

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Подворний Андрій Володимирович

Гриф
Прим. № _____

УДК 539.3; 624.074.04

ДИСЕРТАЦІЯ

Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних
циліндричних оболонок в просторовій постановці

05.23.17 – Будівельна механіка

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А.В. Подворний

Науковий консультант Трач Володимир Мирославович, д.т.н., професор

Київ – 2024

АНОТАЦІЯ

Подворний А. В. Деформування, динаміка, стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – Будівельна механіка. Київський національний університет будівництва і архітектури; Національний університет водного господарства та природокористування, Київ, 2024.

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню, в рамках просторових співвідношень лінійної теорії пружності, важливої науково-технічної проблеми, що пов'язана з дослідженням параметрів напружено-деформованого стану (НДС), вільних коливань товстостінних, а також стійкості нетонких шаруватих конструктивно анізотропних циліндричних оболонок. Конструктивна анізотропія зумовлена утворенням матеріалу з однією площиною пружної симетрії, що паралельна серединній поверхні, внаслідок укладання, ортотропного, у власних осях, волокнистого композита, під деяким кутом до твірної циліндричної оболонки.

Зменшення матеріаломісткості циліндричних оболонкових конструктивних елементів із забезпеченням умов їх надійної експлуатації досить часто пов'язано із використанням композитних матеріалів. Це питання стає особливо важливим у зв'язку із можливим застосуванням конструктивно анізотропних композитних оболонкових систем в авіаційній, ракетній, космічній галузях, а також в машинобудуванні та будівництві. Їх розрахунки щодо встановлення характеристик деформування, динаміки та стійкості, які здійснюються на основі відомих двовимірних моделей, не завжди задовольняють вимогам стосовно їх точності. Тому логічним і важливим є побудова розрахункових моделей, що дозволяють найбільш повно враховувати параметри, які описують напружено-деформований стан, коливання та стійкість цих оболонок.

Розв'язання проблем розрахунків циліндричних конструктивно анізотропних композитних оболонок може бути пов'язане з використанням просторових співвідношень лінійної теорії пружності. В них же слід враховувати, що при виготовленні таких оболонкових систем, наприклад, шляхом укладання на оправку попередньо ортотропного волокнистого матеріалу в конструкції він отримує властивості більш низького порядку симетрії пружних характеристик. Тобто на макрорівні утворюється матеріал, що має одну площину пружної симетрії, яка є паралельною серединній поверхні оболонки. Відповідно до узагальненого закону Гука деформації розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення конструкцій стають взаємопов'язаними. Зазначене суттєво ускладнює розрахунки оболонкових конструкцій порівняно з тими, що виготовлені, наприклад, із ортотропного матеріалу.

Відомо, що традиційні композитні матеріали не завжди здатні використовуватись в умовах високих температур. Тому для їх захисту може використовуватися новий клас композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ). Знано, що типовий ФГМ є неоднорідним за товщиною композитом і виготовленим з різних фаз матеріальних складових, як правило, кераміки й металів або наноматеріалів. Завдяки змінним за товщиною властивостям такий матеріал здатний протистояти високотемпературному впливу та забезпечувати необхідні пружні характеристики основної несучої конструкції. Дослідження напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій, виготовлених з традиційних композитів, захищених з боку високотемпературних полів шарами функціонально-градієнтних матеріалів, також раціонально проводити в рамках співвідношень тривимірної теорії пружності.

Підсумовуючи, можливо зауважити, що проблеми тривимірного розрахунку напружено-деформованого стану, коливань товстостінних і стійкості нетонких конструктивно анізотропних циліндричних оболонок є недостатньо вивченими. З погляду на це, поставлені та розв'язані в дисертаційній роботі проблеми є

важливими для розвитку розрахунків композитних конструкцій, а також актуальними й такими, що мають як наукові, так і прикладні значення.

Практична цінність результатів. Результати роботи суттєво розширюють можливості використання підходів будівельної механіки щодо впровадження розробленого розрахункового підходу для розв'язку просторових задач теорії анізотропних оболонкових конструкцій. Практичне значення представленої роботи в розробці підходів і відповідних алгоритмів на основі тривимірних співвідношень лінійної теорії пружності, що представлені в обчислювальних програмних комплексах для ПК і використовуються для чисельних розрахунків задач деформування, динаміки товстостінних і стійкості нетонких шаруватих циліндричних оболонок із матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Реалізація проблеми розрахунків параметрів деформування та стійкості реалізується при дії на циліндричні оболонки різноманітних видів статичного навантаження та температурного впливу. При цьому оцінено вплив на напружено-деформований стан, стійкість та частоти вільних коливань анізотропії композитного матеріалу, різних умов закріплення торців, шаруватості та геометрії циліндричних оболонок. Підходи та алгоритми, що реалізовані в програмних обчислювальних комплексах для ПК, впроваджено в ДП «Антонов» м. Київ, в Київському національному університеті будівництва і архітектури, в Національному університеті водного господарства та природокористування (м. Рівне) при виконанні держбюджетних тем згідно із замовленням МОН України. Дані з досліджень цієї роботи були використані при підготовці монографії, навчального посібника та підручника «Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності» для здобувачів вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», а також під час проведення науково-практичних конференцій викладацького складу, аспірантів і студентів. Також результати цієї роботи були використані при виконанні магістерських робіт студентами, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Мости і транспортні тунелі». Здобуті в дисертаційній роботі результати можливо використати під час проектування анізотропних

циліндричних оболонкових конструкцій в науково-дослідних, виробничих закладах і установах.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у створенні розрахункової моделі та проведенні дослідження напружено-деформованого стану (від силового, температурного й термосилового впливу) та параметрів вільних коливань товстостінних і стійкості нетонких анізотропних циліндричних композитних шаруватих оболонок, матеріал яких має одну площину пружної симетрії, паралельну серединній поверхні. При цьому:

Уперше:

- модифіковано варіаційний принцип Ху – Васідзу стосовно виведення систем тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла описують деформування та динаміку товстостінних і стійкість нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонок;

- приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь до одновимірних здійснено при використанні процедури методу Бубнова – Гальоркіна, за яким всі функції напружень й переміщень розкладаються у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямом і вздовж твірної циліндричної оболонки;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених програмних комплексів для персональних комп'ютерів (ПК), розв'язано нові задачі щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонок від зовнішньої силової дії;

- реалізовано використання розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп'ютерних програмних комплексів для ПК щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, виготовлених з композитного матеріалу, який захищений з боку високого температурного поля шаром функціонально-градієнтного матеріалу;

- розроблений алгоритм і створений при використанні числового методу дискретної ортогоналізації комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому в єдиному процесі поєднані встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких шаруватих анізотропних циліндричних оболонок;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп'ютерних програмних комплексів для ПК, отримані нові дані щодо впливу анізотропії, лінійного деформування на втрату стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів;

- за допомогою числових досліджень отримано нові дані про вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу відносно координатних осей конструкції, при різних граничних умовах, геометрії та структурній будові оболонки, на її стійкість при дії осьового тиску, зовнішнього бокового тиску, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого на торцях оболонки (кручення);

- встановлено, що при стиску шаруватих оболонок з косоперехресним армуванням розрахункові критичні навантаження для нетонких анізотропних циліндричних оболонок можуть бути суттєво завищеними, якщо користуватись традиційною для оболонок із композитів моделлю ортотропного тіла;

- розроблені нові методики чисельного розрахунку стосовно деформування, стійкості дозволяють проводити структурну оптимізацію параметрів анізотропних циліндричних оболонок і в той же час отримувати дані, що не викликають ніяких сумнівів стосовно їх достовірності.

Удосконалено:

- при використанні складених алгоритмів програмні комплекси для персональних комп'ютерів щодо розв'язання задач зі встановлення параметрів вільних коливань товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів.

Набули подальшого розвитку:

підходи щодо дослідження в просторовій постановці впливу анізотропії, структурної будови за товщиною, умов закріплення на параметри вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів.

Ключові слова: теорія пружності, просторові співвідношення, напружено-деформований стан, частота вільних коливань, стійкість, циліндрична оболонка, анізотропія, функціонально-градієнтний матеріал.

ABSTRACT

Podvornyi A.V. Deformation, dynamics and stability of structurally anisotropic cylindrical shells in a spatial setting. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for a Doctor's Degree in Technical Sciences. Speciality 05.23.17 – Construction mechanics. Kyiv National University of Construction and Architecture; National University of Water and Environmental Engineering, Kyiv, 2024.

The dissertation work is devoted to solving, within the framework of the spatial relationships of the linear theory of elasticity, an important scientific and technical problem related to the study of the parameters of the stress-strain state, free vibrations of thick-walled, as well as the stability of non-thin layered structurally anisotropic cylindrical shells. Structural anisotropy is due to the formation of a material with one plane of elastic symmetry parallel to the middle surface, due to the laying of an orthotropic, in its own axes, fibrous composite at a certain angle to the generatrix of the cylindrical shell.

Reducing the material consumption of cylindrical shell structural elements while ensuring conditions for their reliable operation is quite often associated with the use of composite materials. This issue becomes especially important in connection with the possible use of structurally anisotropic composite shell systems in the aviation, rocket, and space industries, as well as in mechanical engineering and construction. Their calculations to establish the characteristics of deformation, dynamics and stability, which are carried out on the basis of well-known two-dimensional models, do not always meet the requirements for their accuracy. Therefore, it is logical and important to construct calculation models that allow the most complete consideration of the parameters describing the stress-strain state, vibrations and stability of these shells.

Solving the problems of calculating cylindrical structurally anisotropic composite shells can be associated with the use of spatial relations of the linear theory of elasticity. They should also take into account that in the manufacture of such shell systems, for example, by laying pre-fibrous orthotropic material on a mandrel in the

structure, it obtains properties of a lower order of symmetry of elastic characteristics. That is, at the macro level, a material is formed that has one plane of elastic symmetry parallel to the middle surface of the shell. According to the generalized Hooke's law, tensile (pressure), shear, bending and torsion deformations of structures become interrelated. This significantly complicates the calculations of shell structures compared to those made, for example, from an orthotropic material.

It is known that traditional composite materials cannot always be used at high temperatures. Therefore, a new class of composite materials known as functionally graded materials (FGMs) can be used to protect them. It is known that a typical FGM is a composite of heterogeneous thickness and is made of various phases of material components, usually ceramics and metals or nanomaterials. Thanks to its properties that vary over thickness, such a material is able to withstand high-temperature effects and provide the necessary elastic characteristics of the main supporting structure. The study of the stress-strain state of shell structures made of traditional composites, protected from high-temperature fields by layers of functionally graded materials, is also rationally carried out within the framework of the relationship of the three-dimensional theory of elasticity.

To summarize, it can be noted that the problems of three-dimensional calculation of the stress-strain state, vibrations of thick-walled and stability of non-thin structurally anisotropic cylindrical shells have not been sufficiently studied. From this point of view, the problems posed and solved in the dissertation work are important for the development of calculations of composite structures, and are also relevant and have both scientific and applied significance.

Practical value of the results. The results of the work significantly expand the possibility of using structural mechanics approaches when implementing the developed computational approach for solving spatial problems in the theory of anisotropic shell structures. The practical significance of the presented work is in the development of approaches and corresponding algorithms based on three-dimensional relations of the linear theory of elasticity, presented in computer software systems for PCs and used for numerical calculations of problems of

deformation, dynamics and stability of layered cylindrical shells made of materials with one plane of elastic symmetry from static load and temperature influence. At the same time, the influence on the stress-strain state, stability and frequency of free vibrations of the anisotropy of the composite material, various conditions for fixing the ends, layering and geometry of cylindrical shells was assessed. Approaches and algorithms implemented in software computing systems for PCs have been implemented in the State Enterprise "Antonov" in Kiev, at the Kyiv National University of Construction and Architecture, at the National University of Water and Environmental Engineering (Rivne) when implementing state budget issues in accordance with orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine. Data from the research of this work were used in the preparation of the monograph, textbook and textbook «Strength of materials (special course), theory of elasticity and plasticity» for students of the specialty “Construction and Civil Engineering”, as well as during scientific and practical conferences of teaching staff, graduate students and undergraduates. Also, the results of this work were used to carry out master’s theses by students studying in the educational and professional program “Bridges and Transport Tunnels”. The results obtained in the dissertation work can be used in the design of anisotropic cylindrical shell structures in research and production institutions.

The scientific novelty of the results obtained lies in the creation of a calculation model and the study of the stress-strain state (from force, temperature and thermal force) and the parameters of free vibrations of thick-walled and stability of non-thin anisotropic cylindrical composite layered shells, the material of which has one plane parallel. Wherein:

For the first time:

- the Hu-Washizu variational principle has been modified regarding the derivation of three-dimensional partial differential equations, which, within the framework of the linear theory of elasticity of an anisotropic body, describe the deformation and dynamics of thick-walled and stability of non-thin composite anisotropic cylindrical shells;

- reduction of three-dimensional systems of differential equations to one-dimensional ones was carried out using the procedure of the Bubnov-Galerkin method, according to which all stress and displacement functions are expanded into double trigonometric series in the circular direction and along the generatrix of the cylindrical shell;

- using developed algorithms and created software systems for personal computers (PCs), new problems were solved to determine the parameters of the stress-strain state of layered thick-walled anisotropic composite cylindrical shells from external force influence;

- implemented the use of developed algorithms and computer software systems created on their basis for PCs to determine the parameters of the stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells made of composite material, protected from the side of a high temperature field by a layer of functionally graded material;

- an algorithm has been developed and, using the numerical method of discrete orthogonalization, a computer software complex for PC has been created, in which the determination of the parameters of the subcritical stress-strain state and the solution of new problems of stability of non-thin layered anisotropic cylindrical shells are combined in a single process;

- using the developed algorithms and computer software systems created on their basis for PCs, new data were obtained on the influence of anisotropy and linear deformation on the loss of stability of non-thin cylindrical anisotropic shells made of fibrous and functionally graded materials;

- using numerical studies, new data were obtained on the influence of the angle of rotation of the main directions of elasticity of the material relative to the coordinate axes of the structure, under various boundary conditions, geometry and structural structure of the shell, on its stability under the influence of axial pressure, external lateral pressure, tangential force uniformly distributed at the ends shell (torsion);

- it has been established that during compression of layered shells with obliquely cross reinforcement, the calculated critical loads for non-thin anisotropic cylindrical

shells can be significantly overestimated if we use the orthotropic body model traditional for shells made of composites;

- developed new methods for numerical calculation of deformation and stability make it possible to carry out structural optimization of the parameters of anisotropic cylindrical shells and at the same time obtain data that does not raise any doubts about their reliability.

Improved:

- using developed algorithms, software packages for personal computers were improved to solve problems of determining the parameters of free vibrations of thick-walled layered anisotropic cylindrical shells made of fibrous and functionally graded materials.

Further development:

- approaches to studying in a spatial formulation the influence of anisotropy, structural structure in thickness, and fastening conditions on the parameters of free vibrations of thick-walled anisotropic cylindrical shells made of functionally graded materials.

Key words: theory of elasticity, spatial relationships, stress-strain state, frequency of free vibrations, stability, cylindrical shell, anisotropy, functionally graded material.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові публікації, у яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Жукова Н.Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2023. Вип. 2. С. 152-155. ISSN 1812-5409 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2> (**Scopus, Q4**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.

2. **Podvornyi A.V.**, Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shell under Distributed External Pressure in the Spatial Statement. *International Applied Mechanics.* 2017. Vol. 53, № 6. P. 623-638. ISSN 1063-7095 <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0845-7> (**Scopus, Q3**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку систем диференціальних рівнянь напружено-деформованого стану та стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.

3. Semenyuk N.P., Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads. *International Applied Mechanics.* 2019. Vol. 55, № 2. P. 211-221. ISSN 1063-7095 <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00951-5> (**Scopus, Q3**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.

4. Semenyuk N.P., Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Stability of cylindrical shells made of fibrous composites with one symmetry plane. *International Applied Mechanics.* 2005. Vol. 41, №6. P. 682-688. ISSN 1063-7095 <https://doi.org/10.1007/s10778-005-0136-y> (**Scopus, Q2**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних оболонкових конструкцій.

5. Semenyuk M.P., Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Stress–strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59, № 1. P. 79-89. ISSN 1063-7095 <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01201-5> (**Scopus, Q3**)

Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги від силової дії на циліндричну оболонкову конструкцію.

6. Semenyuk M.P., Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. *Збірник наукових праць Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures*. КНУБА. 2015. №94. С. 126-138. ISSN 2410-2547 (**Web of Science, Q4**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.

7. Semenyuk M.P., Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under thermal power load, protected by the functionally graded material. *Збірник наукових праць Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures*. КНУБА. 2020. №105. С. 165-178. ISSN 2410-2547 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2020.105> (**Web of Science, Q4**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь рівноваги циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій при термосиловій дії.

8. Trach V.M., **Podvornyi A.V.** Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Збірник наукових праць Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures*.

КНУБА. 2023. №111. Р. 74-86. ISSN 2410-2547 <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.111> (**Web of Science, Q4**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання та розв'язку систем диференціальних рівнянь рівноваги та стійкості циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій при крученні.

9. **Подворний А.В.** До питання стійкості шаруватих оболонок несиметричної структури. *Збірник наукових праць Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2008. Вип. 4 (44). С. 128-133. (**Фахове видання**)

10. **Подворний А.В.** До стійкості шаруватих оболонок обертання із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Збірник наукових праць Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2010. Вип. 2 (50). С. 149-154. (**Фахове видання**)

11. **Подворний А.В.,** Трач В.М. Вплив шаруватості на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці. *Міжвузівський збірник Наукові нотатки*. Луцьк. 2023. Вип. 75. С. 240-245. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги.

12. **Подворний А.В.,** Хоружий М.М. Стійкість шаруватих оболонок обертання із матеріалів з однією площиною пружної симетрії за використанням варіанту уточненої теорії. *Збірник наукових праць Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2012. Вип. 3 (55). С. 159-164. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до отримання результатів розв'язку задачі стійкості.

13. Семенюк М.П., Трач В.М., **Подворний А.В.** До розрахунку на стійкість пружних анізотропних оболонок обертання в тривимірній постановці при осьовому стисканні. *Science and Education a New Dimension. Natural and*

Technical Sciences. 2017. Vol. 14, Issue 132. P. 89-92. ISSN 2308-5258; eISSN 2308-1996 (**Index Copernicus**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості при осьовому стиску.

14. Семенюк М.П., Трач В.М., **Подворний А.В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. Київ. 2017. Вип. 3 (39). С. 209-213. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією зсувних торцевих зусиль.

15. Семенюк Н.П., Трач В.М., **Подворний А.В.** Устойчивость слоистых оболочек из материалов с одной плоскостью симметрии в пространственной постановке. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2014. Вип. 28. С. 405-421. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією розподіленого бічного навантаження.

16. Трач В.М., **Подворний А.В.** Використання 3D методики до розрахунку на стійкість товстих анізотропних оболонок під дією кручення. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2018. Вип. 36. С. 295-301. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією кручення.

