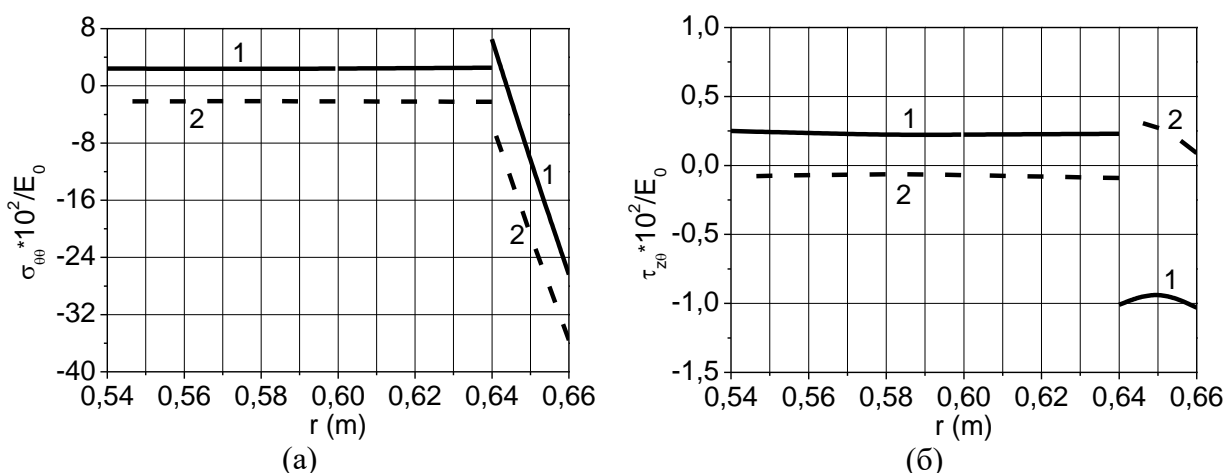


Рис. 11. Розподіл компонент НДС: а)  $\sigma_{\theta\theta}$ ; б)  $\tau_{z\theta}$  за товщиною оболонки із зовнішнім шаром з нанокерамічного ФГМ

З аналізу представлених на рис. 11 даних можемо зробити такі висновки. Спільна дія бокового тиску та температури призводить до перерозподілу компонент напружено-деформованого стану конструкцій з шаром нанокерамічного ФГМ порівняно із лише температурним впливом. Нормальні напруження  $\sigma_{\theta\theta}$  (рис. 11 (а)) при сумісній дії температурного та силового впливів зростають в порівнянні лише із силовою дією. Водночас в захисному шарі із нанокерамічного ФГМ напруження  $\sigma_{\theta\theta}$  залишаються більшими ніж в шарі боропластику, максимальні розбіжності знаходяться в межах 98%. Дотичні напруження  $\tau_{z\theta}$  у випадку лише температурної дії розподіляються в межах захисного шару практично рівномірно (рис. 11 (б), крива 1). При спільній дії температури та навантаження вони зростають за абсолютними значеннями у напрямі від поверхні, що знаходиться під впливом температурного поля вищої інтенсивності (рис. 11 (б), крива 2). Розбіжність між абсолютними значеннями максимальних величин  $\tau_{z\theta}$  від температурної та термосилової дій складає 69%.

**В четвертому розділі** представлено тривимірну систему диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що отримана на основі модифікованого варіаційного принцип Ху – Васідзу. Виведена таким чином система рівнянь руху співпадає з такою, що отримана в роботах акад. Я.М. Григоренка та його учнів.

Для приведення тривимірної системи до одновимірної застосовано аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна. Після його використання отримано нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, що описують вільні коливання анізотропних шаруватих товстостінних циліндричних оболонок в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = (T(r) - \omega^2 C(r))\bar{y}, \quad T(r) = t_{n,l}(r), \quad C(r) = c_{n,l}(r), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad (47)$$

ТУТ  $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}^T$  – розв’язуюча вектор-функція,  $T(r)$  – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу  $r$ ,  $C(r)$  – матриця, що характеризує інерційні

властивості оболонки,  $\omega$  – частота вільних коливань.

До системи рівнянь (47) приєднуються відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_1; \quad (48)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_2, \quad (49)$$

де  $B_1, B_2$  – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (29).

Розв'язок отриманої одновимірної системи диференціальних рівнянь (47) проводиться з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації, який було відповідно адаптовано для розв'язку рівнянь руху.

В якості реалізації запропонованого підходу до визначення частот вільних коливань анізотропних шаруватих товстостінних циліндричних оболонок розглянуто задачі для анізотропних конструкцій з композитних та функціонально-градієнтних матеріалів, утворених косоперехресним укладанням шарів армованого матеріалу. Проаналізовано вплив різних схем армування, структурної конфігурації пакету шарів, товщини, умов закріплення торців на частоти вільних коливань циліндричних оболонкових конструкцій, що виготовлені з волокнистих та функціонально-градієнтних композитних матеріалів при врахуванні механічних характеристик закону Гука (20) (підхід «АПР»). Отримані результати порівняно із частотами вільних коливань, вирахованими на основі ортотропного підходу «ОПР».

На рис. 12 графічно представлено результати дослідження мінімальних частот вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок з волокнистого композиту боропластика із зовнішнім шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). В якості ФГМ вибрано два їх види, що представлені у третьому розділі. Механічні характеристики складових ФГМ визначені для  $T=293^0\text{K}$  ( $20^0\text{C}$ ). Відношення товщини до радіуса серединної поверхні циліндра  $h/r=1/5$ . Граничні умови на торцях відповідають умовам (21).