17. Трач В.М., **Подворний А.В.** Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2022. Вип. 41. С. 197-212. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості під дією осьового тиску.

18. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Бондарський О.Г. Варіаційний принцип стосовно встановлення параметрів вільних коливань товстостінної пружної анізотропної циліндричної оболонки. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2021. Вип. 40. С. 197-212. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь руху.

19. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Бондарський О.Г. Вільні коливання анізотропних оболонок обертання нульової гаусової кривини із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Міжвузівський збірник Наукові нотатки*. Луцьк: ЛДТУ. 2007. Вип. 20, №2. С. 222-226. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання величин частот вільних коливань.

20. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Мерзлюк В.В. Напружено-деформований стан товстих анізотропних композитних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, під термосиловою дією. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Збірник наукових праць. Випуск 39. – НУВГП.- Рівне – 2021.- С.197-212. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги від термосилової дії на циліндричну оболонкову конструкцію.

21. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Хоружий М.М. Потенціальна енергія деформації пружних анізотропних нетонких оболонок. *Міжвузівський збірник Наукові нотатки*. Луцьк: ЛДТУ. 2011. Вип. 33. С. 272-276. (**Фахове видання**)

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь рівноваги для анізотропних нетонких оболонок.

22. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Хоружий М.М. Про один варіант рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання із волокнистих композитів. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2010. Вип. 20. С.112-119. **(Фахове видання)**

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для анізотропних оболонок обертання.

23. Трач В.М., Семенюк М.П., **Подворний А.В.** Використання 3D методики до розрахунку напруженого стану шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2019. Вип. 37. С. 296-306. **(Фахове видання)**

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для анізотропних оболонок під дією бокового тиску.

24. Трач В.М., Семенюк М.П., **Подворний А.В.** До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій постановці. *Збірник наукових праць Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса. 2018. Вип. 72. С. 68-76. **(Фахове видання)**

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску.

25. **Podvorny A.V.** The stability of anisotropic cylindrical shells under torsion in spatial position. *Acta Sci. Pol. Architectura*. 2020. Vol. 19, № 1. P.103-109. ISSN 1644-0633; eISSN 2544-1760 **(Index Copernicus)**

26. Trach V., Semenuk M., **Podvorny A.** Stability of anisotropic cylindrical shells in three-dimensional state under axial compression. *Acta Sci. Pol. Architectura*. 2016. Vol. 15, № 4. P.169-183. ISSN 1644-0633; eISSN 2544-1760 **(Index Copernicus)**

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних оболонкових конструкцій під осьовим тиском.

Наукові публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

27. Трач В.М., **Подворний А.В.** Стійкість оболонок обертання виготовлених з матеріалу несиметричної структури. *International Conference, Dynamical system modeling and stability investigation: thesis of conference reports*. Kiev, 2005. С. 339.

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості для циліндричних анізотропних оболонок.

28. Трач В.М., **Подворний А.В.** Вільні коливання циліндричних оболонок із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. *Збірник наукових праць VII міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2007»*. Київ, 2007. С. 14.62-14.65.

Особистий внесок здобувача полягає у розробці підходу до отримання величин частот вільних коливань для циліндричних анізотропних оболонок.

29. Трач В.М., **Подворний А.В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок при крученні в тривимірній постановці. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 191-193.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних оболонок під дією кручення.

30. Trach V., Semeniuk M., **Podworny A.**, Zhukova N. On the Method of Calculation of Buckling and Postbuckling Behavior of Laminated Shells with Small Arbitrary Imperfections. *3rd int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS*. Braunschweig, Germany. 2015. P. 23-28.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку системи диференціальних рівнянь стійкості шаруватих оболонок.

31. Семенюк М.П., Трач В.М., **Подворний А.В.** Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. *IV Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»*. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2017. С. 93.
Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувних торцевих зусиль.
32. Трач В.М., Семенюк М.П., **Подворний А.В.** До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій постановці. *V Міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки»*. Одеса. 2018. С. 184-186.
Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.
33. Семенюк М.П., Трач В.М., **Подворний А.В.** Вільні коливання циліндричних анізотропних оболонок в просторовій постановці. *Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доп. VIII Міжнар. наук.-практ. конф. 2021*. Одеса: ОДАБА. С. 350-353.
Особистий внесок здобувача полягає у виведенні тривимірної системи диференціальних рівнянь руху циліндричних анізотропних оболонок.
34. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Мерзлюк В.В. 3D-модель напруженого стану товстостінної анізотропної циліндричної оболонки при крученні. *Міжнародна конференція «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво»*. Київ. НТУ. 2022. С. 171-176.
Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги анізотропних циліндричних оболонок при крученні.

35. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Бондарський О.Г. Деформування нетонких анізотропних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, за термосилової дії. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023»*. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2023. С. 97-98.
Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги анізотропних циліндричних оболонок від термосилової дії.

36. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Жукова Н.Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. *VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки»*. До 160-річчя з дня заснування кафедри механіки Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 57.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.

37. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Жукова Н.Б. Тривимірна стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском. *XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта»* в рамках ФОРУМУ ІНЖЕНЕРІВ МЕХАНІКІВ, присвяченого 125-річчю заснування КПІ ім. Ігоря Сікорського навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту. 2023. С. 33-36.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при осьовому тиску.

Наукові публікації, які додатково відображають наукові результати дисертації

38. Трач В.М., **Подворний А.В.**, Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці підходу до розв'язку тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому тиску.

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 38 наукових праць, серед яких: чотири статті у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “А”, з них – три у періодичному виданні, що індексується в наукометричній базі Web of Science, одна в Scopus; п'ятнадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “Б”, сім статей у закордонних фахових журналах, з них – чотири у періодичних виданнях, що індексуються в наукометричних базах Scopus, віднесених до другого і третього квантилів (Q2 та Q3); одинадцять публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських та міжнародних наукових конференцій та одна монографія видана у співавторстві.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	30
ОГЛЯД РОБІТ З СТАТИКИ, ДИНАМІКИ ТОВСТОСТІННИХ І СТІЙКОСТІ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ. ОБГРУНТУВАННЯ ТЕМИ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....	48
РОЗДІЛ 1. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ХУ – ВАСІДЗУ В ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	63
1.1. Варіаційний принцип Ху – Васідзу при розв’язку задач теорії пружності оболонкових конструкцій.....	64
1.2. Модифікація змішаного варіаційного принципу Ху – Васідзу при виведенні системи рівнянь руху анізотропної циліндричної оболонки.....	66
1.3. Висновки до розділу 1.....	75
РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ ПРУЖНИХ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ ВІД СИЛОВОЇ ДІЇ.....	76
2.1. Розв’язуюча система рівнянь, що описує напружено-деформований стан товстостінних пружних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок від силової дії.....	76
2.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови розв’язку задачі про деформування товстостінних пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під дією розподіленого бокового тиску.....	79
2.3. Застосування методу прямих для побудови чисельного розв’язку задачі про вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску, крутного моменту в просторовій постановці.....	85
2.3.1. Вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.....	85
2.3.2. Вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового	

зсувного зусилля (крутного моменту).....	89
2.4. Застосування чисельного методу дискретної ортогоналізації до побудови методики розв'язку рівнянь про напружено-деформований стан пружних анізотропних циліндричних оболонок.....	91
2.5. Достовірність розв'язку задач напружено-деформованого стану пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	95
2.5.1. Розподілений боковий тиск.....	95
2.5.2. Осьовий тиск.....	101
2.5.3. Крутний момент.....	104
2.6. Дослідження напружено-деформованого стану товстостінних пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	106
2.6.1. Товстостінні циліндричні анізотропні оболонки під дією зовнішнього розподіленого бокового навантаження.....	106
2.6.1.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки.....	107
2.6.1.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки.....	123
2.6.1.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском.....	126
2.6.1.4. Напружено-деформований стан циліндричних анізотропних оболонок під розподіленим боковим тиском для різних умов закріплення торців оболонок.....	131
2.6.2. Товстостінні циліндричні анізотропні оболонки під дією осьового тиску.....	135
2.6.2.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки.....	136
2.6.2.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки.....	142
2.6.2.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском.....	144
2.6.3. Циліндричні товстостінні анізотропні оболонки під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту), що діє на їх торці.....	148

2.6.3.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки.....	149
2.6.3.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки.....	155
2.6.3.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту).....	158
2.7. Висновки до розділу 2.....	162

РОЗДІЛ 3. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЗАХИЩЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМ МАТЕРІАЛОМ, ПІД ТЕРМОСИЛОВОЮ ДІЄЮ.....164

3.1. Основні відомості про функціонально-градієнтні матеріали.....	164
3.1.1. Кераміко-металеві функціонально-градієнтні матеріали.....	164
3.1.2. Функціонально-градієнтні матеріали з наноармуванням.....	168
3.2. Постановка задачі про термонапружений стан анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	170
3.3. Побудова чисельно-аналітичного підходу до розв'язку задачі визначення термонапруженого стану пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	174
3.4. Достовірність розв'язку задач про термонапружений стан пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	177
3.5. Дослідження термонапруженого стану анізотропних циліндричних оболонок захищених шаром функціонально-градієнтного матеріалу	179
3.5.1. Дослідження температурного та термосилового напруженого стану анізотропних циліндричних оболонок із боропластику, захищених шаром кераміко-металевого функціонально-градієнтного матеріалу.....	179
3.5.2. Дослідження температурного та термосилового напруженого стану анізотропних циліндричних оболонок із боропластику, захищених шаром нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу.....	187
3.6. Висновки до розділу 3.....	194

РОЗДІЛ 4. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ.....	197
4.1. Постановка задачі про вільні коливання товстостінних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	197
4.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови розв’язку задачі про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	200
4.3. Методика розв’язку задачі про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	208
4.4. Достовірність розв’язку задач про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....	210
4.5. Вільні коливання анізотропних циліндричних оболонок.....	213
4.5.1. Вплив товщини на мінімальні частоти вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок.....	213
4.5.1.1. Одношарова оболонка.....	213
4.5.1.2. Двошарова оболонка.....	215
4.5.1.3. Тришарова оболонка.....	217
4.5.1.4. Чотиришарова оболонка.....	219
4.5.1.5. П’яти-, семи- та восьмишарові оболонки.....	220
4.5.2. Порівняння мінімальних частот вільних коливань для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості шарів.....	224
4.5.3. Порівняння мінімальних частот вільних коливань для шаруватих анізотропних циліндричних оболонок при зміні їх довжини.....	225
4.5.4. Вплив граничних умов на частоти вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок.....	228
4.5.5. Дослідження частот вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок.....	231
4.5.6. Дослідження частот вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів.....	234
4.6. Висновки до розділу 4.....	237

**РОЗДІЛ 5. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ХУ – ВАСІДЗУ ТА
ПОБУДОВА РІВНЯНЬ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ
АНІЗОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ.....240**

- 5.1. Модифікований змішаний варіаційний принцип Ху – Васідзу та виведення системи рівнянь стійкості.....240
- 5.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельно-аналітичного розв’язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском в просторовій постановці.....261
- 5.3. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельного розв’язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці.....262
- 5.3.1. Використання методу дискретних перетворень Фур’є для переходу від задачі визначення параметрів докритичного напружено-деформованого стану до розв’язку системи рівнянь стійкості пружних анізотропних оболонок в просторовій постановці.....263
- 5.4. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельного розв’язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту) прикладеного до торця в просторовій постановці.....265
- 5.5. Методика розв’язку систем рівнянь стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок в просторовій постановці.....267
- 5.6. Достовірність розв’язку задач стійкості пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.....268
- 5.7. Висновки до розділу 5.....275

**РОЗДІЛ 6. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АНІЗОТРОПНИХ
НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ.....276**

- 6.1. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією розподіленого зовнішнього бокового тиску.....278
- 6.1.1. Вплив товщини на стійкість шаруватих анізотропних циліндричних

оболонок під дією розподіленого бокового тиску.....	278
6.1.1.1. Одношарова оболонка.....	278
6.1.1.2. Двошарова оболонка.....	280
6.1.1.3. Тришарова оболонка.....	283
6.1.1.4. Чотиришарова оболонка.....	285
6.1.1.5. Восьмишарова оболонка.....	286
6.1.2. Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів.....	289
6.1.3. Дослідження стійкості шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів.....	290
6.2. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.....	293
6.2.1. Вплив товщини на стійкість шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску.....	293
6.2.1.1. Одношарова оболонка.....	293
6.2.1.2. Двошарова оболонка.....	296
6.2.1.3. Тришарова оболонка.....	298
6.2.1.4. Чотиришарова оболонка.....	300
6.2.1.5. Восьмишарова оболонка.....	302
6.2.2. Величини критичних навантажень осьового тиску для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів.....	304
6.3. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного навантаження (крутного моменту), що прикладений до їх торців.....	305
6.3.1. Вплив товщини на стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного навантаження.....	305
6.3.1.1. Одношарова оболонка.....	305
6.3.1.2. Двошарова оболонка.....	309
6.3.1.3. Тришарова оболонка.....	312
6.3.1.4. Чотиришарова оболонка.....	314

6.3.1.5. Восьмишарова оболонка.....	316
6.3.2. Величини критичних навантажень крайового зсувного навантаження для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів.....	319
6.4. Висновки до розділу 6.....	321
ВИСНОВКИ.....	324
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	330
ДОДАТКИ.....	362

ВСТУП

Актуальність теми. Зменшення матеріаломісткості циліндричних оболонкових конструктивних елементів із забезпеченням умов їх надійної експлуатації досить часто пов'язано із використанням композитних матеріалів. Це питання стає особливо важливим у зв'язку із можливим застосуванням конструктивно анізотропних композитних оболонкових систем в авіаційній, ракетній, космічній галузях, а також в машинобудуванні та будівництві. Їх розрахунки щодо встановлення характеристик деформування, динаміки та стійкості, які здійснюються на основі відомих двовимірних моделей, не завжди задовольняють вимогам стосовно їх точності. Тому логічним і важливим є побудова розрахункових моделей, що дозволяють найбільш повно враховувати параметри, які описують напружено-деформований стан, коливання та стійкість цих оболонок.

Розв'язання проблем розрахунків циліндричних конструктивно анізотропних композитних оболонок може бути пов'язане з використанням просторових співвідношень лінійної теорії пружності. В них же слід враховувати, що при виготовленні таких оболонкових систем, наприклад, шляхом укладання на оправку попередньо ортотропного волокнистого матеріалу в конструкції він отримує властивості більш низького порядку симетрії пружних характеристик. Тобто на макрорівні утворюється матеріал, що має одну площину пружної симетрії, яка є паралельною серединній поверхні оболонки. Відповідно до узагальненого закону Гука деформації розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення конструкцій стають взаємопов'язаними. Зазначене суттєво ускладнює розрахунки оболонкових конструкцій порівняно з тими, що виготовлені, наприклад, із ортотропного матеріалу.

Відомо, що традиційні композитні матеріали не завжди здатні використовуватись в умовах високих температур. Тому для їх захисту може використовуватися новий клас композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ). Знано, що типовий ФГМ є

неоднорідним за товщиною композитом і виготовленим з різних фаз матеріальних складових, як правило, кераміки й металів або наноматеріалів. Завдяки змінним за товщиною властивостям такий матеріал здатний протистояти високотемпературному впливу та забезпечувати необхідні пружні характеристики основної несучої конструкції. Дослідження напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій, виготовлених з традиційних композитів, захищених з боку високотемпературних полів шарами функціонально-градієнтних матеріалів, також раціонально проводити в рамках співвідношень тривимірної теорії пружності.

Підсумовуючи, можливо зауважити, що проблеми тривимірного розрахунку напружено-деформованого стану, коливань товстостінних і стійкості нетонких конструктивно анізотропних циліндричних оболонок є недостатньо вивченими. З погляду на це, поставлені та розв'язані в дисертаційній роботі проблеми є важливими для розвитку розрахунків композитних конструкцій, а також актуальними й такими, що мають як наукові, так і прикладні значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась відповідно до наукових програм, тематики та загальних планів досліджень кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування й пов'язана з виконанням держбюджетних наукових тем. Автор був керівником держбюджетної теми «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок обертання в уточнених постановках» (№ держ. реєстрації 0113U004051) і відповідальним виконавцем держбюджетної теми «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок в уточненій та тривимірній постановках» (№ держ. реєстрації 0117U000654). Також автор був виконавцем таких тем: «Науково-технічні аспекти розробки математичних моделей і реалізація на їх основі методик розрахунку конструкцій з композитних матеріалів» (№ держ. реєстрації 0199U001924), «Розробка теоретичних основ розрахунку статично-невизначених конструкцій з композитних матеріалів при

різних режимах навантаження» (№ держ. реєстрації 0101U001892), «Розробка змішаного варіаційного принципу та методів розв'язання нелінійних задач механіки композитних оболонок» (№ держ. реєстрації 0107U004177), «Побудова канонічної системи рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенка і методів розв'язання задач стійкості оболонок з композитів» (№ держ. реєстрації 0110U000818). Всі теми мали бюджетне фінансування та виконувались за дорученням Міністерства освіти і науки України.

Мета дослідження у розв'язанні важливої науково-технічної проблеми, яка полягає у використанні просторових співвідношень лінійної теорії пружності для створення алгоритмів, розрахункових моделей, комп'ютерних програмних продуктів і проведення на цій основі досліджень:

- конструктивно анізотропних композитних товстостінних циліндричних оболонок стосовно встановлення параметрів їх напружено-деформованих станів, що знаходяться в полі силових дій від розподілених бокового або осьового тисків, дотичного зсувного зусилля рівномірно розподіленого на торцю (кручення), а також температурних впливів;
- знаходження параметрів, що характеризують вільні коливання товстостінних шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонкових конструкцій при урахуванні різноманітних умов закріплення їх торців і структурній будові за товщиною;
- встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та стійкості нетонких конструктивно анізотропних композитних циліндричних оболонок, що знаходяться в полі дії: розподіленого бокового чи осьового тисків, дотичного зсувного зусилля, рівномірно розподіленого на торцю.

Завдання дослідження. Для досягнення поставленої мети необхідно реалізувати такі завдання:

- модифікувати варіаційний принцип Ху – Васідзу, який ґрунтується на використовуваному в аналітичній механіці методі Гамільтона, стосовно виведення тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в

рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла описують деформування та динаміку товстостінних анізотропних композитних циліндричних оболонок;

- спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, розробити, при використанні просторової теорії пружності, підхід щодо побудови системи з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок;

- привести тривимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружено-деформований стан (НДС) товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском, до одновимірної нормального виду Коші, використавши метод Бубнова – Гальоркіна. У випадку осьового тиску або розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення) приведення тривимірної системи рівнянь рівноваги до одновимірної здійснити методом прямих;

- тривимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружено-деформований стан товстостінних анізотропних циліндричних оболонок від температурної та термосилової дій, скориставшись методом Бубнова – Гальоркіна, привести до одновимірної нормального виду Коші;

- для встановлення параметрів про вільні коливання товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій розробити підхід, що спирається на метод Бубнова – Гальоркіна, стосовно приведення просторової системи диференціальних рівнянь руху до одновимірної;

- привести тривимірну систему диференціальних рівнянь стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок до одновимірної нормальної форми Коші, застосовуючи метод Бубнова – Гальоркіна. При розв’язку задачі стійкості від дії осьового тиску, розподіленого торцевого зсувного навантаження (кручення) чисельним методом прямих, використати метод дискретних перетворень Фур’є для знаходження напружень, що описують параметри докритичного НДС;

- розробити алгоритми та створити, на основі числового методу дискретної ортогоналізації, програмні комплекси для персональних комп'ютерів (ПК), що дозволять реалізувати одновимірні системи диференціальних рівнянь щодо встановлення для товстостінних анізотропних шаруватих композитних циліндричних оболонок параметрів вільних коливань, напружено-деформованих станів від силового, температурного та термосилового впливів;

- використовуючи створені програмні комплекси для ПК, дослідити та проаналізувати вплив на параметри, що описують напружено-деформований стан товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, дії бокового та осевого тисків, розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення);

- використовуючи створені комп'ютерні програмні комплекси для ПК, провести дослідження впливу на параметри напружено-деформованих станів товстостінної анізотропної циліндричної оболонки, виготовленої з композитного матеріалу, який захищений з боку температурного поля високої інтенсивності шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ), температурного та термосилового впливів;

- дослідити та отримати нові дані про вплив на параметри вільних коливань конструктивно анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій з волокнистих і функціонально-градієнтних матеріалів різних видів граничних умов на торцях, структурної будови за товщиною;

- розробити алгоритм і скласти, при використанні числового методу дискретної ортогоналізації, комп'ютерний програмний комплекс для персональних комп'ютерів (ПК), в якому в єдиному процесі поєднати встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок;

дослідити та отримати нові дані про вплив на стійкість нетонких циліндричних оболонок з волокнистих і функціонально-градієнтних композитних матеріалів конструктивної анізотропії, різних видів граничних

умов, структурної будови за товщиною при дії них: бокового зовнішнього та осевого тисків, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого по торцях оболонки (кручення).

Об'єктом дослідження є нетонкі та товстостінні анізотропні циліндричні оболонки, виготовлені з композитних та функціонально-градієнтних матеріалів, що мають одну площину пружної симетрії.

Предметом дослідження є параметри лінійного НДС анізотропних товстостінних циліндричних оболонок, виготовлених з матеріалу з однією площиною пружної симетрії, під дією стискаючих або крутних навантажень, впливом змінного за товщиною температурного поля; параметри вільних коливань анізотропних товстостінних циліндричних оболонок; величини критичних навантажень, при яких докритичний рівноважний стан стає нестійким і нетонка циліндрична оболонка раптово змінює форму деформування (явище біфуркації); вплив механічних властивостей волокнистих композитів, кераміко-металевих та нанокерамічних ФГМ; вплив геометрії конструкції, конфігурації шаруватих пакетів з цих матеріалів, умов закріплення оболонок на процес деформування, вільні коливання та величини критичних навантажень.

Методи дослідження. Поставлена в роботі мета досягається шляхом виведення при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, систем тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла, описують деформування, динаміку товстостінних і стійкість нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонок. Приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних до одновимірних нормального виду Коші, у випадку розподіленого бокового тиску здійснюється при використанні процедури методу Бубнова – Гальоркіна. Зменшення розмірності системи, при дослідженні напружено-деформованого стану, у випадку осевого тиску та кручення проводиться при використанні методу прямих. Встановлення параметрів докритичного НДС, отриманих чисельним

методом прямих, та процедурою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна при розв’язку задач стійкості від осьового тиску та кручення, проводиться за використання методу дискретних перетворень Фур’є. Чисельний розв’язок одновимірних крайових задач НДС, динаміки та стійкості реалізується чисельним методом Рунге-Кутта з дискретною ортогоналізацією за С.К. Годуновим.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у створенні розрахункової моделі та проведенні дослідження напружено-деформованого стану (від силового, температурного й термосилового впливу) та параметрів вільних коливань товстостінних і стійкості нетонких анізотропних циліндричних композитних шаруватих оболонок, матеріал яких має одну площину пружної симетрії, паралельну серединній поверхні. При цьому:

Уперше:

- модифіковано варіаційний принцип Ху – Васідзу стосовно виведення систем тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках лінійної теорії пружності анізотропного тіла описують деформування та динаміку товстостінних і стійкість нетонких анізотропних композитних циліндричних оболонок;

- приведення тривимірних систем диференціальних рівнянь до одновимірних здійснено при використанні процедури методу Бубнова – Гальоркіна, за яким всі функції напружень й переміщень розкладаються у подвійні тригонометричні ряди за коловим напрямом і вздовж твірної циліндричної оболонки;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених програмних комплексів для персональних комп’ютерів (ПК), розв’язано нові задачі щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних шаруватих анізотропних композитних циліндричних оболонок від зовнішньої силової дії;

- реалізовано використання розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп’ютерних програмних комплексів для ПК щодо встановлення параметрів

напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, виготовлених з композитного матеріалу, який захищений з боку високого температурного поля шаром функціонально-градієнтного матеріалу;

- розроблений алгоритм і створений при використанні числового методу дискретної ортогоналізації комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому в єдиному процесі поєднані встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких шаруватих анізотропних циліндричних оболонок;

- за використанням розроблених алгоритмів і створених на їх основі комп'ютерних програмних комплексів для ПК, отримані нові дані щодо впливу анізотропії, лінійного деформування на втрату стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів;

- за допомогою числових досліджень отримано нові дані про вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу відносно координатних осей конструкції, при різних граничних умовах, геометрії та структурній будові оболонки, на її стійкість при дії осьового тиску, зовнішнього бокового тиску, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого на торцях оболонки (кручення);

- встановлено, що при стиску шаруватих оболонок з косоперехресним армуванням розрахункові критичні навантаження для нетонких анізотропних циліндричних оболонок можуть бути суттєво завищеними, якщо користуватись традиційною для оболонок із композитів моделлю ортотропного тіла;

- розроблені нові методики чисельного розрахунку стосовно деформування, стійкості дозволяють проводити структурну оптимізацію параметрів анізотропних циліндричних оболонок і в той же час отримувати дані, що не викликають ніяких сумнівів стосовно їх достовірності.

Удосконалено:

- при використанні складених алгоритмів програмні комплекси для персональних комп'ютерів щодо розв'язання задач зі встановлення параметрів

вільних коливань товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих та функціонально-градієнтних матеріалів.

Набули подальшого розвитку:

- підходи щодо дослідження в просторовій постановці впливу анізотропії, структурної будови за товщиною, умов закріплення на параметри вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів.

Достовірність основних положень та здобутих результатів забезпечується математичною коректністю постановки задач; співставленням отриманих результатів розв'язку задач з даними, що приведені в науковій літературі; застосуванням надійних і детально апробованих методів аналітичного та чисельного інтегрування при розв'язку однорідних і неоднорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю отриманих результатів при використанні чисельних методів та контролем їх точності.

Практична цінність результатів. Результати роботи суттєво розширюють можливості використання підходів будівельної механіки щодо впровадження розробленого розрахункового підходу для розв'язку просторових задач теорії анізотропних оболонкових конструкцій. Практичне значення представленої роботи в розробці підходів і відповідних алгоритмів на основі тривимірних співвідношень лінійної теорії пружності, що представлені в обчислювальних програмних комплексах для ПК і використовуються для чисельних розрахунків задач деформування, динаміки товстостінних і стійкості нетонких шаруватих циліндричних оболонок із матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Реалізація проблеми розрахунків параметрів деформування та стійкості реалізується при дії на циліндричні оболонки різноманітних видів статичного навантаження та температурного впливу. При цьому оцінено вплив на напружено-деформований стан, стійкість та частоти вільних коливань анізотропії композитного матеріалу, різних умов закріплення торців, шаруватості та геометрії циліндричних оболонок. Підходи та алгоритми, що реалізовані в програмних обчислювальних комплексах для ПК, впроваджено в

ДП «Антонов» м. Київ, в Київському національному університеті будівництва і архітектури, в Національному університеті водного господарства та природокористування (м. Рівне) при виконанні держбюджетних тем згідно із замовленням МОН України. Дані з досліджень цієї роботи були використані при підготовці монографії, навчального посібника та підручника «Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності» для здобувачів вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», а також під час проведення науково-практичних конференцій викладацького складу, аспірантів і студентів. Також результати цієї роботи були використані при виконанні магістерських робіт студентами, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Мости і транспортні тунелі». Здобуті в дисертаційній роботі результати можливо використати під час проектування анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій в науково-дослідних, виробничих закладах і установах.

Особистий внесок здобувача. Отримані в представленій до захисту роботі розрахункові моделі, підходи, алгоритми та програмні комплекси, основні результати, що складають дисертаційну роботу, здобуті автором. Вони відображені в індивідуальних та спільних публікаціях [162-165, 187-194, 210-223, 225-230, 287, 288, 294-298, 312-314], де автор сформулював, поставив і розробив розрахункові математичні моделі задач про напружено-деформований стан, вільні коливання та стійкість анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень та окремі розділи роботи доповідалися на: VII Міжнародній науково-технічній конференції «АВІА-2007», НАУ (Україна, Київ, 2007 р.); на IX Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (Україна, Львів, 2014 р.); на 3rd int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS¹ (Germany, Braunschweig, 2015); на IV Міжнародній науковій

конференції «Сучасні проблеми механіки», КНУ ім. Т. Шевченка (Україна, Київ, 2017 р.); на V Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», ОДАБА (Україна, Одеса, 2018 р.); на VIII Міжнародній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки», ОДАБА (Україна, Одеса, 2021 р.); на Міжнародній конференції «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проєктуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво», НТУ (Україна, Київ, 2022 р.); на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023», Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (Україна, Львів, 2023 р.); на Міжнародній науково-технічній конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта», яка проходила в рамках форуму інженерів-механіків, присвяченого 125-річчю заснування КПІ ім. Ігоря Сікорського та навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту (Україна, Київ, 2023 р.); VII Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки», КНУ ім. Т. Шевченка, (Україна, Київ, 2023 р.); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2006–2023 рр.).

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 38 наукових праць, серед яких: чотири статті у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “А”, з них – три у періодичному виданні, що індексується в наукометричній базі Web of Science інша в Scopus; п'ятнадцять статей у фахових журналах, що входять до переліку, затвердженого ДАК України категорії “Б”, сім статей у закордонних фахових журналах, з них – чотири у періодичних виданнях, що індексуються в наукометричних базах Scopus, віднесених до другого і третього кuartилів (Q2 та Q3); одинадцять публікацій у збірниках матеріалів та доповідей українських

та міжнародних наукових конференцій та одна монографія видана у співавторстві.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, огляду літератури, шести розділів основної частини, загальних висновків, списку використаних літературних джерел із 324 найменувань, додатків, викладена на 383 сторінках друкованого тексту, серед яких 305 сторінок основного тексту, 112 рисунків, 72 таблиці і 22 сторінок додатків.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультанту завідувачу кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки НУВГП, професору кафедри будівельної механіки КНУБА, д.т.н., професору В.М.Трачу за постійну увагу та корисні поради при написанні дисертаційної роботи.

В огляді літератури аналізується сучасний стан досліджень з напружено-деформованого стану, динаміки та стійкості оболонок з композитів в тривимірній постановці та приведено обґрунтування теми дисертаційної роботи.

Питання дослідження роботи оболонкових конструкцій з сучасних композитних матеріалів зазвичай розглядались в рамках класичних та уточнених теорій. При цьому найбільш розповсюдженим способом виготовлення оболонок з композитних волокнистих матеріалів є намотування. Характерною особливістю цього способу є те, що між осями власної криволінійної системи координат конструкції та головними напрямками пружності початково ортотропного матеріалу виникає розбіжність обумовлена зміною кута армування. Цим визначається анізотропія оболонкової конструкції та неоднорідність механічних характеристик її матеріалу, яка характеризується наявністю однієї площини пружної симетрії паралельної серединній поверхні. Водночас необхідно зауважити, що використання методу гіпотез, що включає в себе припущення, які описують розподіл напружень і переміщень за товщиною оболонок, найкраще підходить для аналізу тонкостінних конструкцій.

Дослідження нетонких та товстостінних оболонкових конструкцій вимагає застосування більш точних теорій. Однією з таких є тривимірна теорія пружності, а також ті узагальнені теорії розрахунку оболонок та пластин, що базуються на підходах та методах, коли розв'язок тривимірної задачі замінюється послідовним розв'язком двовимірних рівнянь.

Розв'язок задач деформування, динаміки та стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці на основі тривимірних рівнянь теорії пружності можливо умовно поділити на дві групи: точні та наближені.

До наближених відносяться методи: скінчених різниць, прямих, малого параметра, скінчених елементів. Основним методом отримання точного розв'язку просторової задачі є метод Фур'є. При цьому точні розв'язки представляються у вигляді рядів та інтегралів із спеціальними функціями та отримуються при деяких обмеженнях на характер неоднорідності матеріалу оболонкових конструкцій та вид навантаження. Недоліком аналітичних методів є те, що за їх використанням можливо отримати розв'язок лише в обмежених випадках і за використання спрощених моделей. Водночас, якщо такий розв'язок відшукано, то його можливо використати не лише згідно прямого призначення, але і в якості оцінки параметрів навантаження для близьких за змістом задач.

Таким чином, виникає необхідність розробки таких підходів до розрахунку напружено-деформованого стану, динаміки та стійкості оболонкових конструкцій, коли аналітичні та чисельні методи, доповнюючи один іншого, використовуються паралельно. В представленій роботі розв'язання задач просторової теорії анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій базується на аналітичних методах Бубнова – Гальоркіна та дискретних перетворень Фур'є, де розв'язувальні функції задано у вигляді тригонометричних рядів і чисельних методах прямих та дискретної ортогоналізації.

У відповідності до варіаційного принципу Ху – Васідзу [46] з умови стаціонарності функціоналу виводяться рівняння руху та рівняння стійкості, співвідношення пружності (рівняння стану) та відповідні граничні умови для циліндричних оболонок в тривимірній постановці. Отримані, таким чином, за використання методів аналітичної механіки розв’язувальні системи рівнянь руху та стійкості анізотропних циліндричних оболонок покладено в основу підходу до вирішення поставлених проблем.

Перший розділ присвячено побудові модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу та, на його основі, виведення тривимірної системи з шести неоднорідних диференціальних рівнянь руху лінійної теорії пружності. Отримана таким чином система записана в частинних похідних відносно шести компонентів амплітудних значень векторів напружень та переміщень може бути використана для визначення параметрів напружено-деформованого стану від силового та/або температурного впливу та частот вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки. Для її отримання було використано модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, що дозволяє записувати відповідні рівнянням граничні умови. За використанням здобутих систем рівнянь і відповідних ним граничних умов можуть бути встановлені величини напружень і переміщень від силової та температурної дії, а також частоти вільних коливань в тривимірній постановці для товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки.

У другому розділі подається підхід до розв’язку задачі про напружено-деформований стан товстостінної шаруватої анізотропної циліндричної оболонкової конструкції в просторовій постановці під зовнішнім вісесиметричним силовим впливом на неї. У випадку розподіленого зовнішнього бокового тиску для зменшення розмірності тривимірної системи рівнянь рівноваги при відповідних умовах на поверхнях і торцях оболонки використовується процедура методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладаємо всі функції в тригонометричні ряди за координатами вздовж твірної

циліндра z так, що б вони задовольняли умовам на торцях. При осьовому стиску та крученні з цією ж метою скористаємось чисельним методом прямих. Для розв'язку отриманої одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки використовується метод дискретної ортогоналізації за С.К. Годуновим.

Здобуті результати для випадків ізотропних, ортотропних та часткових випадків умов на торцях анізотропних циліндричних оболонок співпадають з відомими розв'язками та є цілком новими для загального випадку крайових умов розглядуваних конструкцій. Проаналізовано напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок при розподіленому боковому, осьовому тисках, крученні в залежності від кута повороту головних напрямів пружності волокнистого композиту відносно твірної циліндра для різної структури шаруватого пакету, геометрії та граничних умов і порівняно із результатами отриманими згідно ортотропного підходу до розрахунку анізотропних циліндричних оболонок. Показано, що всупереч уявленню про те, що збільшення кількості перехресно укладених шарів до семи – восьми веде до можливості розрахунку анізотропної оболонки згідно ортотропного підходу, анізотропні складові НДС не зникають і повинні бути враховані при оцінці несучої здатності конструкцій.

В третьому розділі за використанням тривимірної системи неоднорідних диференціальних рівнянь лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що виведена при використанні модифікованого варіаційного принцип Ху – Васідзу, представлено підхід до розв'язку задачі про напружено-деформований стан від дії змінного за товщиною температурного впливу, а також силової дії для циліндричних товстостінних шаруватих оболонок з анізотропного матеріалу та з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) як кераміко-металевих, так і нанокерамічних. Пружні характеристики волокнистого композиту та ФГМ з вмістом нанотрубок можуть знаходитись в одній площині, що є паралельною

серединній поверхні оболонки. При розв'язку тривимірної задачі, для зменшення її розмірності, була використана процедура методу Бубнова – Гальоркіна. Чисельна реалізація отриманої одновимірної задачі проводилась при використанні методу дискретної ортогоналізації. Розглянуто випадок циліндричних оболонкових конструкцій з волокнистого композиту боропластику захищеного з боку температурного поля високої інтенсивності шаром ФГМ. Температура прийнята змінною лише за товщиною захисного шару. Отримані результати порівняно з випадком спільної дії змінного за товщиною шару ФГМ температурного поля та розподіленого зовнішнього тиску. Проаналізована залежність компонент НДС циліндричних оболонок при вказаних впливах від кута повороту головних напрямів пружності як боропластику, так і функціонально-градієнтного нанокompозитного матеріалу.

В четвертому розділі спираючись на тривимірну систему однорідних диференціальних рівнянь руху в частинних похідних, лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що отримана на основі модифікованого варіаційного принцип Ху – Васідзу, запропоновано підхід до розв'язку задачі про вільні коливання шаруватих товстостінних циліндричних оболонок з анізотропного матеріалу, пружні характеристики якого знаходяться в одній площині, що є паралельною серединній поверхні. Для зменшення розмірності тривимірної системи застосовано аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна. Отримана таким чином одновимірна задача реалізована чисельним методом дискретної ортогоналізації.

В цьому розділі приведені результати розрахунку частот вільних коливань циліндричних оболонок з композитів, утворених косоперехресним укладанням шарів армованого матеріалу, на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Проаналізовано вплив різних схем армування, структурної конфігурації пакету шарів, товщини та довжини, умов закріплення торців на частоти вільних коливань циліндричних оболонкових конструкцій, що виготовлені з волокнистих композитних матеріалів при врахуванні усіх механічних

характеристик закону Гука в просторовій постановці. Отримані результати порівняно із частотами вільних коливань здобутими на основі ортотропного підходу до розрахунку анізотропних оболонок, що також спирається на тривимірні рівняння теорії пружності.