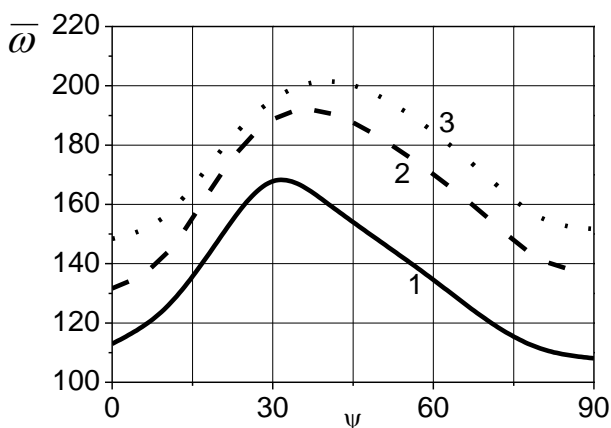


Рис. 12. Величини мінімальних частот вільних коливань  $\bar{\omega}$  для оболонки з шаром ФГМ

Позначення кривих на рис. 12 таке: 1 – оболонка з боропластику, 2 – боропластикова оболонка із шаром кераміко-металевого ФГМ, 3 – така ж оболонка, але із шаром нанокерамічного ФГМ.

Аналіз результатів приведених на рис. 12 дозволяє зробити такі висновки. Приведені значення мінімальних частот вільних коливань  $\bar{\omega}$  як для боропластикових, так і для боропластикових із шарами ФГМ залежать від зміни кута повороту  $\psi$

головних напрямів пружності матеріалу. При цьому, незалежно від структури за товщиною оболонки, найбільші значення  $\bar{\omega}$  для розглянутих умов закріплення мають місце для  $30^0 \leq \psi \leq 40^0$ .

При цьому оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ уздовж всієї числової осі  $\psi$  сприймають найбільші значення мінімальних частот вільних коливань порівняно з іншими двома типами конструкцій, а найменші мають місце для конструкції з боропластику. Розбіжність між максимальними величинами мінімальних частот вільних коливань  $\bar{\omega}$  для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із боропластиковою досягає 16,7%. А співставлення її із оболонкою з шаром кераміко-металевого ФГМ вказує на неспівпадіння частот в 5,2%.

**У п'ятому розділі** виведено систему диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок, на основі модифікованого змішаного варіаційного принципу Ху – Васідзу. Для цього пружний потенціал (10) представимо у вигляді:

$$W_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1^T B_{11}^{-1}\sigma_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12})\varepsilon_2 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1})\sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12})\varepsilon_2. \quad (50)$$

Скористаємось розкладами, що приведені в роботах В.В. Новожилова:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)}; \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}, \end{aligned} \quad (51)$$

де параметри напружено-деформованого стану з нуликом – докритичні значення деформацій і напружень; з індексами (1) – збурені; з індексами (2) – теж, лише у квадраті;  $\alpha$  - нескінченно мала стала, що незалежна від координат.

Підставивши (51) в (50) та здійснивши ряд математичних перетворень, включаючи операцію варіювання, з урахуванням геометричних залежностей Коші (15), отримаємо проварійований функціонал (50). Прирівнявши в якому коефіцієнти при варіаціях переміщень і напружень до нуля, отримаємо систему рівнянь стійкості для анізотропних нетонких циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{c_{23} + 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}}{r^2} u_r + \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \\ &+ \left( -\frac{\partial u_z}{\partial z} c_{13} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) c_{23} - \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) c_{36} - \sigma_{rr} c_{33} + r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} c_{23} - \right. \\ &- \left. \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left( -2r \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) c_{23} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \right) c_{36} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{33} \right) - \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left( -2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} c_{13} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) c_{23} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) c_{36} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{33} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta \right) \tau_{r\theta}^0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{36} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2c_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \tau_{r\theta} a_{45} - \tau_{rz} a_{55} + r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} c_{13} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left( -2r \left( -\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} a_{45} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} a_{55} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \\
&+ \left( -2 \left( -\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} a_{45} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} a_{55} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{23} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{36} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - c_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \left( -\frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \tau_{r\theta} a_{44} - \tau_{rz} a_{45} + \right. \\
&+ \left. r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} c_{23} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \\
&+ \left( -2r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} a_{44} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} a_{45} \right) - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left( -2r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} a_{44} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} a_{45} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r \right) \tau_{r\theta}^0; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) c_{23} + \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) c_{36} + \sigma_{rr} c_{33}; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \tau_{r\theta} a_{45} + \tau_{rz} a_{55}; \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} a_{44} + \tau_{rz} a_{45}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Тут напруження  $\sigma_{rr}^0$ ,  $\tau_{rz}^0$  та  $\tau_{r\theta}^0$  визначаються після розв'язку задачі про докритичний напружено-деформований стан залежно від діючого на анізотропну циліндричну оболонку навантаження.

Розв'язок системи (52) можливо здійснити при використанні граничних умов на бічних поверхнях у вигляді (17), а на торцях циліндричної оболонки для (21)÷(24).

Представимо розв'язок задачі стійкості пружних нетонких анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском в просторовій постановці для граничних умов на торцях (21).

Для приведення тривимірної задачі (52) до одновимірної використаємо процедуру методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею розкладемо всі компоненти напружень та переміщень системи (52) в подвійні тригонометричні ряди (25) за координатою вздовж твірної  $z$  так, що б вони задовольняли граничним умовам на торцях (21), а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою  $\theta$ .

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (52) за допомогою співвідношень (25), отримуємо нескінченну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (53)$$

де  $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}^T$  – розв’язуюча вектор-функція,  $T(r, \lambda)$  – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що залежить від аргумента  $r$  та параметра навантаження  $\lambda$ .

До системи рівнянь (53) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_1; \quad (54)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_2, \quad (55)$$

де  $B_1, B_2$  – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (17).

Для розв’язку тривимірної задачі (52), у випадку осьового тиску, скористаємося описаною процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Водночас, при розв’язку задачі стійкості анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском врахуємо, що докритичні компоненти НДС визначались згідно з чисельним методом прямих, для їх узгодження із процедурою методу Бубнова – Гальоркіна було використано операцію дискретного перетворення Фур’є. Відповідно до неї представлено розподіл вздовж осі  $z$  докритичних значень напружень  $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0$  та  $\tau_{r\theta}^0$ , отриманих при використанні методу прямих, у вигляді рядів:

$$x^0(z) = \frac{a_0^{x^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{x^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{x^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z. \quad (56)$$

Тут  $x^0$  – докритична компонента напруженого стану  $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0, \tau_{r\theta}^0$ ;  $i$  – кількість членів ряду  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $n = \frac{(N+1)}{2}$ ;  $N$  – кількість рівновіддалених перерізів, якими розбивається оболонка вздовж твірної при розв’язку задачі про докритичний НДС методом прямих;  $z_{od}$  – відстань між цими перерізами за координатою  $z$  в циліндричній системі координат (рис. 1);  $a_0^{x^0}, a_i^{x^0}, b_i^{x^0}$  – коефіцієнти тригонометричних рядів Фур’є, в які розкладаються відповідні компоненти напруженого стану  $x_j^0$ , де  $j = 1 \div N$ .

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (52) з урахуванням (56) за допомогою співвідношень (25) отримаємо нескінченну систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (57)$$

ТУТ  $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}^T$  – розв’язуюча вектор-функція,  $T$  – квадратна матриця зі змінними коефіцієнтами, що

залежить від аргументу  $r$  та параметра навантаження  $\lambda$ .

До системи рівнянь (57) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування виду (54) і (55).

У випадку крайового зсувного зусилля (крутного моменту), при умовах на торцях (37), отримується нескінченна система виду (57) разом із умовами на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування виду (54), (55).

Розв'язок одновимірних систем диференціальних рівнянь (53) і (57) проведено при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації, який було адаптовано для розв'язку задач стійкості анізотропних циліндричних оболонок.

**Шостий розділ** містить результати розрахунку та аналізу стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок з композитів, що утворені косоперехресним укладанням шарів волокнистого матеріалу, на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Розглянуто такі випадки навантаження: зовнішній розподілений боковий тиск (рис. 13), осьовий тиск (рис. 14) і торцеве зсувне навантаження (кручення) (рис. 15). Досліджено вплив анізотропії матеріалу, розглянутого виду, на критичні величини навантажень за умови зміни товщини та кількості шарів циліндричних оболонкових конструкцій при урахуванні механічних характеристик закону Гука (20) (підхід «АПР») в просторовій постановці. Отримані результати розрахунків порівняно із критичними значеннями, здобутими на основі ортотропної моделі «ОПР» розрахунку оболонок. На рисунках нумерація кривих відповідає кількості перехресно армованих шарів,  $1'$  – результатам розрахунку за підходом «ОПР».

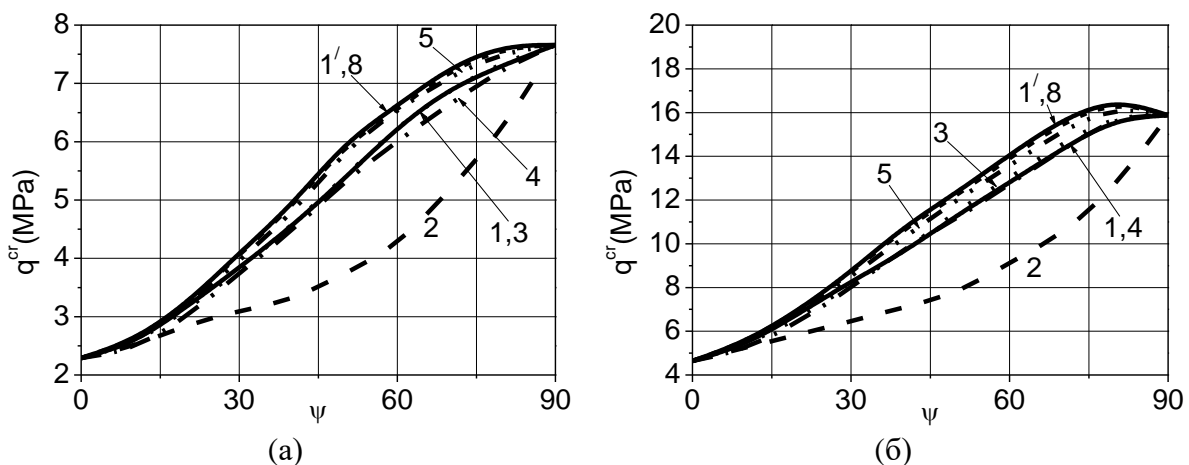


Рис. 13. Розподіл критичних навантажень зовнішнього тиску  $q^{cr}$  шаруватих оболонок з відношенням:  $h/r=1/40$  (а),  $h/r=1/30$  (б)

Проведені дослідження дозволяють стверджувати, що запропонований підхід «АПР» до розрахунку на стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок призводить до отримання менших величин критичних навантажень розподіленого бокового та осьового тисків у порівнянні із ортотропним підходом «ОПР». Так, для одношарових циліндрів під дією розподіленого бокового тиску максимальне розходження між результатами «АПР» та «ОПР» складає 12,3%, а у випадку осьового тиску досягає 117%. У разі дії торцевого зсувного навантаження його критичні величини, вираховані згідно з підходом «АПР» лише в діапазоні зміни кута повороту головних напрямів пружності матеріалу  $70^{\circ} \leq \psi \leq 90^{\circ}$ , виявляються



більшими за здобуті згідно з підходом «ОПР». Максимальна розбіжність має місце для одношарової оболонки з відношенням  $h/r=1/40$  і не перевищує 3%.