У п'ятому розділі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних теорії пружності анізотропного тіла, що записана в циліндричній системі координат.

Для розв'язку задачі стійкості циліндричних анізотропних оболонок використовується процедура методу Бубнова – Гальоркіна. Чисельна реалізація пропонованого підходу заснована на поєднанні методів Бубнова – Гальоркіна, дискретного перетворення Фур'є та дискретної ортогоналізації. Порівняння отриманих результатів із наведеними у літературі свідчить про якісний збіг результатів розрахунку.

Шостий розділ представляє результати розрахунку на стійкість циліндричних оболонкових конструкцій з композитів, утворених косоперехресним укладанням армованих волокнистими матеріалами (боропластиком або склопластиком) шарів. Розглянуто такі випадки навантаження: зовнішній боковий тиск, осьовий тиск і торцеве зсувне навантаження (крутний момент). Досліджено вплив анізотропії матеріалу розглянутого виду на критичні величини навантажень за умови зміни кількості шарів, товщини та довжини уздовж твірної циліндричних оболонкових конструкцій при використанні повної форми закону Гука для матеріалу з однією площиною пружної симетрії в просторовій постановці. Отримані величини критичних значень порівняно із результатами здобутими на основі ортотропного підходу до розрахунку анізотропних оболонок, що також спирається на тривимірні рівняння теорії пружності.

Аналізуючи результати проведених досліджень можливо зробити висновок про те, що для оболонкових конструкцій з волокнистих композитних

матеріалів, у випадку косопрехресного укладання шарів, розрахунки напружено-деформованого стану від силового та/або температурного впливу, визначення частот вільних коливань та стійкості, в просторовій постановці, можливо проводити лише враховуючи факт, що матеріал шарів має одну площину пружної симетрії. Причому вплив такого типу анізотропії на величини напружень, переміщень, критичні значення та частоти вільних коливань є суттєвим.

**ОГЛЯД РОБІТ З СТАТИКИ, ДИНАМІКИ ТОВСТОСТІННИХ І
СТІЙКОСТІ НЕТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ.
ОБГРУНТУВАННЯ ТЕМИ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ**

Відповідно до огляду літератури можливо зауважити, що на даний час найбільш розвиненою в розрахунках оболонкових та пластинчастих конструкцій є класична теорія, що базується на кінематичній гіпотезі Кірхгофа-Лява. Дослідженню напружено-деформованого стану, стійкості та динаміки тонких оболонок та пластин присвячена значна кількість наукових досліджень, огляд яких приведено в [9, 12, 14, 31, 42, 45, 48, 55, 60, 84, 88, 93, 100, 142, 145, 158, 173]. Для врахування впливу деформацій поперечного зсуву та можливості розвитку теоретичних підходів до розрахунку оболонкових і пластинчастих конструкцій з сучасних матеріалів було розроблено та розвинуто ряд прикладних теорій [10, 117, 172, 201] та інш.

Питання дослідження роботи оболонкових конструкцій з сучасних композиційних матеріалів зазвичай розглядались в рамках класичних та уточнених теорій. При цьому найбільш розповсюдженим способом виготовлення оболонок з композиційних матеріалів є намотування. Характерною особливістю цього способу є те, що між осями власної криволінійної системи координат конструкції та головними напрямками пружності початково ортотропного матеріалу виникає розбіжність обумовлена зміною кута армування. Цим визначається анізотропія оболонкової конструкції та неоднорідність механічних характеристик її матеріалу, яка характеризується наявністю однієї площини пружної симетрії паралельної серединній поверхні. Найбільш повні дослідження напружено-деформованого стану, стійкості та динаміки анізотропних тонких та середньої товщини оболонок обертання, що виготовлені з композиційних матеріалів з однією площиною пружної симетрії приведено в роботах [31, 85, 89, 145, 209, 231-233, 255-257].

Водночас необхідно зауважити, що використання методу гіпотез, що включає в себе припущення які описують розподіл напружень та переміщень стану за товщиною оболонок або пластин найкраще підходить для аналізу тонкостінних конструкцій.

Дослідження оболонкових конструкцій середньої товщини, а також товстостінних вимагає застосування більш точних теорій. Однією з таких є тривимірна теорія пружності, а також ті узагальнені теорії розрахунку оболонок та пластин, що базуються на підходах та методах, коли розв'язок тривимірної теорії замінюється послідовним розв'язком двовимірних рівнянь. Значний внесок в розвиток та побудову методів розрахунків, що стосуються напружено-деформованого стану, динаміки та стійкості таких конструкцій в просторовій постановці було зроблено такими науковцями Александров А.Я., Амбарцумян С.О., Бабич І.Ю., Баженов В.А., Беспалова О.І., Болотін В.В., Вабіщевич М.О., Василенко А.Т., Васильєв В.В., Власов В.З., Гайдайчук В.В., Гегелія Т.Г., Григолюк Е.І., Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Гринченко В.Т., Гузь О.Н., Жук Я.О., Іванченко Г.М., Козуб Ю.Г., Колчин Г.Б., Купрадзе В.Д., Лехніцкий С.Г., Лізунов П.П., Ломакін В.О., Лур'є А.І., Максим'юк Ю.В., Марчук О.В., Мяченков В.І., Назаренко В.М., Немиш Ю.М., Немчинов Ю.І., Новожилов В.В., Панкратова Н.Д., Пискунов С.О., Победря Б.Є., Подільчук Ю.М., Підстригач Я.С., Папкович П.Ф., Рвачев В.Л., Саркісян В.С., Семенюк М.П., Солодей І.І., Тимошенко С.П., Трач В.М., Улітко А.Ф., Чирков О.Ю., Шкриль О.О. та інші. Основні результати отримані для різноманітних типів задач статички, стійкості та динаміки оболонкових конструкцій на основі тривимірних рівнянь теорії пружності узагальнено та приведено в роботах [7, 20, 40, 50, 51, 53, 57, 82, 83, 85, 86, 88, 94, 97, 98, 99, 101, 103, 104, 108, 113, 115, 119, 120, 122, 131, 135, 136, 145, 149, 150, 161, 176, 202, 203, 256, 257].

Розв'язок задач статички, динаміки та стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці на основі тривимірних рівнянь теорії пружності можливо умовно поділити на дві групи: точні та наближені.

До наближених відносяться методи: скінчених різниць, прямих, малого параметра, скінчених елементів [121]. Основним методом отримання точного розв'язку просторової задачі є метод Фур'є [118]. При цьому точні розв'язки представляються у вигляді рядів та інтегралів із спеціальними функціями та отримуються при деяких обмеженнях на характер неоднорідності матеріалу оболонкових конструкцій та вид навантаження.

Першими підходами до розв'язку тривимірних задач статичної осесиметрично навантажених однорідних ізотропних оболонок можливо назвати роботи [200, 293], де розв'язок задачі методом Фур'є приводився до спеціального трансцендентного рівняння із функцією Бесселя першого роду від уявного аргументу. Подальший розвиток використання функції Бесселя для однорідних ізотропних циліндрів приведено в [2, 3, 130, 166, 170]. В роботах [167, 169], з використанням методу початкових функцій, розв'язано задачу для шаруватої ізотропної циліндричної оболонки із навантаженнями на бічних поверхнях та при інтегральному задоволенні граничних умов на торцях. Розв'язок такої задачі при урахуванні неоднорідності матеріалу оболонки за товщиною наведено в [54, 109]. Дослідження [267] для розв'язку осесиметричної задачі використовує розкладення в ряди Тейлора за радіальною координатою.

Побудова розв'язку для шаруватих композитних оболонок на основі ітераційного процесу зведення тривимірних співвідношень теорії пружності до деякої послідовності двовимірних рівнянь розглянута в роботі [49]. Цей підхід дозволяє врахувати зміну кривини оболонкових конструкцій, фізико-механічних характеристик матеріалу, а також деформації за її товщиною.

В роботі [134] розглянута пружна рівновага як однорідних, так і неоднорідних тіл, що мають анізотропію різних типів. Дається математичне формулювання загальних завдань рівноваги пружного анізотропного тіла та найбільш важливих проблем – розтягу, кручення, вигину, плоскої задачі, осесиметричної деформації та їх узагальнень. Отримано рішення великої кількості часткових задач.

Дослідження крайових ефектів багатошарових оболонкових конструкцій досліджено в роботах [42].

Порівняння результатів розв'язків задач статички отриманих на основі тривимірних рівнянь теорії пружності та прикладних теорій оболонок проведено в [85, 88].

Аналіз оболонкових конструкцій з використанням тривимірних рівнянь теорії пружності при використанні чисельного методу інтегральних рівнянь із складанням алгоритмів для ЕОМ та ПК представлено в [6, 33, 58, 112].

В [83, 85-88] викладено чисельно-аналітичні підходи до розв'язку задач статички неоднорідних анізотропних циліндричних, сферичних та прямокутних в плані пологих оболонок на основі рівнянь теорії пружності при окремих видах граничних умов під дією силового та температурного навантажень. Проведений аналіз розподілу напружень та переміщень в залежності від відносної товщини оболонкових конструкцій, ступеня анізотропії та неоднорідності їх матеріалу, змінності навантаження.

Використанню тривимірного підходу при дослідженні оболонкових конструкцій на основі методу скінченних елементів присвячено наукові роботи [32, 116, 324]

В працях [34, 177] побудова розрахункових схем в тривимірній постановці пов'язана із використанням унікальних просторових скінченних елементів. Результатом є створення єдиних розрахункових моделей оболонок незалежно від виду напружено-деформованого стану. Запропонований підхід дозволяє уточнити розв'язки задач для нетонких оболонкових конструкцій та дозволяє оцінити межі використання технічних теорій оболонок.

Дослідження, у тривимірній постановці, стійкості оболонкових елементів поряд із їх напружено-деформованим станом є одним з основних критеріїв несучої здатності конструкцій. Цьому питанню присвячена значна кількість робіт. Так стійкість шаруватих циліндричних оболонкових конструкцій з шарами з ортотропного матеріалу розглянута в роботі [127], де в тривимірній постановці досліджена стійкість оболонок під дією осьового зусилля та

поверхневого тиску. Приведені результати порівняні із отриманими при використанні гіпотези Кірхгофа-Лява.

В працях [98, 101] приведені систематичне викладення основ тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл в єдиній загальній формі для різних моделей (пружні, пружно-пластичні, в'язкопружні і в'язкопружнопластичні тіла). Розглянуто основні співвідношення нелінійної механіки деформованих тіл і виконано їх лінеаріацію. Приведене повне формулювання основних статичних і динамічних лінеаризованих задач для різних моделей тіл, що деформуються. Проведено класифікацію задач та проаналізовані критерії стійкості тривимірної лінеаризованої теорії для пружних та пружнопластичних тіл, а також для тіл з реологічними властивостями; виведено достатні умови стійкості. Доведено умови застосування статичного методу розв'язку задач. Приведені постановки та викладено аналітичні, варіаційні та чисельні методи розв'язання тривимірних лінеаризованих рівнянь щодо стержнів, пластин, шаруватих оболонок. Досліджено численні задачі стійкості анізотропних стержнів, пластин, циліндричних та сферичних оболонок, тришарових оболонок та оболонок із заповнювачем. З'ясовано вплив властивостей матеріалу на критичні навантаження, а також дано оцінку точності та встановлено області застосування різних прикладних теорій. Виявлено характерні механічні ефекти, які не вдається виявити у рамках двомірних прикладних теорій.

Дослідження стійкості товстих ортотропних циліндричних оболонок при різних видах силових дій проводиться на основі тривимірної теорії пружності в [263-265]. Результати розв'язку поставлених задач порівнюються з критичними навантаженнями, отриманими згідно формул Доннелла та Тимошенко для ортотропних оболонок.

В роботі [310] наведено теоретичний аналіз проблем втрати стійкості анізотропних шаруватих або багат шарових, коротких або довгих циліндричних оболонок під дією осьових навантажень. Теорія заснована на рівняннях Флюгге, покращених за рахунок використання теорії деформації

зсуву першого порядку. З використанням теорії деформації кінцевих переміщень та принципу віртуальної роботи отримано нелінійні рівняння рівноваги у часткових похідних та граничні умови які були лінеаризовані. Отримано розв'язки, що задовольняють рівнянням рівноваги у часткових похідних та граничним умовам.

Дослідження [284] присвячене отриманню та аналітичному розв'язку системи рівнянь стійкості товстих циліндричних оболонок. Розв'язок проводиться шляхом інтегрування диференціальних рівнянь стійкості за товщиною оболонки. Враховано ефекти поперечного зсуву та нелінійної зміни напружень та переміщень.

Метод дослідження стійкості та закритичної поведінки неоднорідних пружних оболонок в просторовій постановці на основі методу скінченних елементів приведено в [196, 197].

Також важливим критерієм несної здатності оболонкових елементів конструкцій є їх поведінка в умовах динамічних впливів. При цьому важливим аспектом є вміння визначення величин частот вільних коливань задля уникнення руйнування конструкцій внаслідок резонансу.

В першій главі [145] при використанні теоретичних засад [82] приведені розрахунки стосовно встановлення параметрів вільних коливань анізотропних плит і тонкої анізотропної циліндричної оболонки. Показано, що семишарову анізотропну оболонку з достатньою точністю можна розраховувати як ортотропну. В четвертій главі цієї ж роботи та в [72] розглянуті осесиметричні коливання циліндричних оболонок з однією поверхнею симетрії пружних властивостей в просторовій постановці. В [88] приведені підходи до розв'язку лінійних і нелінійних задач механіки оболонок на основі дискретно-континуальних методів у класичній, уточненій і просторовій моделях для ізотропних і ортотропних неоднорідних оболонок зі змінними геометричними та механічними параметрами. Приведені результати досліджень динамічних характеристик оболонок різноманітної форми та закріплення торців.

В роботі [157] представлено два підходи до розрахунку замкнених товстих шаруватих анізотропних циліндричних оболонок, які ґрунтуються на розділенні циліндричної оболонки за товщиною на ряд складених циліндричних оболонок. Задовольнивши умови контакту на поверхнях між ними, автори визначають частоти вільних згинальних коливань вихідної оболонки. У першому підході розподіл функцій за товщиною встановлюється на основі аналітичного розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. У другому – вони встановлюються апроксимацією поліноміальними функціями.

У роботі [279] для визначення частот вільних коливань автори використовують теоретичні засади [157], а для їх реалізації застосовують напіваналітичний метод скінченних елементів у комбінації з методом послідовного звуження інтервалу пошуку. Проведено аналіз поведінки оболонок при вільних і вимушених коливаннях.

В [244] запропоновано підхід до визначення частот і форм вільних коливань систем, складених з оболонок обертання різної геометрії та відносної товщини, неперервно і (або) дискретно неоднорідних за товщиною, з ізотропних, ортотропних та анізотропних матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Підхід включає створення математичної моделі коливань на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява, уточненої теорії типу Тимошенка, просторової теорії пружності (частинний випадок). Побудовано чисельно-аналітичний підхід до розв'язання відповідних двовимірних (тривимірних) задач на основі зниження їх розмірності та використання методів послідовних наближень й покрокового пошуку в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

Сучасні потреби авіакосмічної, енергетичної галузей вимагають використання матеріалів та конструкцій, що мають здатність опиратись температурним впливам не втрачаючи своєї несучої здатності. Характер роботи оболоноквих елементів конструкцій в умовах дії температурних полів змінної інтенсивності, наприклад, за товщиною є визначальним при проектуванні літальних апаратів та захисних герметичних оболонок атомних реакторів. Цим

зумовлена цікавість до дослідження в тривимірній постановці термонапруженого стану оболонкових конструкцій.

В роботах [39] проведено дослідження напруженого стану анізотропних однорідних та неоднорідних пружних циліндричних оболонок від дії температурних полів. Дослідження [41, 168, 268, 304] розглядають питання розподілу компонентів напруженого стану в ізотропних та ортотропних циліндричних оболонках від дії температурних полів.

В монографії [90] приведений метод суперпозицій, що дозволяє проводити розв'язок крайових задач теорії пружності та термонапруженого стану порожнистого циліндра кінцевої довжини. Цей підхід в роботах [90-92] було розширено на динамічні задачі теорії пружності тіл, що мають кінцеві розміри.

В [126] для ізотропних однорідних циліндрів розглянута осесиметрична задача термонапруженого стану при однорідних граничних умовах на торцях та завданні функцій теплового потоку на циліндричних поверхнях. Розв'язок задачі побудовано з використанням тригонометричних, бesselевих та експоненціальних функцій. Визначення температурних напружень в багатошарових кусочно-однорідних циліндричних оболонках проведене в [52].

Чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статички композитних пружних анізотропних оболонок під дією температурного навантаження викладено в монографіях [83, 86, 87].

З масиву робіт присвячених термонапруженому стану оболонкових конструкцій в тривимірній постановці виокремимо дослідження, що стосуються використання в якості матеріалу оболонок нових функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ). Функціонально-градієнтними матеріалами називають композитні матеріали механічні властивості яких, а також хімічний склад змінюються.

Одними з перших робіт, що заклали підвалини поняття про функціонально-градієнтні матеріали було дослідження японських вчених [251, 265, 269-272, 323]. В роботі [241] описано ФГМ, що виник у природних умовах, у деревині бамбуку. Вказано, що деревина бамбуку представляє собою композитний

матеріал, армований за осьовим напрямком, а також має макроскопічну градієнтну структуру за товщиною стінки стебла. Така градієнтна структура призводить до постійного поверхневого натягу і забезпечує розподіл міцності матеріалу в радіальному напрямку, що викликане адаптацією рослини до згину від вітрових навантажень.

В роботах [250, 285] наведено огляд різних видів ФГМ на основі їх фізичних, структурних та виробничих характеристик. Розглядаються переваги та недоліки різних процесів їх виготовлення. Описано застосування ФГМ в різних сферах виробництва: аерокосмічній, медичній, оборонній, енергетичній та в галузі точної обробки деталей машин та механізмів. Запропоновано нові види класифікації ФГМ, що базуються на контролі точності їх виготовлення, залишкових напруженнях, питомому енергоспоживанню та виробничих витратах. Показано, що ФГМ поєднують в собі переваги матеріалів, які є їх складовими. Так керамічна складова добре опирається термічному впливу та окисленню, і має високу зносостійкість. В той же час металева складова стійка до виникнення тріщин та характеризується значними технологічними властивостями.

В книзі [300] представлено основні відомості про структуру ФГМ та представлено залежності, що характеризують нелінійний розподіл температурного поля за товщиною шару ФГМ при заданих температурах на різних його поверхнях. Отримано розв'язуючі рівняння для розрахунку напружено-деформованого стану пластин та оболонкових конструкцій від температурних впливів.