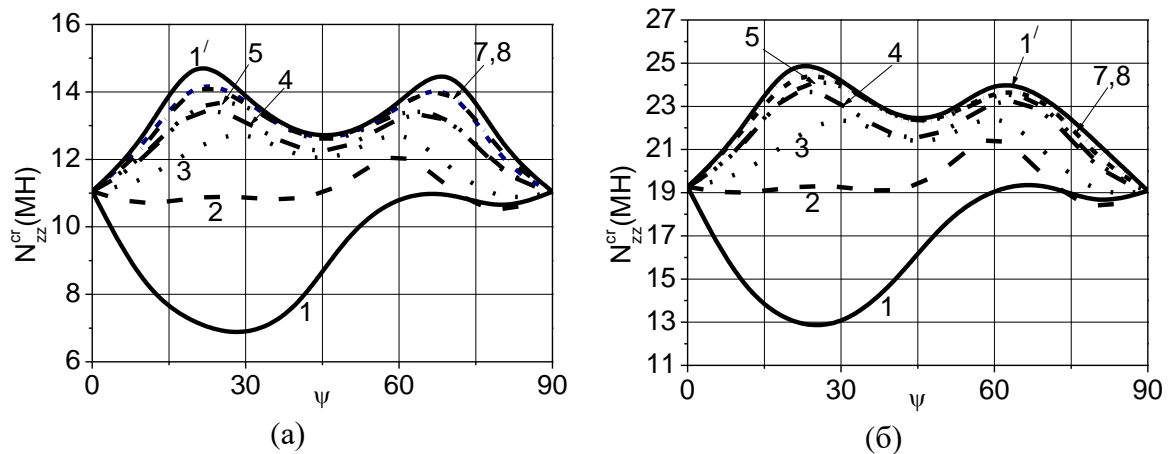


Рис. 14. Розподіл критичних навантажень осевого тиску  $N_z^{cr}$  шаруватих оболонок з відношенням:  $h/r=1/40$  (а),  $h/r=1/30$  (б)

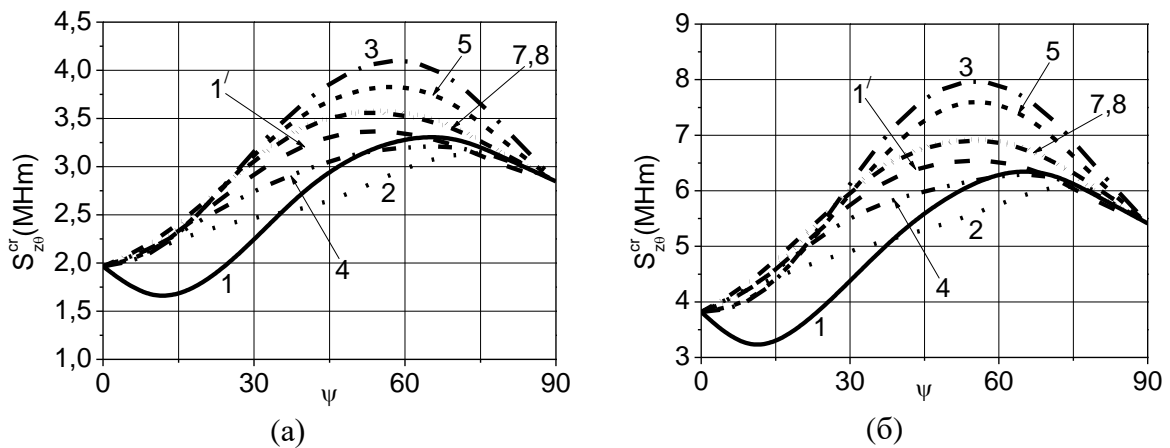


Рис. 15. Розподіл критичних навантажень крайового зсуву  $S_z^{cr}$  шаруватих оболонок з відношенням:  $h/r=1/40$  (а),  $h/r=1/30$  (б) для навантаження, прикладеного за додатним напрямом

Збільшення кількості шарів з перехресним укладанням армованого матеріалу до семи-восьми у всіх випадках призводить до зменшення вказаних розбіжностей між результатами, отриманими за підходами «АПР» та «ОПР». Результати вираховані за підходом «АПР», залишаючись меншими, впритул наближаються до критичних значень, отриманих відповідно ортотропного підходу «ОПР». Різниця між критичними величинами, для оболонок з структурних пакетів складених з семи-восьми шарів, у випадку розподіленого бокового тиску, не перевищує 1,1%, а для осевого тиску та кручення 6%.

Рис. 16 представляє результати дослідження стосовно встановлення величин критичних навантажень розподіленого бокового тиску анізотропних циліндричних оболонок з волокнистого композиту боропластика та шару функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). Його представлено для двох видів: перший – кераміко-металевий, другий – нанокерамічний (див. третій розділ). Механічні характеристики складових ФГМ визначені для  $T=293^{\circ}\text{K}$  ( $20^{\circ}\text{C}$ ). Відношення товщини оболонки  $h$  до радіусу її середньої поверхні  $h/r=1/40$ . Закріплення торців відповідає умовам (21). На рис. 16 крива 1 – відображає критичні значення, що отримані для одношарової боропластикової оболонки, а графіки 2 та 3 ілюструють

величини критичних навантажень розподіленого бокового тиску для оболонок з боропластику із шаром відповідно кераміко-металевого чи нанокерамічного ФГМ.

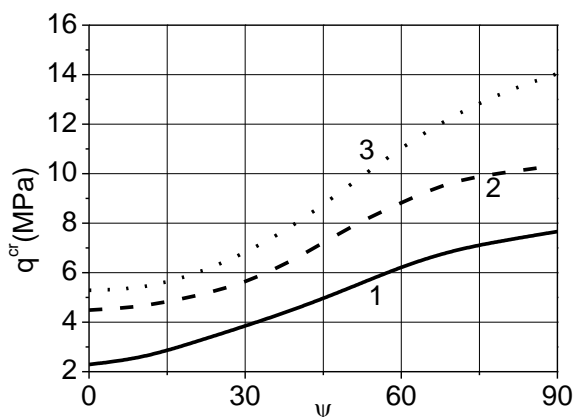


Рис. 16. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску  $q^{cr}$  для оболонки з шаром ФГМ

Аналізуючи результати, що представлені на рис. 16, можливо зробити такі висновки. Величини критичних навантажень  $q^{cr}$  як для суцільних боропластикових, так і для боропластикових із шарами ФГМ, залежать від зміни кута повороту  $\psi$  головних напрямів пружності матеріалу.

При цьому оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ вздовж всієї числової осі для  $\psi$  сприймають найбільші значення критичних навантажень  $q^{cr}$  порівняно з іншими двома типами

конструкцій, а найменші мають місце для боропластикової конструкції. Розбіжність між величинами критичних навантажень  $q^{cr}$  для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із боропластиковою знаходиться в межах 57%, а співставлення із боропластиковою з шаром кераміко-металевого ФГМ не перевищує 49%.

## ВИСНОВКИ

Основні наукові результати і висновки дисертаційної роботи зводяться до такого:

1. Вперше розроблено підхід до побудови системи з шести диференціальних рівнянь руху просторової лінійної теорії пружності, що описують НДС і вільні коливання товстостінних циліндричних анізотропних оболонок. Підхід ґрунтується на модифікації варіаційного принципу Ху – Васідзу, що дозволяє записувати відповідні рівнянням в тривимірній постановці граничні умови та співвідношення закону Гука. За використанням отриманої системи і відповідних їй граничних умов можуть бути встановлені величини напружень і переміщень від силової та температурної дій, в просторовій постановці при різних видах граничних умов на торцях товстостінної шаруватої композитної анізотропної циліндричної оболонки та також з ФГМ.

2. На основі модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу вперше розроблено підхід до виведення системи з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості лінійної просторової теорії пружності, що описують стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок.

3. Вперше представлено підхід, що базується на використанні процедури аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, щодо зменшення розмірності тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги, отриманих з просторової системи рівнянь руху шляхом нехтування доданками, що враховують температурну дію та частоту вільних коливань. У випадку дії на оболонки розподіленого бокового тиску, в пропонованому підході, використано розкладення функцій напружень і

переміщень в подвійні тригонометричні ряди Фур'є за коловим напрямом та уздовж твірної циліндричної оболонки так, щоб вони задовольняли умовам на торцях. Отримана нормального виду Коші одновимірна система рівнянь дозволяє визначати компоненти напружено-деформованого стану від силової дії на товстостінні анізотропні шаруваті циліндричні оболонкові конструкції. При чому, залежно від типу граничних умов на торцях оболонки розв'язуюча одновимірна система НДС може бути шостого або дванадцятого порядків. Для випадків осьового тиску та розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення) запропоновано підхід до зменшення розмірності тривимірної системи рівнянь рівноваги, отриманих з системи рівнянь руху, що включає в себе припущення про незмінність параметрів НДС циліндричної оболонки в коловому напрямі та використання методу прямих уздовж твірної зазначеної конструкції.

4. Вперше, при використанні аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, представлено підхід щодо зменшення розмірності тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги, отриманих з просторової системи рівнянь руху шляхом нехтування доданками, що враховують частоту вільних коливань, у випадку температурної та термосилової дії. Отримана нормального виду одновимірна система рівнянь дозволяє визначати компоненти напружено-деформованого стану від температурної та термосилової дії товстостінних анізотропних циліндричних оболонок.

5. На основі просторової системи рівнянь руху, що виведена за використанням модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, за використання аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, представлено підхід до отримання нескінченної одновимірної системи диференціальних рівнянь, що дозволяє визначати частоти вільних коливань товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій.

6. Вперше, при використанні метода Бубнова – Гальоркіна, викладений підхід стосовно приведення тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості до одновимірної в нормальній формі Коші. Відповідно до нього, функції напружень і переміщень розкладено в подвійні тригонометричні ряди Фур'є вздовж твірної оболонки та врахована їх періодичність за коловим напрямом. Для встановлення напружень, що описують докритичний НДС при осьовому тиску та розподіленому торцевому зсувному навантаженні (крученні), використано чисельний метод прямих із процедурою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, а також метод дискретних перетворень Фур'є.

7. Для реалізації одновимірних розв'язуючих систем диференціальних рівнянь про напружено-деформований стан від силового та температурного впливів, а також вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок за радіальним напрямом використано чисельний метод дискретної ортогоналізації, який було відповідним чином адаптовано. На цій основі створено програмні комплекси для персональних комп'ютерів (ПК), що дозволяють розв'язати нові задачі щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану від силового, температурного і термосилового впливу, а також вільних коливань товстостінних анізотропних композитних циліндричних оболонок.

8. За використання розроблених комп'ютерних програм, в яких реалізовано пропонувані підходи, вперше проведені дослідження в просторовій постановці напружено-деформованого стану товстостінних конструктивно анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих композитів. Анізотропія характеризується наявністю однієї площини пружної симетрії. Оболонки знаходяться під дією: розподіленого бокового, осьового тисків, розподіленого по торцю зсувного навантаження (кручення) та мають чотири види граничних умов на торцях. Отримано та проаналізовано результати дослідження НДС, від вищезазначених дій, в точках уздовж твірної та за товщиною оболонки залежно від кількості перехресно-укладених шарів. Показано, що всупереч уявленню про те, що збільшення кількості укладених шарів до семи – восьми веде до можливості розрахунку анізотропної оболонки згідно з ортотропним підходом, анізотропні складові НДС не зникають і це повинно бути враховано при оцінці несучої здатності конструкцій.

9. Спираючись на розроблений підхід, вперше проведені дослідження та проаналізовано напружено-деформований стан від температурної та термосилової дії в просторовій постановці товстостінної анізотропної циліндричної оболонки, виготовленої з композитного матеріалу, який захищений з боку високотемпературного поля шаром кераміко-металевого або нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). При цьому, вперше розглянуто випадок зміни кута орієнтації армуючих кераміку нанотрубок відносно твірної, що веде до утворення шару ФГМ з однією площиною пружної симетрії, паралельною серединній поверхні оболонки.

10. На основі розробленого підходу проведено розрахунки та здійснено аналіз результатів визначення частот вільних коливань в просторовій постановці товстостінних анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих композитів та з функціонально-градієнтних матеріалів, які також можуть проявляти анізотропні властивості в осях криволінійної циліндричної системи координат, при різних видах граничних умов на торцях, схемах армування оболонок, конфігурації пакету шарів і геометрії конструкцій за їх товщиною.

11. При використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації розроблено алгоритм та складено комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому вперше в єдиному обчислювальному процесі поєднано встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.

12. Використовуючи розроблений пакет комп'ютерних програм, вперше досліджено в просторовій постановці стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок, виготовлених з волокнистих композитних і функціонально-градієнтних матеріалів, які також можуть проявляти анізотропні властивості в осях криволінійної системи координат циліндрів.