Дослідження [281] розглядає питання визначення розподілу прогинів і напружень кераміко-металевих функціонально-градієнтних циліндричних оболонок на основі методу вибірових поверхонь. Вважається, що властивості матеріалу безперервно змінюються в радіальному напрямку відповідно до степеневому закону розподілу об'ємної частки компонентів. У розробленому тривимірному формулюванні поле переміщень нерівнорознесених поверхонь, паралельних середній поверхні функціонально-градієнтної оболонки,

визначається як для окремих оболонок. Використовуючи достатню кількість поверхонь вибірки, розташованих у вузлах полінома Чебишева, отримано точне 3-D рішення задачі теорії пружності для функціонально-градієнтної циліндричної оболонки.

В роботі [243] досліджено тривимірне термопружне деформування циліндричних оболонок з ФГМ на двопараметричних пружних основах з безперервною зміною об'ємної частки в радіальному напрямку, що піддаються термічному навантаженню. Відповідні функції температури та переміщення, які однаково задовольняють граничним умовам на торцях, використовуються для приведення рівнянь рівноваги до набору зв'язаних звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які розв'язуються методом узагальненої диференціальної квадратури. Результати представлені для двокомпонентних ізотропних і армованих волокном функціонально-градієнтних циліндричних оболонок.

В дослідженні [246] отримана точна тривимірна модель оболонки здатна виконувати аналіз термічного напруження сферичних, циліндричних оболонок і пластин з функціонально-градієнтного матеріалу. Модель базується на тривимірних рівняннях рівноваги для сферичних оболонок, розроблених з використанням ортогональної змішаної криволінійної системи координат. Використання такої системи відліку дозволяє досліджувати циліндричні оболонки, циліндри та пластини як окремі випадки сферичних оболонок за використанням радіусу кривизни. Тривимірна модель оболонки використовує пошаровий підхід і метод експоненціальної матриці для отримання загальних і окремих розв'язків за товщиною. Запропоновані результати дозволяють оцінити вплив товщини оболонки, її геометрії, кількості шарів та ефект температурної дії у зв'язаному аналізі термічного напруження одношарових і сендвіч-плит з ФГМ циліндричних і сферичних оболонок.

Цікавою є розроблена в роботі [259] числова модель тривимірних оболонок з різноспрямованого функціонально-градієнтного матеріалу. Тут припускається, що властивості матеріалу змінюються залежно від степеневого

закону щодо напрямків структурної будови конструкції. ФГМ складається з двох матеріалів: кераміки та алюмінію. Дослідження проводиться з використанням методу скінченних елементів з довільними багатограними елементами (Poly-FEM). Для аналізу моделей використовуються дві розроблені схеми інтерполяції над довільними багатограними елементами, а саме політопальна складена схема (PCEM) і схема послідовної інтерполяції (CIPFEM). При статичному аналізі досліджуються переміщення та нормальні напруження оболонкових конструкцій з ФГМ.

Актуальним в теперішній час є використання наноматеріалів як в якості матеріалу з якого виконано окремі елементи конструкцій, так і у вигляді окремих шарів підсилюючих такі елементи. В роботі [105] представлено стислий історичний опис походження і розвитку нанотехнологій, а також науковий аналіз наноутворень, наночастинок та наноматеріалів. Розглянуто аспекти сучасного стану і напрямів розвитку наномеханіки матеріалів. Монографія [106] присвячена викладенню загальних підходів до методів дослідження та результатів дослідження окремих типів задач статички, стійкості та динаміки нанокомпозитів. Визначені властивості нанокомпозитних матеріалів складної структури де в якості наповнювача виступають нановолокна та наногранули.

Огляду створення композитних функціонально-градієнтних матеріалів присвячене дослідження [308]. Вказано, що за останні кілька років дослідники доклали значних зусиль для поглибленого аналізу функціонально-градієнтних композитних структур зміцнених вуглецевими нанотрубками (FG-CNTRC). Ця увага пов'язана із високими механічними, термічними, оптичними, термомеханічними і вібраційними характеристикам наноматеріалів у порівнянні зі звичайними композитами. Представлено всебічний огляд відомих досліджень механічних, вібраційних, термічних і термомеханічних конструкцій FG-CNTRC, які знаходяться в умовах різноманітних зовнішніх впливів. Зроблена спроба пов'язати як експериментальні, так і теоретичні дослідження

структур FG-CNTRC з проблемами та критичними напрямками майбутніх досліджень.

В роботі [249] проведено статичний аналіз циліндричної оболонки, армованої вуглецевими нанотрубками (FG-CNTRC), в умовах зовнішнього тиску. Розв'язуючі рівняння були створені за допомогою теорії деформації зсуву вищого порядку з урахуванням ефекту поперечного розподілу нормального напруження. У цій теорії переміщення в радіальному напрямку w є не константою, а поліномом другого порядку від координати вздовж товщини. Розподіл вуглецевих нанотрбок за товщиною оболонки розглядається як рівномірним (UD), так і функціонально розподіленим за чотирма типами: FG-L, FG-V, FG-O та FG-X. Оцінено ефективні властивості матеріалів циліндричних оболонок FG-CNTRC за правилом суміші. Представлено також аналітичний розв'язок з використанням простих тригонометричних рядів і перетворення Лапласа для отримання розв'язуючих рівнянь для оболонки із граничними умовами, що відповідають защемленню на обох кінцях.

Сумісна дія зовнішнього навантаження та температурного впливу розглянута в дослідженні [261]. Функціонально-градієнтна оболонка шарнірно обперта на торцях із зміною властивостей матеріалу в радіальному напрямку. Аналітично розв'язуються тривимірні стаціонарні рівняння теплопровідності та термопружності, спрощені до випадку узагальнених плоских деформацій за осьовим напрямком. Відповідні функції температури та переміщень, які задовольняють граничним умовам на торцях, використовуються для приведення рівнянь термопружної рівноваги до набору зв'язаних звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які розв'язуються методом степеневого ряду. Результати представлені для двокомпонентних ізотропних і армованих волокном (ортотропних) функціонально-градієнтних оболонок, які мають плавну зміну об'ємних часток матеріалу та/або орієнтації волокон у площині за радіальним напрямком.

В роботі [240] методом диференціальної квадратури проведено асиметричний аналіз деформацій та напружень функціонально-градієнтної

порожнистої циліндричної оболонки під дією термомеханічних навантажень. Матеріал циліндричної оболонки вважається градієнтним в радіальному напрямку за степеневим законом, при чому коефіцієнт Пуассона вважається незмінним. Розв'язуючі диференціальні рівняння в частинних похідних виражаються через переміщення та теплові поля в формах рядів за допомогою двох версій диференціальних квадратурних методів, а саме методу полінома та квадратурного методу Фур'є. Циліндрична оболонка розглядається як за умов осесиметричного, так і асиметричного навантаження. Проведено асиметричний термопружний аналіз оболонки і представлено вплив параметра градації, різниці температур і геометрії на напруження, радіальні переміщення та температурні поля.

В статті [282] представлено тривимірний термопружний аналіз циліндричної функціонально-градієнтної оболонки, що знаходиться в умовах внутрішнього та зовнішнього тиску, поверхневого напруження зсуву внаслідок тертя, зовнішнього крутного моменту та рівномірного розподілу температури. Розглянуто степеневий розподіл теплових і механічних властивостей матеріалу. Для опису полів переміщень використовується теорія деформації зсуву першого порядку. Система шести основних розв'язуючих диференціальних рівнянь включає рівняння Ейлера для функціонала енергії. Встановлено, що об'ємний показник фракцій змішуваних матеріалів суттєво впливає на поля напружень і переміщень.

Приведений, не претендуючий на повноту, огляд досліджень присвячених тривимірним підходам до розрахунку напружено-деформованого стану, стійкості та динаміки оболонкових конструкцій показує, що незважаючи на багато чисельні наукові дослідження, що проведені авторами з різних країн [85, 88, 145, 240, 246, 259, 263, 264, 282] все ще залишаються задачі, які відповідно до потреб сьогодення, потребують вирішення. Одна з них пов'язана із тим, що у випадку розрахунку міцності і динаміки товстостінних та стійкості нетонких оболонкових конструкцій з композитних матеріалів, не в повній мірі враховується ступінь їх анізотропії при використанні розрахункової

просторової методики. Причиною цього є те, що у випадку анізотропії матеріалу конструкції, що обумовлена наявністю однієї площини пружної симетрії паралельної серединній поверхні оболонки, деформації розтягу (стиску), згину, зсуву та кручення взаємопов'язані внаслідок чого значно ускладнюються математичні підходи до розв'язку подібних задач. Важливість вирішення цієї проблеми пов'язана із тим, що отримані тривимірні розв'язки, позбавлені необхідності використання гіпотез, як це характерно для класичних та уточнених моделей, можуть використовуватися в якості еталонних в розрахунках, чисельними методами, оболонкових конструкцій складнішої геометрії.

Особливістю розв'язання задач статички, динаміки та стійкості анізотропних оболонкових конструкцій у порівнянні із ортотропними є необхідність врахування взаємозв'язку між перерахованими вище деформаціями. Для вирішення поставленої задачі, у випадку циліндричних анізотропних оболонок обертання, для розв'язку систем диференціальних рівнянь використано процедуру методу Бубнова – Гальоркіна, метод дискретних перетворень Фур'є, метод прямих та дискретної ортогоналізації.

Використання аналітичних та чисельних підходів, які логічно взаємопов'язані в роботі, дозволяють підняти рівень довіри до здобутих результатів і, таким чином, обґрунтувати їх достовірність. Вказане є важливим при розв'язку задач статички, динаміки та стійкості анізотропних товстостінних і нетонких оболонкових конструкцій, які в тривимірній постановці залишались практично не дослідженими. Використані в роботі чисельні та аналітичні методи є математично обґрунтованими і таким, що довели свою надійність при розв'язку задач теорії оболонок. Вони не вимагають багато часу при розрахунках на ПК і можуть використовуватись при дослідженні міцності, стійкості та динаміки шаруватих циліндричних оболонок з композитних матеріалів в просторовій постановці.

Підсумовуючи можливо зауважити, що проблеми тривимірного розрахунку напружено-деформованого стану, коливань товстостінних і стійкості нетонких

конструктивно анізотропних циліндричних оболонок є недостатньо вивченими. З погляду на це, поставлені та розв'язані в дисертаційній роботі проблеми є важливими для розвитку розрахунків композитних конструкцій, а також актуальними й такими, що мають як наукові, так і прикладні значення.

РОЗДІЛ 1

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ХУ – ВАСІДЗУ В ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Варіаційні принципи ефективно використовуються для розв'язання задач теорії пружності чи будівельної механіки [1, 31, 46, 132, 206, 225, 292]. З їх допомогою будуються несуперечливі моделі розрахунку складних конструкцій при різних фізичних впливах. Широке використання в практиці розрахунку конструкцій чисельного методу кінцевих елементів також пов'язано з варіаційними принципами [1, 32, 46, 111, 132, 177]. У той же час, метод дискретної ортогональності розв'язання завдань теорії пружності з розділювальними змінними, основним етапом якого є розв'язок канонічної системи звичайних диференціальних рівнянь [31, 88, 89, 225], як відомо автору, лише в [31] пов'язується з варіаційним принципом. Відомо, що принцип Рейсснера являє собою гамільтонову форму принципу Лагранжа [206]. Сукупність необхідних умов стаціонарності в цьому випадку формулюється у вигляді системи рівнянь щодо частинних похідних першого порядку від компонентів вектора переміщень і тензора напружень. Привести цю систему до стандартного нормального вигляду можна тільки позбавившись залежності функцій від двох координат. Складнощі при отриманні канонічної системи виходячи з принципу Рейсснера будуть такими ж, як і без використання цього принципу, хоча логіка прийнятих рішень буде виглядати більш обґрунтованою [31, 171, 292]. Методи перетворення функціоналів [1, 35, 132, 206] дозволяють сформулювати такий з них, умови стаціонарності якого записуються у вигляді системи диференціальних рівнянь щодо обраних змінних. Після зменшення розмірності задачі, отримана система відразу набуває стандартного нормального вигляду. Зменшення її розмірності може бути виконано шляхом завдання виду розв'язку тривимірної задачі за двома координатами або ж шляхом попереднього використання гіпотез прикладних теорій.

При розв'язанні проблеми встановлення параметрів напружено-деформованого стану, вільних коливань товстостінної анізотропної циліндричної оболонки з матеріалу пружні властивості якого знаходяться в одній площині, скористаємось варіаційним принципом Ху – Васідзу [46] і за ним отримаємо систему рівнянь руху в тривимірній постановці у змішаній формі. В [189] при використанні принципу Ху – Васідзу отримані рівняння, що описують напружено-деформований стан товстостінної циліндричної оболонки.

1.1. Варіаційний принцип Ху – Васідзу при розв'язку задач теорії пружності оболонкових конструкцій

У відповідності до варіаційного принципу Ху – Васідзу [46] рівняння руху, співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу для динамічних задач:

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 \right\} dt. \quad (1.1)$$

Тут варіюються без додаткових умов переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} , напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами i, j коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j, k = 1, 2, 3$. Потенціальна енергія деформації у векторно-матричному представленні записується так

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T B \varepsilon, \quad (1.2)$$

тут $\varepsilon^T = (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{z\theta})$, B – матриця коефіцієнтів пружності.

Якщо ввести вектор $\sigma^T = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta})$, то з умови стаціонарності варіації функціоналу $\delta\Pi_1 = 0$ отримуємо рівняння:

$$\sigma = B\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u), \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0, \quad (1.5)$$

а також граничні умови $\sigma_{ij}n_j = \bar{F}_i$ на поверхні S_1 та умови $u_i = \bar{u}_i$ й напруження $p_i = \sigma_{ij}n_j$ на S_2 .

У співвідношеннях деформації (1.4) представлено взаємозв'язок між деформаціями та переміщеннями. При записі обернених до співвідношень пружності (1.3) залежностей деформацій від напружень, у відповідності до гіпотези Дюгамеля-Неймана врахуємо температурну дію на оболонку:

$$\varepsilon = A\sigma + g, \quad (1.6)$$

де матриця $A = B^{-1}$, вектор $g^T = (g_{zz}, g_{\theta\theta}, g_{rr}, g_{r\theta}, g_{rz}, g_{z\theta})$ характеризує температурну дію на конструкцію. Компоненти вектору g визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} g_{zz} &= \alpha_{zz}T; & g_{\theta\theta} &= \alpha_{\theta\theta}T; & g_{rr} &= \alpha_{rr}T; \\ g_{z\theta} &= \alpha_{z\theta}T; & g_{rz} &= \alpha_{rz}T; & g_{r\theta} &= \alpha_{r\theta}T. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тут α_{zz} , $\alpha_{\theta\theta}$, α_{rr} – коефіцієнти лінійного температурного розширення за напрямками z , θ , r відповідно, рис. 1.1; $\alpha_{z\theta}$, α_{rz} , $\alpha_{r\theta}$ – коефіцієнти лінійного температурного зсуву [133], T – температура, що відраховується від температури вихідного недеформованого стану.

Коефіцієнти матриці A (1.6) позначимо через a_{ij} , а матриці B (1.3) – b_{ij} ($i, j = \overline{1,6}$). Матриці A та B – симетричні, так як $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. В подальшому також встановимо взаємозв'язок між матрицями A та B .

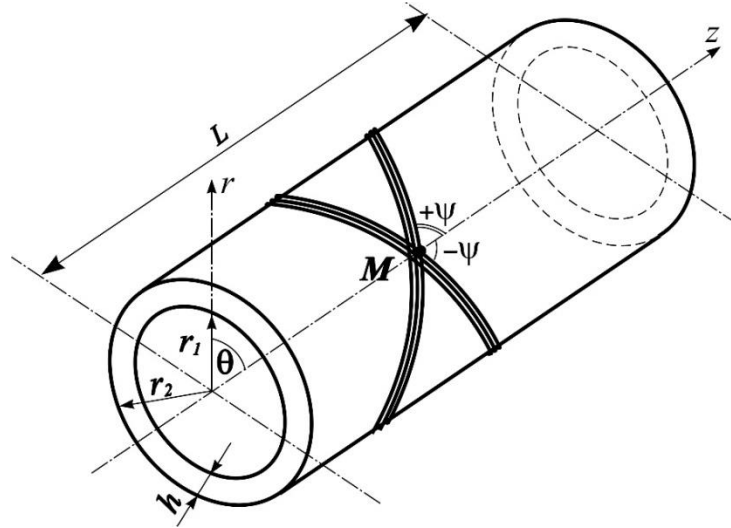


Рис. 1.1 Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

1.2. Модифікація змішаного варіаційного принципу Ху – Васідзу при виведенні системи рівнянь руху анізотропної циліндричної оболонки

Підемо шляхом, що представлений в [31, 189, 238], для виведення модифікованого до Ху – Васідзу змішаного варіаційного принципу та розділимо вектори σ , ε та g на дві частини так, щоб

$$\begin{aligned} \sigma_1^T &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}), & \sigma_2^T &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}), \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), & \varepsilon_2^T &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}). \\ g_1^T &= (g_{rr}, g_{r\theta}, g_{rz}), & g_2^T &= (g_{zz}, g_{\theta\theta}, g_{z\theta}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для скорочення записів співвідношення термопружності (1.6) та інші будемо записувати у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

де для блоків A_{ij} , згідно з прийнятим поділом (1.8) з матриці A в (1.6) для анізотропного матеріалу, пружні властивості якого знаходяться в одній площині, отримуємо:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \\ a_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

З матричної залежності $\varepsilon = A\sigma + g$, при використанні (1.9), отримуємо:

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2 + g_1, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2 + g_2, \quad (1.12)$$

після чого з (1.12) маємо вираз для

$$\sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1 - g_2A_{22}^{-1}. \quad (1.13)$$

Останній підставимо в (1.11) і тоді

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_{11}\sigma_1 + A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1 - A_{12}A_{22}^{-1}g_2 + g_1 = \\ &= A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 + (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\sigma_1 - A_{12}A_{22}^{-1}g_2 + g_1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

З (1.14) знайдемо σ_1

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \varepsilon_1 - (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 + \\ &+ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}g_2 - (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} g_1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

З матричної залежності

$$\sigma = B \cdot \varepsilon + G \quad (1.16)$$

запишемо

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

тут G_1, G_2 – матриці коефіцієнтів, що враховують температурну дію.

Для розглядуваного виду анізотропного матеріалу, маємо:

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2 + G_1, \quad (1.18)$$

$$\sigma_2 = B_{21} \cdot \varepsilon_1 + B_{22} \cdot \varepsilon_2 + G_2. \quad (1.19)$$

Співставляючи (1.16) та (1.15), встановимо зв'язок між матрицями

$$B_{11} = \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1}, \quad (1.20)$$

$$B_{12} = - \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}. \quad (1.21)$$

У вираз для σ_2 (1.13) підставимо (1.15) і тоді:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & -A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} \varepsilon_1 + \\ & + \left[A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \right] \varepsilon_2 + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} g_1 - \\ & - \left[A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \right] g_2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Згідно з (1.22) і (1.19) маємо такий зв'язок між матрицями

$$B_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1}, \quad (1.23)$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}. \quad (1.24)$$

З порівняння (1.15) та (1.22) з (1.18) та (1.19) відповідно отримаємо

$$G_1 = - \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} g_1 + \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} g_2, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} G_2 = & A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} g_1 - \\ & \left[A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \left(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \right)^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \right] g_2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Таким чином, виразами (1.20) і (1.21), (1.23) і (1.24) та (1.25) і (1.26) встановлено зв'язок між матрицями у двох формах запису (1.6) і (1.16) закону Гука при урахуванні температурної дії для прийнятого виду матеріалу.

Співставивши (1.25) з (1.20) та (1.21), а (1.26) з (1.23) та (1.24), запишемо

$$G_1 = -B_{11} \cdot g_1 - B_{12} \cdot g_2, \quad (1.27)$$

$$G_2 = -B_{21} \cdot g_1 - B_{22} \cdot g_2. \quad (1.28)$$

На відміну від принципу Ху – Васідзу прийнемо, що незалежними у функціоналі (1.1) будуть переміщення u_r , u_θ , u_z , деформації ε_{zz} , $\varepsilon_{z\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$ і напруження σ_{rr} , $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} . З рівнянь

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2 + G_1, \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21} \cdot \sigma_1 + A_{22} \cdot \sigma_2 + g_2 \quad (1.30)$$

знайдемо

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= B_{11}^{-1} \cdot \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \cdot \varepsilon_2 - B_{11}^{-1} G_1, \\ \sigma_2 &= A_{22}^{-1} \cdot \varepsilon_2 - A_{22}^{-1} A_{21} \cdot \sigma_1 - A_{22}^{-1} g_2.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Вираз для потенціала $W(e_{ij})$ в нових позначеннях приведемо до вигляду:

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^T B_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2). \quad (1.32)$$

З виразу (1.32), враховуючи (1.31), виключимо ε_1 . Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}W(\sigma_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{2} \left[\left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 - B_{11}^{-1} G_1 \right)^T B_{11} \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 - B_{11}^{-1} G_1 \right) + \right. \\ &+ \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 - B_{11}^{-1} G_1 \right)^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \left(B_{11}^{-1} \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2 - B_{11}^{-1} G_1 \right) + \\ &\left. + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2 \right].\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}W(\sigma_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - \frac{1}{2} G_1^T B_{11}^{-1 T} \sigma_1 - \\ &- \frac{1}{2} G_1 B_{11}^{-1 T} \sigma_1^T + \frac{1}{2} G_1^2 B_{11}^{-1}.\end{aligned}\quad (1.33)$$

Аналогічним чином перетворимо вираз $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$. Після співставлення матричних виразів

$$\varepsilon_1 = A_{11} \sigma_1 + A_{12} \sigma_2 \quad \text{та} \quad \sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2$$

неважко встановити, що $B_{12} B_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1} A_{12}$.

Тоді

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - \sigma_1^T B_{11}^{-1 T} G_1. \quad (1.34)$$

Виключивши з виразу $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)$ складову вектора напружень σ_2 , отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) &= (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - \\ &- (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1 T}) G_1.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Збираючи вирази (1.33÷1.35), запишемо потенціальну деформації $W(e_{ij})$

$$\begin{aligned}
W_1 = W(\sigma_1, \varepsilon_2) - \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) = & -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 + \\
& + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - \frac{1}{2} G_1^T B_{11}^{-1T} \sigma_1 - \\
& - \frac{1}{2} G_1 B_{11}^{-1T} \sigma_1^T + \frac{1}{2} G_1^2 B_{11}^{-1} - (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1T}) G_1. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

В (1.1) символом $T(u_i)$ представлена кінетична енергія. З погляду на прийняте позначення, запишемо її так

$$T(u_i) = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dr d\theta dz, \quad (1.37)$$

де \dot{u}_r , \dot{u}_θ , \dot{u}_z – швидкості в напрямку осей циліндричної системи координат r , θ , z (рис. 1.1), а ρ – щільність матеріалу з якого виготовлена конструкція.

Отримані рівняння є рівняннями руху, так як після варіювання (1.37) та інтегрування частинами за часом, отримаємо варіацію кінетичної енергії анізотропної оболонки

$$\delta T = \iint_{S_1} \rho [\dot{u}_r \delta \dot{u}_r + \dot{u}_\theta \delta \dot{u}_\theta + \dot{u}_z \delta \dot{u}_z] \Big|_{t_1}^{t_2} dS_1 - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho (\ddot{u}_r \delta u_r + \ddot{u}_\theta \delta u_\theta + \ddot{u}_z \delta u_z) dt \cdot dV. \quad (1.38)$$

Однак, при цьому слід врахувати, що було використано такі вирази для апроксимації переміщень [171]

$$u(r, \theta, z, t) = \rho \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (1.39)$$

та напружень

$$\sigma_1^T = \sigma_1^T \cdot e^{-i\omega t} = [\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}] \cdot e^{-i\omega t}. \quad (1.40)$$

В (1.39) та (1.40) ω є частотою вільних коливань анізотропної оболонки. Виконавши операцію диференціювання (1.39) за часом, отримаємо вирази для прискорень

$$\ddot{u}(r, \theta, z, t) = -\rho \omega^2 \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (1.41)$$

Також у відповідності до (1.1) запишемо потенціал поверхневих навантажень

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 = \iint_{S_1} [(q_r^- u_r + q_\theta^- u_\theta + q_z^- u_z, h_1, t) + \\ + (q_r^+ u_r + q_\theta^+ u_\theta + q_z^+ u_z, h_{n+1}, t)] dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Тут u_r, u_θ, u_z – переміщення, що співпадають з осями прийнятої циліндричної системи координат (рис. 1.1), h_1 та h_{n+1} – товщини першого та $n+1$ шарів оболонки, t – час.

Виконаємо також варіювання потенціалу поверхневих навантажень (1.42), після чого отримаємо варіацію роботи зовнішніх сил

$$\delta \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 = \iint_{S_1} (q_r \delta u_r + q_\theta \delta u_\theta + q_z \delta u_z) dS_1 + \iint_{S_2} \sum_{i=1}^3 p_i (\delta u_i - \delta \bar{u}_i) dS_2, \quad (1.43)$$

де $q_r = q_r^- + q_r^+$, $q_\theta = q_\theta^- + q_\theta^+$, $q_z = q_z^- + q_z^+$, а $p_i = 0$ для $i = \overline{1,3}$.

Запишемо кінцевий вигляд функціоналу Π_1 , що представлений в (1.1)

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V [W(\sigma_1, \varepsilon) - T(u_i)] dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS_2 \right\} dt. \quad (1.44)$$

Вираз для Π_1 являє собою частину функціоналу (1.1), так як у ньому замінена кількість незалежних величин, внаслідок виконання співвідношень (1.33) і умови $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$. Тоді варіація функціонала (1.44), що обумовлена зміною компонентів вектора переміщень u і напружень σ_1 , набирає вигляду

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[-\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2(u) B_{11}^T B_{12}^{-1}) \sigma_1 - \frac{1}{2} G_1^T B_{11}^{-1T} \sigma_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} G_1 B_{11}^{-1T} \sigma_1^T \right] \delta \sigma_1 - \left[\frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta \varepsilon_2 + \right. \\ \left. + \left[\varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 - (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1T}) G_1 \right] \delta u - T(u) \delta u \right\} dV + \\ \left. + \iint_{S_1} (\Psi(u) \delta u) dS_1 - \iint_{S_2} p_i(u - \bar{u}) \delta p dS_2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В подальшому використаємо лінійні геометричні співвідношення, що приведені в [153]:

$$e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\theta^i + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \quad (1.46)$$

Тут e_{rr}^i – відносні лінійні деформації за напрямком координатної осі r , а e_{rz}^i , $e_{r\theta}^i$ – дотичні до відповідних координатних поверхонь відносні зсувні деформації.

З умови стаціонарності (1.45), при використанні виразів для напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$, переміщень $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$, геометричних співвідношень (1.46), залежностей для варіації кінетичної енергії (1.38), (1.39), (1.40), (1.41), а також варіації роботи зовнішніх сил (1.43) і прирівнювання виразів при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ і переміщень δu_r , δu_θ , δu_z в інтегралі за об'ємом V до нуля, отримуємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i}{r} \alpha_{zz}^i T - \frac{c_{22}^i}{r} \alpha_{\theta\theta}^i T - \frac{c_{26}^i}{r} \alpha_{z\theta}^i T + \rho^i \omega^2 u_r + q_r; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\ &+ \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \rho^i \omega^2 u_z + q_z; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\ &+ c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_\theta + q_\theta; \\ \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \alpha_{rr}^i T - \\ &- a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{zz}^i T - a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{zz}^i T - a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - \\ &- a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{zz}^i T - a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{z\theta}^i T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \alpha_{rz}^i T; \\ \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i + \alpha_{r\theta}^i T.\end{aligned}\quad (1.47)$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$ – компоненти тензора напружень (1.8); u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення точок кожного i -го шару оболонки за напрямками відповідно осей циліндричної системи координат z , θ , r рис. 1.1; ω – є частотою вільних коливань; ρ^i – щільність матеріалу з якого виготовлений i -й шар конструкції; q_r , q_z , q_θ – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній r , z , θ ; α_{zz} , $\alpha_{\theta\theta}$, α_{rr} – коефіцієнти лінійного температурного розширення за напрямками z , θ , r відповідно; $\alpha_{z\theta}$, α_{rz} , $\alpha_{r\theta}$ – коефіцієнти лінійного температурного зсуву [133], T – температура, що відрховується від температури вихідного недеформованого стану. Сталі c_{kl}^i ($k, l = 1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i [10, 134] матеріалу оболонки:

$$\begin{aligned}c_{11}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{22}^i a_{66}^i - a_{26}^i{}^2); & c_{12}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i); \\ c_{22}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{66}^i - a_{16}^i{}^2); & c_{16}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i); \\ c_{26}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i); & c_{66}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^i{}^2); \\ |A_{22}^i| &= a_{66}^i (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^i{}^2) + a_{26}^i (a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i) + a_{16}^i (a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i); \\ c_{13}^i &= a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; & c_{23}^i &= a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i; \\ c_{36}^i &= a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; & c_{33}^i &= a_{33}^i - (a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i).\end{aligned}\quad (1.48)$$

Таким чином, при використанні варіаційного рівняння (1.45) виведена тривимірна система руху лінійної теорії пружності (1.47) з шести неоднорідних диференціальних рівнянь. Вона записана в частинних похідних, відносно шести компонентів векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ та може бути також застосована для розрахунку напружено-деформованого стану від силової та температурної дії, а також знаходження частот вільних коливань анізотропної шаруватої товстостінної композитної циліндричної оболонки. Головна відмінність отриманої системи рівнянь від представлених в літературі, наприклад [81, 82, 83, 86-88] в тому, що вона є системою неоднорідних диференціальних рівнянь руху. Для її виведення було використано модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу. З неї може бути встановлено напружено-деформований стан, частоти вільних коливань в тривимірній постановці товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки.

Розв'язок системи (1.47) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_r^0(z); \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_z^0(z); \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_\theta^0(z);$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_z^n(z); \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_\theta^n(z). \quad (1.49)$$

Умовам на торцях при $z = 0, z = L$ (рис. 1.1), наприклад

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (1.50)$$

Та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i), \end{aligned} \quad (1.51)$$

де i – номер шару оболонки.

Умови (1.45) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкої з неї [86]. В (1.49) $q_r^0(z), q_r^n(z)$ – розподілений на бокових поверхнях оболонки внутрішній та зовнішній тиск відповідно.

1.3 Висновки до розділу 1

В розділі при використанні варіаційного рівняння (1.45) виведена тривимірна система (1.47) з шести неоднорідних диференціальних рівнянь лінійної теорії пружності. Вона записана в частинних похідних відносно шести компонентів амплітудних значень векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ для визначення параметрів напружено-деформованого стану та частот вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки. Для її отримання було використано модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, що дозволяє також записувати відповідні рівнянням граничні умови. За використанням рівнянь (1.47) і відповідних ним граничних умов можуть бути встановлені величини напружень і переміщень від силової та температурної дії, а також частоти вільних коливань в тривимірній постановці товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки.

РОЗДІЛ 2

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ ПРУЖНИХ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ ВІД СИЛОВОЇ ДІЇ

2.1. Розв'язуюча система рівнянь, що описує напружено-деформований стан товстостінних пружних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок від силової дії

Для розв'язку задачі про напружено-деформований стан (НДС) від силової дії шаруватих анізотропних товстостінних оболонкових конструкцій в просторовій постановці використаємо систему рівнянь (1.47), знехтувавши доданками, що враховують температурну дію та частоту вільних коливань. Тоді для кожного i -го шару анізотропної композитної циліндричної оболонки система (1.47) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\
 &+ \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + q_r; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\
 &+ \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + q_z; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\
 &+ c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + q_\theta; \\
 \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$ – компоненти тензора напружень (1.8); u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення точок кожного i -го шару оболонки за напрямками осей циліндричної системи координат z , θ , r відповідно. Сталі c_{kl}^i ($k, l = 1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються згідно (1.48).

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями такі [153]:

$$\begin{aligned}e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & e_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; & e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; & e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Співвідношення закону Гука, без урахування доданків, що враховують температурну дію, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії, запишемо у вигляді оберненому до (1.9) з використанням позначень (1.48):

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; & e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Використовувана модель матеріалу для розглядуваних циліндричних оболонок характеризується однією площиною пружної симетрії. Такий тип анізотропії обумовлений неспівпаданням головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу з геометричними осями циліндричної оболонки (рис. 1.1).

Зв'язок між пружними константами матеріалу кожного i -го шару з однією площиною пружної симетрії a_{nm}^i ($n, m = \overline{1,6}$) та пружними сталими ортотропного матеріалу $a_{nm}^{i'}$ ($n, m = \overline{1,6}$) такий [134]:

$$\begin{aligned}
a_{11}^i &= a_{11}^{i'} \cos^4 \psi^i + (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i + a_{22}^{i'} \sin^4 \psi^i; \\
a_{22}^i &= a_{22}^{i'} \cos^4 \psi^i + (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i + a_{11}^{i'} \sin^4 \psi^i; \\
a_{12}^i &= a_{12}^{i'} + (a_{11}^{i'} + a_{22}^{i'} - 2a_{12}^{i'} - a_{66}^{i'}) \sin^2 \psi^i \cos^2 \psi^i; \\
a_{66}^i &= a_{66}^{i'} + 4(a_{11}^{i'} + a_{22}^{i'} - 2a_{12}^{i'} - a_{66}^{i'}) \cos^2 \psi^i \sin^2 \psi^i; \\
a_{16}^i &= [2a_{22}^{i'} \sin^2 \psi^i - 2a_{11}^{i'} \cos^2 \psi^i + (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) (\cos^2 \psi^i - \sin^2 \psi^i)] \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
a_{26}^i &= [2a_{22}^{i'} \cos^2 \psi^i - 2a_{11}^{i'} \sin^2 \psi^i - (2a_{12}^{i'} + a_{66}^{i'}) (\cos^2 \psi^i - \sin^2 \psi^i)] \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
a_{13}^i &= a_{13}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{23}^{i'} \sin^2 \psi^i; \quad a_{23}^i = a_{23}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{13}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
a_{36}^i &= 2(a_{23}^{i'} - a_{13}^{i'}) \cos \psi^i \sin \psi^i; \quad a_{33}^i = a_{33}^{i'}; \quad a_{44}^i = a_{44}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{55}^{i'} \sin^2 \psi^i; \\
a_{55}^i &= a_{55}^{i'} \cos^2 \psi^i + a_{44}^{i'} \sin^2 \psi^i; \quad a_{45}^i = (a_{44}^{i'} - a_{55}^{i'}) \cos \psi^i \sin \psi^i.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Тут кут ψ^i – кут повороту головних напрямів пружності матеріалу i -го шару до напрямку меридіану оболонки (рис. 1.1).

Приймемо також, що при розв'язку задачі (2.1) між i -м та $i+1$ -м шарами виконуються умови (1.51) їх жорсткого контакту без відриву та проковзування:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{rz}^i(r_i) = \tau_{rz}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{r\theta}^i(r_i) = \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); \quad u_z^i(r_i) = u_z^{i+1}(r_i); \quad u_\theta^i(r_i) = u_\theta^{i+1}(r_i).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Розв'язок системи (2.1) має задовольняти умовам на бокових поверхнях відповідно до (1.49) при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_r^0(z); \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_z^0(z); \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = \pm q_\theta^0(z)$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_z^n(z); \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_\theta^n(z). \tag{2.6}$$

В (2.6) $q_r^0(z)$, $q_r^n(z)$, $q_z^0(z)$, $q_z^n(z)$, $q_\theta^0(z)$, $q_\theta^n(z)$ – навантаження, що розподілене на внутрішній – 0 і зовнішній – n поверхнях оболонки.

При реалізації задачі (2.1) граничні умови на торцях оболонки для $z = 0$ та $z = L$ (рис. 1.1) прийматимемо у вигляді [83, 86]. В просторовій теорії пружності для циліндричної оболонкової конструкції можливі такі типи умов на торцях:

1. Наявність на торцях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкій з неї

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0; \quad (2.7)$$

2. Наявність на торцях циліндра осьових напружень σ_{zz} , розподілених таким чином, що торець залишається плоским:

$$\tau_{rz}^i = \tau_{z\theta}^i = u_z^i = 0; \quad (2.8)$$

3. Дія осьових і дотичних напружень при якій торці не зміщуються в осьовому напрямку та не закручуються:

$$\tau_{rz}^i = u_z^i = u_\theta^i = 0; \quad (2.9)$$

4. Дія поперечних дотичних напружень розподілених так, що торці не мають зміщень в радіальному напрямку:

$$\sigma_{zz}^i = \tau_{z\theta}^i = u_r^i = 0. \quad (2.10)$$

2.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови розв’язку задачі про деформування товстостінних пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під дією розподіленого бокового тиску

В цьому підрозділі розглянемо анізотропні циліндричні оболонки, що знаходяться під дією розподіленого, на бокових поверхнях оболонки, внутрішнього або зовнішнього тиску, рис.2.1.

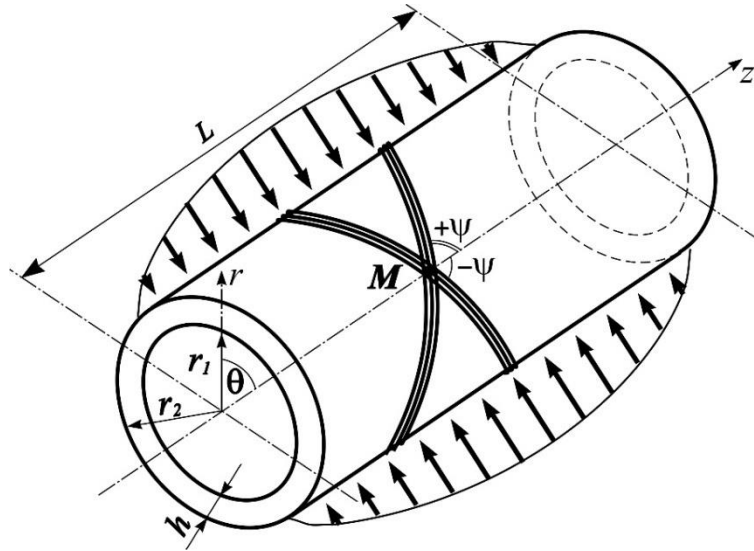


Рис. 2.1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка під дією розподіленого бокового тиску.