13. Спираючись на проведені дослідження, можливо зробити такі висновки:

- вперше було представлено, що урахування анізотропії композитних і функціонально-градієнтних матеріалів при розрахунках НДС та стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці є важливим фактором оцінки їх несучої здатності;

- вперше було показано, що дотичні зсувні напруження  $\tau_{z\theta}$ , які у випадку осьового або розподіленого зовнішнього тисків на анізотропну циліндричну оболонку, можливо відшукати лише за використання запропонованого просторового підходу, не зникають при збільшенні кількості перехресно армованих шарів однакової товщини. У випадку розподіленого бокового тиску напруження  $\tau_{z\theta}$  стають співвимірними нормальним напруженням  $\sigma_{zz}$  та досягають близько 20% від максимальних значень напружень  $\sigma_{\theta\theta}$ , а при осьовому тиску  $\tau_{z\theta}$  складають 42% від напружень  $\sigma_{zz}$ . При прикладенні до анізотропної циліндричної оболонки розподілених на торцю зсувних зусиль (кручення) представлений просторовий підхід дозволяє визначити величини нормальних напружень  $\sigma_{zz}$  та  $\sigma_{\theta\theta}$ , що неможливо відповідно до розрахунків за ортотропною моделлю. Зі збільшенням кількості перехресно-армованих шарів однакової товщини зазначені напруження не зникають, а зростають, і для  $\sigma_{zz}$  досягають 75%, а для  $\sigma_{\theta\theta}$  106% від дотичних напружень  $\tau_{z\theta}$ ;

- вперше встановлено, що спільна силова та температурні дії на анізотропну циліндричну оболонку з волокнистого композиту, захищену з боку температурного поля високої інтенсивності шарами кераміко-металевого або нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу, суттєво змінює напружено-деформований стан конструкції. Так розбіжності між порівнюваними напруженнями  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  та  $\tau_{z\theta}$  в температурному та термосиловому станах досягають 69%;

- найбільші відхилення між частотами вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок, за пропонуваним підходом та ортотропною моделлю, мають місце у випадках одношарових та двошарових пакетів і знаходяться в межах 9% та 12% відповідно. Встановлено, що товстостінні циліндричні оболонкові конструкції з волокнистого композиту боропластику мають менші значення частот вільних коливань порівняно із такими ж, але підсиленими зовнішнім шаром з ФГМ, розбіжність знаходиться в межах 16,7%;

- вперше отримано дані, що найбільша розбіжність між величинами критичних значень, обчислених згідно із запропонованим та ортотропним підходами, має місце у випадку осьового тиску для анізотропних одно- та двошарових циліндричних оболонок, де вона складає 117% та 41% відповідно. Розходження між критичними навантаженнями розподіленого бокового тиску для таких же оболонок знаходяться в межах 13% та 60%. Порівняння критичних значень для цих же конструкцій під дією торцевих зсувних навантажень вказує на відмінність між підходами «АПР» та «ОПР» в межах 58% і 27%. Критичні навантаження зовнішнього розподіленого бокового тиску для нетонких циліндричних оболонок з композитного матеріалу боропластику є меншими порівняно з такими ж конструкціями із зовнішнім шаром ФГМ, а їх розбіжність сягає 57%.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Наукові статті категорії А,**в яких опубліковані основні наукові результати дисертації*

1. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Жукова Н. Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2023. Вип. 2. С. 152–155. ISSN 1812-5409. (**Scopus, Q4**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.*
2. **Podvorny A. V.**, Semenyuk N. P., Trach V. M. Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shell under Distributed External Pressure in the Spatial Statement. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, № 6. P. 623–638. (**Scopus, Q3**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку систем диференціальних рівнянь напружено-деформованого стану та стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.*
3. Semenyuk N. P., Trach V. M., **Podvorny A. V.** Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, № 2. P. 211–221. (**Scopus, Q3**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.*
4. Semenyuk N. P., Trach V. M., **Podvorny A. V.** Stability of cylindrical shells made of fibrous composites with one symmetry plane. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, №6. P. 682–688. (**Scopus, Q2**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних оболонкових конструкцій.*
5. Semenyuk M. P., Trach V. M., **Podvorny A. V.** Stress–strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59, № 1. P. 79–89. (**Scopus, Q3**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги від силової дії на циліндричну оболонкову конструкцію.*
6. Semenyuk M. P., Trach V. M., **Podvorny A. V.** Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures: науково–технічний збірник*. К.: КНУБА, 2015. №94. С. 126–138. (**Web of Science, Q4**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.*
7. Semenyuk M. P., Trach V. M., **Podvorny A. V.** Stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under thermal power load, protected by the functionally graded material. *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of*

*Structures: науково–технічний збірник*. К.: КНУБА, 2020. №105. С. 165–178. (**Web of Science, Q4**)

*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь рівноваги циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій при термосилової дії.*

8. Trach V. M., **Podvornyi A. V.** Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Onir матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures: науково–технічний збірник*. К.: КНУБА, 2023. №111. Р. 74–86. (**Web of Science, Q4**)

*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання та розв'язку систем диференціальних рівнянь рівноваги та стійкості циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій при крученні.*

### **Наукові статті категорії Б,**

#### **в яких опубліковані основні наукові результати дисертації**

9. **Подворний А. В.** До питання стійкості шаруватих оболонок несиметричної структури. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування: збірник наукових праць*. Рівне, 2008. Вип. 4 (44). С. 128–133. (**Фахове видання**)

10. **Подворний А. В.** До стійкості шаруватих оболонок обертання із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування: збірник наукових праць*. Рівне, 2010. Вип. 2 (50). С. 149–154. (**Фахове видання**)

11. **Подворний А. В.,** Трач В. М. Вплив шаруватості на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці. *Наукові нотатки: міжвузівський збірник наукових праць*. Луцьк, 2023. Вип. 75. С. 240–245. (**Фахове видання**)

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги.*

12. **Подворний А. В.,** Хоружий М. М. Стійкість шаруватих оболонок обертання із матеріалів з однією площиною пружної симетрії за використанням варіанту уточненої теорії. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування: збірник наукових праць*. Рівне, 2012. Вип. 3 (55). С. 159–164. (**Фахове видання**)

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до отримання результатів розв'язку задачі стійкості.*

13. Семенюк М. П., Трач В. М., **Подворний А. В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. Київ, 2017. Вип. 3 (39). С. 209–213. (**Фахове видання**)

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією зсувних торцевих зусиль.*

14. Семенюк Н. П., Трач В. М., **Подворний А. В.** Устойчивость слоистых оболочек из материалов с одной плоскостью симметрии в пространственной

постановке. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2014. Вип. 28. С. 405–421. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією розподіленого бічного навантаження.*

15. Трач В. М., **Подворний А. В.** Використання 3D методики до розрахунку на стійкість товстих анізотропних оболонок під дією кручення. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2018. Вип. 36. С. 295–301. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією кручення.*

16. Трач В. М., **Подворний А. В.** Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2022. Вип. 41. С. 197–212. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією осьового тиску.*

17. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Бондарський О. Г. Варіаційний принцип стосовно встановлення параметрів вільних коливань товстостінної пружної анізотропної циліндричної оболонки. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2021. Вип. 40. С. 197–212. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь руху.*

18. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Бондарський О. Г. Вільні коливання анізотропних оболонок обертання нульової гаусової кривини із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Наукові нотатки: міжвузівський збірник наукових праць*. Луцьк: ЛДТУ, 2007. Вип. 20, №2. С. 222–226. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання величин частот вільних коливань.*

19. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Мерзлюк В. В. Напружено-деформований стан товстих анізотропних композитних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, під термосиловою дією. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2021. Вип. 39. С. 197–212. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги від термосилової дії на циліндричну оболонкову конструкцію.*

20. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Хоружий М. М. Потенціальна енергія деформації пружних анізотропних нетонких оболонок. *Наукові нотатки: міжвузівський збірник наукових праць*. Луцьк: ЛДТУ, 2011. Вип. 33. С. 272–276. **(Фахове видання)**

*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь рівноваги для анізотропних нетонких оболонок.*



21. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Хоружий М. М. Про один варіант рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання із волокнистих композитів. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2010. Вип. 20. С.112–119. (**Фахове видання**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для анізотропних оболонок обертання.*
22. Трач В. М., Семенюк М. П., **Подворний А. В.** Використання 3D методики до розрахунку напруженого стану шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць*. Рівне, 2019. Вип. 37. С. 296–306. (**Фахове видання**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для анізотропних оболонок під дією бокового тиску.*
23. Трач В. М., Семенюк М. П., **Подворний А. В.** До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій постановці. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2018. Вип. 72. С. 68–76. (**Фахове видання**)  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.*

***Наукові публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації***

24. Трач В. М., **Подворний А. В.** Стійкість оболонок обертання виготовлених з матеріалу несиметричної структури. *International Conference, Dynamical system modeling and stability investigation: thesis of conference reports*. Kiev, 2005. С. 339.  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для циліндричних анізотропних оболонок.*
25. Трач В. М., **Подворний А. В.** Вільні коливання циліндричних оболонок із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Збірник наукових праць VII міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2007»*. Київ, 2007. С. 14.62–14.65.  
*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання величин частот вільних коливань для циліндричних анізотропних оболонок.*
26. Трач В. М., **Подворний А. В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок при крученні в тривимірній постановці. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. С. 191–193.  
*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних оболонок під дією кручення.*
27. Trach V., Semeniuk M., **Podworny A.**, Zhukova N. On the Method of Calculation of Buckling and Postbuckling Behavior of Laminated Shells with Small Arbitrary Imperfections. *3<sup>rd</sup> int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS*. Braunschweig, Germany. 2015. P. 23–28.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості шаруватих оболонок.*

28. Семенюк М. П., Трач В. М., **Подворний А. В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. *IV Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»*. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2017. С. 93.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувних торцевих зусиль.*

29. Трач В. М., Семенюк М. П., **Подворний А. В.** До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій постановці. *V Міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки»*. Одеса, 2018. С. 184–186.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.*

30. Семенюк М. П., Трач В. М., **Подворний А. В.** Вільні коливання циліндричних анізотропних оболонок в просторовій постановці. *Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доп. VIII Міжнар. наук.-практ. конф.* Одеса: ОДАБА, 2021. С. 350–353.

*Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь руху циліндричних анізотропних оболонок.*

31. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Мерзлюк В. В. 3D-модель напруженого стану товстостінної анізотропної циліндричної оболонки при крученні. *Міжнародна конференція «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво»*. Київ: НТУ, 2022. С. 171–176.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги анізотропних циліндричних оболонок при крученні.*

32. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Бондарський О. Г. Деформування нетонких анізотропних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, за термосилової дії. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023»*. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. Львів, 2023. С. 97–98.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги анізотропних циліндричних оболонок від термосилової дії.*

33. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Жукова Н. Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. *VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»*. До 160-річчя з дня заснування кафедри механіки Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 57.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.*

34. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Жукова Н. Б. Тривимірна стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском. *Матеріали XXIII Міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта»*. 2023. С. 33–36.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при осьовому тиску.*

***Наукові публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації***

35. Семенюк М. П., Трач В. М., **Подворний А. В.** До розрахунку на стійкість пружних анізотропних оболонок обертання в тривимірній постановці при осьовому стисканні. *Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences*. 2017. Vol. 14, Issue 132. P. 89–92. **(Index Copernicus)**

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості при осьовому тиску.*

36. Трач В. М., **Подворний А. В.**, Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.

*Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.*

37. **Podvornyi A. V.** The stability of anisotropic cylindrical shells under torsion in spatial position. *Acta Sci. Pol. Architectura*. 2020. Vol. 19, № 1. P.103–109. **(Index Copernicus)**

38. Trach V., Semenuk M., **Podvornyi A.** Stability of anisotropic cylindrical shells in three-dimensional state under axial compression. *Acta Sci. Pol. Architectura*. 2016. Vol. 15, № 4. P.169–183. **(Index Copernicus)**

*Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій під осьовим тиском.*

## АНОТАЦІЯ

**Подворний А.В. Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці. – На правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – Будівельна механіка. Київський національний університет будівництва і архітектури; Національний університет водного господарства та природокористування, Київ, 2024.