Зауважимо, що розв'язок задач НДС циліндричних оболонок, під розподіленим боковим тиском, анізотропія шарів яких обумовлена утворенням однієї площини пружної симетрії для граничних умов (2.9), (2.10) представлений в [83, 86], а для умов (2.7), (2.8) вперше приведено в цій роботі.

Для розв'язку тривимірної системи рівнянь (2.1) для граничних умов на поверхнях (2.6) і торцях (2.7) циліндричної оболонки, скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в подвійні тригонометричні ряди [86] за координатою вздовж твірної циліндра z та коловою координатою θ так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (2.6) та (2.7):

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z;$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z;$$

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y'_{4,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$u_z(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5,pk}(r) \cos k\theta + y'_{5,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z;$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6,pk}(r) \sin k\theta + y'_{6,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z. \quad (2.11)$$

Тут $y_{i,pk}, y'_{i,mk}$ ($i = \overline{1,6}$) – коефіцієнти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки: $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, u_r, u_z, u_\theta$, а p, m, k – хвильові числа в цих рядах. Параметр $l_m = m\pi/L$, де L – довжина твірної циліндра (рис. 2.1).

Однією з цілей даної роботи є дослідження стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці під сталим в коловому напрямку навантаженням. При цьому до моменту втрати стійкості докритичний напружено-деформований стан циліндричних оболонок є вісесиметричним і компоненти НДС є сталими за коловою координатою. З урахуванням цього, після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (2.1) за допомогою співвідношень (2.11), отримуємо для кожного i -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r)\bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = \overline{1,12}), \quad (2.12)$$

де $\bar{y}^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}\}$ – розв'язуюча вектор-функція, $T^i(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргумента r .

До системи рівнянь (2.12) необхідно приєднати відповідні неоднорідні рівняння, що описують граничні умови на поверхнях оболонки:

$$B_1 \bar{y}(r) = b_1; \quad r = r_1; \quad (2.13)$$

$$B_2 \bar{y}(r) = b_2; \quad r = r_2. \quad (2.14)$$

Тут B_1, B_2 – матриці розміром 6×12 , що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (2.6), а b_1, b_2 – вектори, що

записуються при урахуванні діючих зовнішніх навантажень на поверхнях оболонки (2.6).

Ненульові елементи матриці $T^i(r)$, вони ж коефіцієнти при невідомих системи (2.12), $t_{n,l}^i(r)$ записуються так:

$$\begin{aligned}
t_{1,1}^i &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r}, & t_{1,2}^i &= l_p, & t_{1,4}^i &= \frac{c_{22}^i}{r^2}, & t_{1,5}^i &= -l_p \frac{c_{12}^i}{r}, & t_{1,12}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}^i}{r} l_m, \\
t_{2,1}^i &= c_{13}^i l_p, & t_{2,2}^i &= -\frac{1}{r}, & t_{2,4}^i &= -\frac{c_{12}^i}{r} l_p, & t_{2,5}^i &= c_{11}^i l_p^2, & t_{2,12}^i &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) c_{16}^i l_m^2, \\
t_{3,3}^i &= -\frac{2}{r}, & t_{3,6}^i &= c_{66}^i l_p^2, & t_{3,7}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36}^i l_m, & t_{3,10}^i &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}^i}{r} l_m, \\
t_{3,11}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{16}^i l_m^2, & t_{4,1}^i &= c_{33}^i, & t_{4,4}^i &= \frac{c_{23}^i}{r}, & t_{4,5}^i &= -c_{13}^i l_p, \\
t_{4,12}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36}^i l_m, & t_{5,2}^i &= a_{55}^i, & t_{5,4}^i &= -l_p, & t_{5,9}^i &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}^i, & t_{6,3}^i &= a_{44}^i, \\
t_{6,6}^i &= \frac{1}{r}, & t_{6,8}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}^i, & t_{7,6}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}^i}{r} l_m, & t_{7,7}^i &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r}, \\
t_{7,8}^i &= l_p, & t_{7,10}^i &= \frac{c_{22}^i}{r^2}, & t_{7,11}^i &= -l_p \frac{c_{12}^i}{r}, & t_{8,6}^i &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{c_{26}^i}{r} l_m, & t_{8,7}^i &= c_{13}^i l_p, \\
t_{8,8}^i &= -\frac{1}{r}, & t_{8,10}^i &= -\frac{c_{12}^i}{r} l_p, & t_{8,11}^i &= c_{11}^i l_p^2, & t_{9,1}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36}^i l_m, \\
t_{9,4}^i &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}^i}{r} l_m, & t_{9,5}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{16}^i l_m^2, & t_{9,9}^i &= -\frac{2}{r}, & t_{9,12}^i &= c_{66}^i l_p^2, \\
t_{10,6}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36}^i l_m, & t_{10,7}^i &= c_{33}^i, & t_{10,10}^i &= \frac{c_{23}^i}{r}, & t_{10,11}^i &= -c_{13}^i l_p, \\
t_{11,3}^i &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}^i, & t_{11,8}^i &= a_{55}^i, & t_{11,10}^i &= -l_p, & t_{12,2}^i &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}^i, \\
t_{12,9}^i &= a_{44}^i, & t_{12,12}^i &= \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Тут $l_m = \frac{m\pi}{L}$; $l_p = \frac{p\pi}{L}$; L – довжина твірної циліндричної оболонки; p, m – хвильові числа в рядах Фур’є (2.11). Функції $\varphi(p, m)$ та $\varphi(m, p)$ залежать від цілих числових параметрів p та m і визначаються формулами:

$$\varphi(p, m) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{p - m} + \frac{1}{p + m} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне число,} \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\varphi(m, p) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{m - p} + \frac{1}{m + p} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне число.} \end{cases}$$

Система (2.12), разом з граничними умовами на поверхнях перпендикулярних напрямку інтегрування (2.13) та (2.14), дозволяє визначати функції, що описують напружено-деформований стан оболонки (2.11) $y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i'}; y_{2,m}^{i'}; y_{3,m}^{i'}; y_{4,m}^{i'}; y_{5,m}^{i'}; y_{6,m}^{i'}$ за її товщиною.

Після розв’язку системи (2.12), визначення компонентів напружень $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i$ та переміщень u_r^i, u_z^i, u_θ^i проведемо при використанні тригонометричних рядів (2.11). Так, для компоненти НДС за товщиною r , яку необхідно знайти, слід підставити відповідні значення розкладу $y_{i,pk}, y_{i,mk}^{\prime}$ ($i = \overline{1,6}$) в залежності (2.11). А замість z використати координату за твірною циліндра $0 \leq z \leq L$ в якій слід вирахувати величину компонента НДС.

Напруження $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$ та $\tau_{z\theta}^i$ виразимо через розв’язуючі функції закону Гука (2.3), підставивши в нього залежності (2.2) так:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Розглянемо також варіант граничних умов (2.9). При цих умовах, для

розв'язку системи (2.1) скористаємось таким розкладом параметрів напружено-деформованого стану [86] в подвійні тригонометричні ряди:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
\tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
\tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь, з урахуванням симетрії компонентів НДС в коловому напрямку, для граничних умов (2.9) отримаємо у вигляді (2.12), але з видозміненими у відповідності до (2.18) ненульовими елементами матриці $T(r)$. До цієї системи необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови закріплення поверхонь оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування (2.13) та (2.14).

Ненульові елементи матриці $T(r)$ для граничних умов (2.9) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
t_{1,1} &= -\frac{c_{23} + 1}{r}, & t_{1,2} &= -l_p, & t_{1,4} &= \frac{c_{22}}{r^2}, & t_{1,5} &= l_p \frac{c_{12}}{r}, & t_{1,6} &= \frac{c_{26}}{r} l_p, \\
t_{2,1} &= -c_{13} l_p, & t_{2,2} &= -\frac{1}{r}, & t_{2,4} &= \frac{c_{12}}{r} l_p, & t_{2,5} &= c_{11} l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2}, \\
t_{2,6} &= c_{16} l_p^2 + k^2 \frac{c_{26}}{r^2}, & t_{3,1} &= -c_{36} l_p, & t_{3,4} &= \frac{c_{26}}{r} l_p, & t_{3,5} &= c_{16} l_p^2 + \frac{c_{26}}{r^2} k^2, \\
t_{3,6} &= c_{66} l_p^2 + \frac{c_{22}}{r^2} k^2, & t_{4,1} &= c_{33}, & t_{4,4} &= -\frac{c_{23}}{r}, & t_{4,5} &= -c_{13} l_p, & t_{4,6} &= c_{36} l_p, \\
t_{5,2} &= a_{55}, & t_{5,3} &= a_{45}, & t_{5,4} &= l_p, & t_{6,2} &= a_{45}, & t_{6,3} &= a_{44}, & t_{6,6} &= \frac{1}{r}. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

У випадку, коли для циліндричної оболонки при $z = 0$ мають місце умови

(2.7), а при $z = L$ - умови (2.8) то розв'язок представляється у вигляді (2.11), де

$$l_m = m\pi/2L, l_p = p\pi/2L.$$

Подібним чином отримуємо розв'язок системи (2.1) якщо при $z = 0$ мають місце умови (2.9), а при $z = L$ - умови (2.10). Тут розв'язок представимо у вигляді (2.18) з урахуванням, що $l_m = m\pi/2L, l_p = p\pi/2L$.

2.3. Застосування методу прямих для побудови чисельного розв'язку задачі про вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску, крутного моменту в просторовій постановці

2.3.1. Вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску

Для розв'язку задачі про напружено-деформований стан циліндричних шаруватих оболонок з анізотропного матеріалу з однією площиною пружної симетрії під дією осьової сили, рис. 2.2, використаємо розв'язуючу систему рівнянь (2.1).

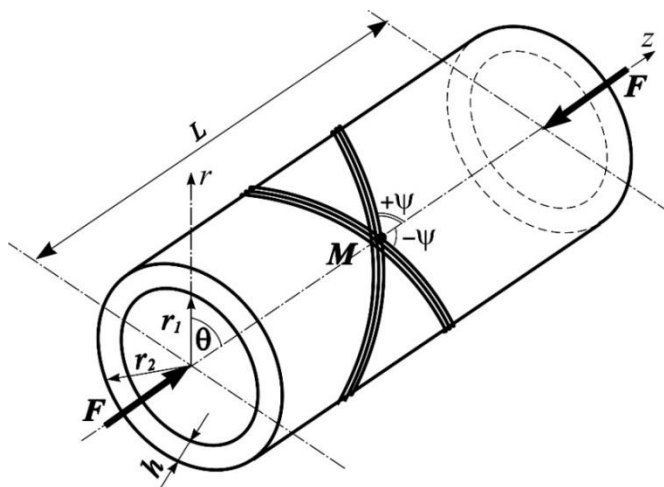


Рис. 2.2. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка під дією осьового тиску.

Розв'язок системи (2.1) отримаємо, використовуючи такі граничні умови:

- на внутрішній ($r = r_1$) і зовнішньої ($r = r_2$) поверхнях оболонки

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \quad (2.20)$$

- на торцях

$$\sigma_{zz}^i = \sigma_{zz}^j, \quad u_r^i = u_\theta^i = 0, \quad (2.21)$$

де σ_{zz}^j – напруження на торцях циліндра, що відповідають осьовій стискаючій силі.

Для розв'язку системи (2.1) і визначення компонентів НДС оболонок, введемо вектор $\bar{N}^i = \{\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, u_r^i, u_z^i, u_\theta^i\}^T$. Діючи у припущенні, що докритичний напружено-деформований стан є вісесиметричним, перетворимо систему неоднорідних диференціальних рівнянь в частинних похідних (2.1) в розв'язуючу систему диференціальних рівнянь в частинних похідних в векторній формі:

$$\frac{d\bar{N}^i}{dr} = F^i \left(r, z^i, \bar{N}^i, \frac{\partial \bar{N}^i}{\partial z}, \frac{\partial^2 \bar{N}^i}{\partial z^2} \right). \quad (2.22)$$

Компоненти вектора $F^i = \{f_1^i, f_2^i, f_3^i, f_4^i, f_5^i, f_6^i\}^T$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_1^i &= \frac{c_2^i - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{b_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} - q_r^i; \\ f_2^i &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - q_z^i; \\ f_3^i &= -\frac{c_2^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - c_3^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{b_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - q_\theta^i; \\ f_4^i &= c_4^i \sigma_{rr}^i - \frac{c_2^i}{r} u_r^i - c_1^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - c_3^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}; \\ f_5^i &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\ f_6^i &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + \frac{1}{r} u_\theta^i. \end{aligned} \quad (2.23)$$

До системи рівнянь (2.22) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 N(r, z) = 0; \quad r = r_1; \quad (2.24)$$

$$B_2 N(r, z) = 0; \quad r = r_2, \quad (2.25)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці розміру 3×6 , що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (2.6).

Одним з підходів, який дозволяє розв'язати двовимірну систему (2.22) шляхом її приведення до одновимірної є метод прямих [37, 195], що ґрунтується на використанні скінченно-різницевої моделі. Відповідно до нього, система (2.22) приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом заміни похідних за координатою z різницевиими співвідношеннями. Для цього розбиваємо інтервал зміни похідних за координатою z на $n-1$ рівних відрізків за допомогою n рівновіддалених точок, тобто

$$\frac{\partial x(r, z_j)}{\partial z} \approx \frac{1}{2(z_{j+1} - z_j)} (x(r, z_{j+1}) - x(r, z_{j-1}));$$

$$\frac{\partial^2 x(r, z_j)}{\partial z^2} \approx \frac{1}{(z_{j+1} - z_j)^2} (x(r, z_{j+1}) - 2x(r, z_j) + x(r, z_{j-1})). \quad (2.26)$$

Тут x – компоненти напружено-деформованого стану системи (2.22); $j = n$ – кількість рівновіддалених перерізів, якими розбивається оболонка вздовж твірної.

Розв'язання завдання про напружено-деформований стан товстостінного циліндра від дії осьового тиску зводиться до відшукування невідомих $\sigma_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, u_r^i, u_z^i, u_\theta^i$ в кожному перерізі. А співвідношення (2.22) перетворюються в систему порядку $6n$ звичайних диференціальних рівнянь відносно похідної за координатою r

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r, n)\bar{y}^i. \quad (2.27)$$

Тут прийнято: $\bar{y}^i = \left\{ \sigma_{rr}^{i1}; \tau_{rz}^{i1}; \tau_{r\theta}^{i1}; u_r^{i1}; u_z^{i1}; u_\theta^{i1}; \dots; \sigma_{rr}^{ij}; \tau_{rz}^{ij}; \tau_{r\theta}^{ij}; u_r^{ij}; u_z^{ij}; u_\theta^{ij}; \dots; \right.$

$\left. \sigma_{rr}^{in}; \tau_{rz}^{in}; \tau_{r\theta}^{in}; u_r^{in}; u_z^{in}; u_\theta^{in} \right\}^T$; $j = \overline{1, n}$ – кількість рівновіддалених перерізів, якими

розбивається оболонка вздовж довжини, $T^i(r)$ – матриця коефіцієнтів при невідомих компонентах напружень і переміщень.

До системи рівнянь (2.27) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$C_1 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_1; \quad (2.28)$$

$$C_2 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_2, \quad (2.29)$$

де C_1, C_2 – матриці розміру $3n \times 6n$, що мають діагонально-кліткову структуру з матрицями B_1, B_2 (2.24), (2.25) на діагоналях відповідно.

Граничні умови за координатою z – на торцях циліндра задамо відповідно до умов (2.21), де в законтурних точках (верхній індекс 0) напруження та переміщення виражаються, згідно з (2.20), таким чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{i0} = -\sigma_{rr}^{i2}; \quad \tau_{rz}^{i0} = \tau_{rz}^{i2}; \quad \tau_{r\theta}^{i0} = -\tau_{r\theta}^{i2}; \quad u_r^{i0} = -u_r^{i2}; \quad u_\theta^{i0} = -u_\theta^{i2}, \\ \sigma_{rr}^{in+1} = -\sigma_{rr}^{in-1}; \quad \tau_{rz}^{in+1} = \tau_{rz}^{in-1}; \quad \tau_{r\theta}^{in+1} = -\tau_{r\theta}^{in-1}; \quad u_r^{in+1} = -u_r^{in-1}; \quad u_\theta^{in+1} = -u_\theta^{in-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Напруження σ'_{zz} на торцях задамо використовуючи перше рівняння (2.3) з урахуванням (2.2). Виразимо законтурний переріз методу прямих для переміщення u_z через σ'_{zz} таким чином:

$$\begin{aligned} u_z^{i0} = u_z^{i2} + \frac{c_{16}^i}{c_{11}^i} (u_\theta^{i2} - u_\theta^{i0}) - \frac{2(z_2 - z_1)}{c_{11}^i} \sigma'_{zz}; \\ u_z^{in+1} = u_z^{in-1} + \frac{c_{16}^i}{c_{11}^i} (u_\theta^{in-1} - u_\theta^{in+1}) - \frac{2(z_{n-1} - z_n)}{c_{11}^i} \sigma'_{zz}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Після розв'язку системи (2.27) докритичні значення напружень $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i$ і $\tau_{z\theta}^i$ в довільній точці оболонки визначаються відповідно до закону Гука в формі (2.17):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\
\tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i.
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

2.3.2. Вісесиметричне деформування пружних товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту)

Для розв'язку задачі про напружено-деформований стан циліндричних шаруватих оболонок з анізотропних матеріалів з однією площиною пружної симетрії під дією крутного моменту S (рис. 2.3) використаємо розв'язуючу систему диференціальних рівнянь (2.1).

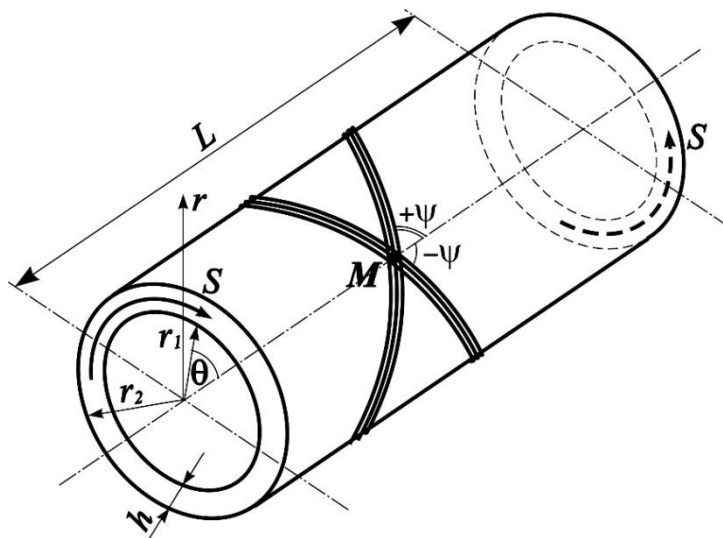


Рис. 2.3. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка під дією кручення.