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню, в рамках просторових співвідношень лінійної теорії пружності, важливої науково-технічної проблеми, що пов'язана з дослідженням параметрів напружено-деформованого стану (НДС),

вільних коливань товстостінних, а також стійкості нетонких шаруватих конструктивно анізотропних циліндричних оболонок. Конструктивна анізотропія зумовлена утворенням матеріалу з однією площиною пружної симетрії, що паралельна серединній поверхні, внаслідок укладання, ортотропного, у власних осях, волокнистого композита, під деяким кутом до твірної циліндричної оболонки.

Обґрунтована необхідність використання пропонованого підходу до розрахунків анізотропних шаруватих циліндричних оболонкових конструкцій у порівнянні із ортотропною моделлю матеріалу. В якості вихідного матеріалу для виготовлення оболонок використано волокнисті, а також функціонально-градієнтні композити. Виконано дослідження параметрів, що описують НДС від силового, температурного та термосилового впливів, вільних коливань, стійкості анізотропних циліндричних оболонок залежно від виду граничних умов на торцях, геометрії конструкцій за товщиною, при урахуванні кутів укладання волокнистих композитів.

**Ключові слова:** теорія пружності, просторові співвідношення, напружено-деформований стан, частота вільних коливань, стійкість, циліндрична оболонка, анізотропія, функціонально-градієнтний матеріал.

## SUMMARY

**Podvornyi A.V. Deformation, dynamics and stability of structurally anisotropic cylindrical shells in a spatial setting. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.**

Thesis for a Doctor's Degree in Technical Sciences. Speciality 05.23.17 – Construction mechanics. Kyiv National University of Construction and Architecture; National University of Water and Environmental Engineering, Kyiv, 2024.

The dissertation work is devoted to solving, within the framework of the spatial relationships of the linear theory of elasticity, an important scientific and technical problem related to the study of the parameters of the stress-strain state (SSS), free vibrations of thick-walled, as well as the stability of non-thin layered structurally anisotropic cylindrical shells. Structural anisotropy is due to the formation of a material with one plane of elastic symmetry parallel to the middle surface due to the laying of an orthotropic, in its own axes, fibrous composite at a certain angle to the generatrix of the cylindrical shell.

For the first time, an approach has been developed to construct a system of six differential equations of motion of the spatial linear theory of elasticity for thick-walled cylindrical anisotropic shells. The approach is based on a modification of the Hu – Washizu variational principle, which makes it possible to write the boundary conditions and Hooke's law relation corresponding to the equations in a three-dimensional formulation. When using the derived system and the corresponding boundary conditions, the values of stresses and displacements from force and temperature influences can be established under various types of boundary conditions at the ends of a layered thick-walled composite anisotropic cylindrical shell also made of functionally graded materials.

An approach based on the use of the Bubnov – Galerkin analytical method procedure is presented to reduce the dimension of a three-dimensional system of differential equilibrium equations obtained from a spatial system of equations of motion by neglecting

terms that take into account the temperature effect and the frequency of free oscillations. When a distributed lateral pressure is applied to a shell, the use of the Bubnov – Galerkin method consists in expanding the stress and displacement functions into double trigonometric Fourier series in the circular direction and along the generatrix of the cylindrical shell so that they satisfy the conditions at its ends. The resulting normal Cauchy one-dimensional system of differential equations makes it possible to determine the parameters of the stress-strain state of thick-walled anisotropic layered cylindrical shell structures from the specified force action. When a shell is exposed to axial pressure or a shear load (torsion) distributed along the ends, an approach to reducing the dimension of a three-dimensional system of equilibrium equations is proposed, which includes the assumption that the stress-strain state parameters of the cylinder are constant in the circular direction and the use of the method of straight lines along the generatrix of thick-walled anisotropic layered cylindrical shells.

In the case of temperature or thermoforce influences, an approach is presented to reducing the dimension of a three-dimensional system of differential equilibrium equations obtained from a spatial system of equations of motion, based on the use of the Bubnov – Galerkin analytical method. The system of differential equations of normal Cauchy form obtained in this way makes it possible to determine the parameters of the stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under temperature or thermal force influence.

Based on the spatial system of equations of motion, derived using the modified Hu – Washizu variational principle, using the analytical method of Bubnov – Galerkin, an approach to obtaining an infinite one-dimensional system of differential equations is presented, which makes it possible to determine the frequencies of free vibrations of thick-walled layered anisotropic cylindrical shell structures.

Based on the modified Hu – Washizu variational principle, an approach to deriving a system of six homogeneous differential stability equations of the spatial theory of elasticity for non-thin anisotropic cylindrical shells has been developed for the first time. Using the Bubnov – Galerkin method, an approach has been developed for the first time to reduce a three-dimensional system of differential stability equations to a one-dimensional normal Cauchy form.

To solve one-dimensional solving systems of differential equations about the stress-strain state from force or temperature influences, free vibrations of thick-walled and stability of non-thin anisotropic cylindrical shells, a numerical method of discrete orthogonalization was used, respectively adapted for their implementation. On this basis, software systems have been created for personal computers that allow solving new problems of establishing the parameters of stress-strain state from force, temperature or thermal effects, free vibrations of thick-walled and stability of non-thin anisotropic composite cylindrical shells.

The necessity of using the proposed approach to the calculations of anisotropic layered cylindrical shell structures in comparison with the orthotropic material model is substantiated.

**Key words:** theory of elasticity, spatial relationships, stress-strain state, frequency of free vibrations, stability, cylindrical shell, anisotropy, functionally graded material.

Підписано до друку 06.03.2024 р. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.  
Ум.-друк. арк. 2,5. Тираж 100 прим.  
Зам. № 5631.

---

---

*Видавець і виготовлювач  
Національний університет  
водного господарства та природокористування,  
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного  
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів  
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*