Розв'язок системи (2.1) отримаємо використовуючи граничні умови:
- на внутрішній ($r = r_1$) і зовнішній ($r = r_2$) поверхнях оболонки

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \tag{2.33}$$

- на торцях

$$\tau_{z\theta}^i = \tau_{z\theta}^i, \quad \tau_{rz}^i = u_z^i = 0, \tag{2.34}$$

де $\tau'_{z\theta}$ – напруження на торцях циліндра, що відповідають крутному моменту.

Для розв'язку такої задачі використовуємо алгоритм методу прямих описаний у попередньому пункті. Маємо розв'язуючу систему (2.27) з умовами (2.28) та (2.29) на поверхнях оболонки перпендикулярних напрямку інтегрування із $T^i(r)$ – матрицею коефіцієнтів при невідомих компонентах напружень і переміщень для випадку кручення. Граничні умови по координаті z – на торцях циліндра задамо відповідно до умов (2.34), де в законтурних точках напруження та переміщення виражаються так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{i0} &= \sigma_{rr}^{i2}; & \tau_{rz}^{i0} &= -\tau_{rz}^{i2}; & \tau_{r\theta}^{i0} &= \tau_{r\theta}^{i2}; & u_r^{i0} &= u_r^{i2}; & u_z^{i0} &= -u_z^{i2}, \\ \sigma_{rr}^{in+1} &= \sigma_{rr}^{in-1}; & \tau_{rz}^{in+1} &= -\tau_{rz}^{in-1}; & \tau_{r\theta}^{in+1} &= \tau_{r\theta}^{in-1}; & u_r^{in+1} &= u_r^{in-1}; & u_z^{in+1} &= -u_z^{in-1}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Напруження $\tau'_{z\theta}$ на торцях задамо згідно третього рівняння закону Гука (2.3) з урахуванням (2.2). Виразимо законтурний переріз методу прямих для переміщення u_θ через $\tau'_{z\theta}$ так:

$$\begin{aligned} u_\theta^{i0} &= u_\theta^{i2} + \frac{c_{16}^i}{c_{66}^i} (u_z^{i2} - u_z^{i0}) + 2(z_1 - z_0) \frac{c_{26}^i}{rc_{66}^i} u_r^{i1} + 2(z_1 - z_0) \frac{c_{36}^i}{c_{66}^i} \sigma_{rr}^{i1} - \frac{2(z_1 - z_0)}{c_{66}^i} \tau'_{z\theta}; \\ u_\theta^{in+1} &= u_\theta^{in-1} + \frac{c_{16}^i}{c_{66}^i} (u_z^{in-1} - u_z^{in+1}) + 2(z_{n-1} - z_n) \frac{c_{26}^i}{rc_{66}^i} u_r^{in} + \\ &+ 2(z_{n-1} - z_n) \frac{c_{36}^i}{c_{66}^i} \sigma_{rr}^{in} - \frac{2(z_{n-1} - z_n)}{c_{66}^i} \tau'_{z\theta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Після розв'язку системи (2.27) докритичні значення напружень σ_{zz}^i , $\sigma_{\theta\theta}^i$ і $\tau_{z\theta}^i$ в довільній точці оболонки визначаються відповідно до закону Гука в формі (2.17):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.4. Застосування чисельного методу дискретної ортогоналізації до побудови методики розв'язку рівнянь про напружено-деформований стан пружних анізотропних циліндричних оболонок

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружено-деформований стан товстостінної циліндричної оболонки проводилась при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [38, 59, 88, 89].

Як відомо, метод дискретної ортогоналізації, дає змогу здобувати чисельні розв'язки крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Суть методу полягає у тому, що весь інтервал інтегрування розбивають на ділянки, на кожній з них проводять чисельне інтегрування вихідного диференціального рівняння [38]. Довжини ділянок вибирають такими, щоб в межах однієї ділянки розв'язки однорідного рівняння залишились лінійно незалежними. При переході від ділянки до ділянки над матрицею розв'язків здійснюються лінійні перетворення, щоб вектори часткових розв'язків однорідного чи неоднорідного рівняння були ортогональними. Таким чином вдається зберегти лінійну незалежність розв'язків на всьому інтервалі інтегрування. Крім того, щоб запобігти надзвичайному збільшенню чисельних значень розв'язків, на границях ділянок вводять нормуючі множники.

Нехай маємо лінійну крайову задачу:

$$\frac{dy}{dr} = A(r)y(r) + f(r) \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \quad (2.38)$$

$$B_1 y(r_1) = b_1, \quad B_2 y(r_2) = b_2, \quad (2.39)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_{12})^T$; $f = (f_1, f_2, \dots, f_{12})^T$; B_1, B_2 – задані прямокутні матриці розмірності $k \times l$ і $m \times l$ ($k < l$, $m = l - k$, $m \leq k$) відповідно; b_1, b_2 – задані вектори.

Розв'язок крайової задачі (2.38), (2.39) будемо шукати у вигляді:

$$y(r) = \sum_{j=1}^m c_j y_j(r) + y_{m+1}(r). \quad (2.40)$$

Вектор–функція $y_j(r)$ ($j=1,2,\dots,m$) є розв’язком задачі Коші для системи рівнянь (2.38) при $f(r)=0$ і $b_1=0$, а вектор–функція $y_{m+1}(r)$ – розв’язком задачі Коші для системи (2.40), який задовольняє неоднорідні граничні умови в точці $r=r_1$.

Розіб’ємо відрізок $r_1 \leq r \leq r_2$ на частини точками інтегрування r_i ($i=0,1,2,\dots,N$). Серед цих точок виберемо точки R_i ($i=0,1,2,\dots,M$), які назвемо точками ортогоналізації. Вибір таких точок, як правило, зумовлений ступенем необхідної точності розв’язку задачі.

Метод дискретної ортогоналізації складається з прямого і зворотного ходів. Нехай в точці R_i при прямому ході з допомогою, наприклад, методу Рунге–Кутта знайдені розв’язки $m+1$ задач Коші, котрі позначимо через $u_s(R_i)$ ($s=1,2,\dots,m+1$). Проортоновуємо вектори $u_1(R_i), u_2(R_i), \dots, u_m(R_i)$ в цій точці і позначимо їх $x_1(R_i), x_2(R_i), \dots, x_m(R_i)$. Вектори $x_s(R_i)$ виражаються через $u_s(R_i)$ наступним чином:

$$x_s = \frac{1}{\omega_{ss}} \left[u_s - \sum_{j=1}^{s-1} \omega_{sj} x_j \right], \quad (2.41)$$

де:

$$\omega_{sj} = (u_s, x_j) \quad (j < s), \quad \omega_{ss} = \sqrt{(u_s, u_s) - \sum_{j=1}^{s-1} \omega_{sj}^2}. \quad (2.42)$$

Тут (a,b) – означає скалярний добуток векторів a і b ; вектор x_{m+1} не нормується і вираховується за формулою:

$$x_{m+1} = u_{m+1} - \sum_{j=1}^m \omega_{m+1,j} x_j. \quad (2.43)$$

Із формул (2.41), (2.43) можливо також виразити вектори $u_s(R_i)$ через $x_s(R_i)$ таким чином:

$$\begin{bmatrix} u_1(R_i) \\ u_2(R_i) \\ \dots \\ \dots \\ u_m(R_i) \\ u_{m+1}(R_i) \end{bmatrix} = \Omega_i \begin{bmatrix} x_1(R_i) \\ x_2(R_i) \\ \dots \\ \dots \\ x_m(R_i) \\ x_{m+1}(R_i) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

де:

$$\Omega(r_i) = \Omega_i = \begin{bmatrix} \omega_{11}(R_i) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \omega_{21}(R_i) & \omega_{22}(R_i) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1}(R_i) & \omega_{m2}(R_i) & \dots & \omega_{mm}(R_i) & 0 \\ \omega_{m+1,1}(R_i) & \omega_{m+1,2}(R_i) & \dots & \omega_{m+1,m}(R_i) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Компоненти векторів $x_s(R_i)$ є початковими значеннями для отримання розв'язків задач Коші в точках інтегрування на відрізку $[R_i, R_{i+1}]$ і так далі.

В кожній точці ортогоналізації R_i розв'язок системи рівнянь (2.38), що задовольняє граничні умови на внутрішній поверхні інтервалу $r_1 \leq r \leq r_2$, можливо подати так:

$$y(R_i) = X(R_i)c(R_i), \quad (2.46)$$

де $X(R_i)$ – матриця порядку $l \times (m+1)$, стовпці якої є векторами $x_1(R_i), x_2(R_i), \dots, x_{m+1}(R_i)$; $c(R_i)$ – вектор–стовпець з компонентами $c_1(R_i), c_2(R_i), \dots, c_m(R_i), 1$.

В кінцевій точці інтервалу інтегрування $r = r_2 = R_m$ невідомі компоненти $c_1(R_m), c_2(R_m), \dots, c_m(R_m)$ вектора $c(R_m)$ визначаються із умови відповідності вектора $y(R_m)$ граничним умовам (2.39), які задані в цій точці. На цьому закінчується прямий хід задачі.

При зворотному ході по значенням компонент вектора $c(R_{i+p})$ ($p=1, 2, \dots, M-i$) вираховуються компоненти вектора $c(R_i)$ за допомогою рекурентного співвідношення:

$$c(R_i) = \left[\left(\prod_{j=1}^p \Omega_{i+j} \right)^T \right]^{-1} c(R_{i+p}). \quad (2.47)$$

Визначивши $c(R_i)$ ($i=M-1, M-2, \dots, 1, 0$) шукану вектор-функцію $y(R_i)$ можемо вирахувати по формулі (2.46).

Використання методу дискретної ортогоналізації для розв'язку крайових задач з урахуванням формули (2.47) дозволяє замість інформації по матриці Ω_i і векторах x_s в точках ортогоналізації зберігати інформацію про добутки цих матриць і відповідних векторах в точках видачі результатів, що суттєво економить оперативну пам'ять

Оскільки передбачається можливість побудови алгоритму розв'язку задачі для шаруватих циліндричних оболонок, весь інтервал змін товщини циліндра $r_1 \leq r \leq r_2$ розбивається на окремі ділянки $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ ($i=0, 1, 2, \dots, N-1$) у відповідності до кількості шарів. При переході через точку спряження двох шарів $r_{i-1} \leq r \leq r_i$ та $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ можуть змінюватись матеріал оболонки, а отже і його фізико-механічні характеристики, кроки інтегрування, ортогоналізації та видачі результатів.

В точках спряження дійсна умова

$$y(r_2^i) = y(r_1^{i+1}) \quad (i=1, 2, \dots, N-1). \quad (2.48)$$

Точки спряження мають бути точками ортогоналізації та точками видачі результатів.

Представлений метод дискретної ортогоналізації є універсальним. Він дозволяє розв'язувати системи диференціальних рівнянь будь-якого порядку в залежності від потреби.

2.5. Достовірність розв'язку задач напружено-деформованого стану пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Обґрунтованість і достовірність отримуваних результатів забезпечується математичною коректністю постановки задач; застосуванням апробованих і обґрунтованих методів чисельного інтегрування при розв'язанні неоднорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю результатів при реалізації чисельного методу та контролем їх точності.

Для оцінки практичної збіжності чисельного методу визначення параметрів напружено-деформованого стану циліндричних оболонок були виконані співставлення результатів розрахунків з даними, приведеними в дослідженнях, інших авторів.

2.5.1. Розподілений боковий тиск

Дослідження достовірності отримуваних результатів чисельного розрахунку напружено-деформованого стану, у випадку розподіленого бокового тиску (2.12)÷(2.14), проводилось співставленням результатів, отриманих з використанням запропонованого підходу при застосуванні методу Бубнова – Гальоркіна, з результатами, приведеними в літературі [83, 86-88] для ортотропних та анізотропних циліндрів.

Було проведено порівняння результатів встановлення переміщень u_r і напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною ортотропної оболонки під дією розподіленого стискаючого навантаження $q = -q_0 \sin \frac{\pi z}{L}$ прикладеного до зовнішньої поверхні. Розрахунки проводились для $r_1 = 0,9\text{м}$, $r_2 = 1,1\text{м}$, $L = 1,0\text{м}$ для граничних умов (2.7). Значення пружних сталих матеріалу оболонки такі: $E_{zz} = 1,90 E_0$; $E_{\theta\theta} = 1,20 E_0$; $E_{rr} = 0,45 E_0$; $G_{z\theta} = G_{rz} = G_{r\theta} = 0,30 E_0$; $\nu_{z\theta} = 0,15$;

$\nu_{r\theta}=0,30$; $\nu_{rz}=0,07$. Результати порівняння переміщень u_r і напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ отриманих за [87] і пропонуваним підходом приведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Результати порівняння переміщень u_r і напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною ортотропної циліндричної оболонки

$\frac{r-r_1}{r_2-r_1}$	$-\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} 10L}$			$-\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$		
	[87]	Пропонований підхід	D, %	[87]	Пропонований підхід	D, %
0	0,3213	0,3213	0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	0,3024	0,3024	0,0	0,5207	0,5207	0,0
1,0	0,2902	0,2902	0,0	1,0	1,0	0,0
	$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$			$-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0 10}$		
0	0,4885·10	0,4885·10	0,0	0,3553	0,3553	0,0
0,5	0,1139	0,1139	0,0	0,4031	0,4031	0,0
1,0	-0,4439·10	-0,4439·10	0,0	0,4634	0,4634	0,0

Аналізуючи результати наведені в табл. 2.1 можемо вказати на те, що порівнювальні дані співпадають. Тобто пропонований підхід дозволяє отримувати значення компонентів НДС для ортотропних циліндрів, що не відрізняються від наведених в [87].

Порівнювались результати дослідження напружено-деформованого стану циліндричних ортотропних оболонкових конструкцій в просторовій постановці з приведеними в [88]. Особливістю результатів приведених в цій роботі є те, що розв'язок тривимірної системи рівнянь проводився з використанням методу прямих. Розглядалась оболонка з такими геометричними та механічними характеристиками: товщина $h=0,2\text{м}$; радіус серединної поверхні $R=0,6\text{м}$; довжина уздовж твірної $L=1,2\text{м}$; $E_{zz}=10E_0$; $E_{\theta\theta}=2,5E_0$; $E_{rr}=E_0$; $G_{z\theta}=2E_0$; $G_{rz}=G_{r\theta}=E_0$; $\nu_{z\theta}=0,06$; $\nu_{\theta r}=0,1$; $\nu_{zr}=0,04$. На оболонку діє внутрішній тиск $q = -q_0 \sin \frac{\pi z}{L}$, на торцях, при $z=0$ та $z=L$, виконуються умови (2.7).

Результати порівняння величин напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та переміщень u_r і u_z приведені в таблиці 2.2. При цьому верхнє значення компоненти НДС (над ризкою) відповідає зовнішній поверхні циліндра, нижнє – внутрішній.

Таблиця 2.2

Результати порівняння переміщень u_r , u_z і напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ для ортотропного циліндра

Координата уздовж твірної z , м	$u_r / q_0 E_0^{-1}$			$u_z / q_0 E_0^{-1}$		
	[88]	Пропоно- ваний підхід	D, %	[88]	Пропоно- ваний підхід	D, %
0,0	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>-9,32</u>	<u>-9,38</u>	<u>0,6</u>
	0,0	0,0	0,0	14,13	14,21	0,6
0,2	<u>23,40</u>	<u>23,49</u>	<u>0,4</u>	<u>-8,08</u>	<u>-8,13</u>	<u>0,6</u>
	29,72	29,78	0,2	12,24	12,31	0,6
0,4	<u>40,54</u>	<u>40,68</u>	<u>0,3</u>	<u>-4,66</u>	<u>-4,69</u>	<u>0,6</u>
	51,48	51,67	0,4	7,07	7,10	0,4
0,6	<u>46,81</u>	<u>46,97</u>	<u>0,3</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>
	59,44	59,55	0,2	0,0	0,0	0,0
	σ_{zz} / q_0			$\sigma_{\theta\theta} / q_0$		
0,0	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>	<u>0,0</u>
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,2	<u>1,442</u>	<u>1,453</u>	<u>0,8</u>	<u>0,922</u>	<u>0,930</u>	<u>0,9</u>
	-1,748	-1,755	0,4	1,256	1,256	0,0
0,4	<u>2,497</u>	<u>2,511</u>	<u>0,6</u>	<u>1,598</u>	<u>1,600</u>	<u>0,1</u>
	-3,028	-3,046	0,6	2,176	2,181	0,2
0,6	<u>2,884</u>	<u>2,904</u>	<u>0,7</u>	<u>1,845</u>	<u>1,853</u>	<u>0,4</u>
	-3,497	-3,520	0,7	2,512	2,517	0,2

З аналізу результатів порівнянь компонентів напружено-деформованого стану приведеного в таблиці 2.2 видно, що розходження між величинами напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ і переміщень u_r , u_z приведеними в літературі та отриманими згідно пропонованого підходу знаходяться в межах 1%. Це свідчить про те, що пропонований підхід стосовно встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінних циліндричних оболонок під

дією розподіленого по боковій поверхні тиску надає можливість отримувати результати, які співпадають з даними роботи [88].

В якості тестування пропонованого підходу до розв'язку задачі визначення значень компонентів НДС шаруватих анізотропних оболонок проведене порівняння отримуваних результатів з приведеними в літературі [83, 86]. Порівнювались результати для двохшарової композитної циліндричної оболонки, головні напрями пружності шарів якої повернуті на кут $\pm\psi$ до напрямку її меридіану. Товщини шарів однакові. Головні напрями пружності внутрішнього шару повернуті на кут $+\psi$, а зовнішнього на кут $-\psi$. На торцях оболонки мають місце граничні умови, що в просторовій постановці в циліндричних координатах записуються у вигляді:

$$\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0, \quad z = 0, \quad z = L.$$

Пружні сталі однонапрявленого ортотропного матеріалу шарів мають значення: $E_{11}=5,7E_0$; $E_{22}=E_{33}=1,4E_0$; $G_{12}=G_{23}=0,575E_0$; $G_{13}=0,5E_0$; $\nu_{12}=\nu_{13}=0,068$; $\nu_{23}=0,4$. Оболонка знаходиться під дією зовнішнього бокового тиску $q = -q_0 \sin^p \frac{\pi z}{L}$. Радіус внутрішньої бокової поверхні рівний r_0 , а зовнішньої – $1,1r_0$. Товщини шарів рівні між собою. Обчислення виконано при $r_0=1$, $L=2r_0$, $p=8$. В таблиці 2.3 порівняно значення переміщення u_r та напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні посередині довжини твірної циліндра.

З аналізу проведеного в таблиці 2.3 порівняння величин переміщень u_r та напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ видно, що між отримуваними результатами немає розходження крім напруження σ_{zz} для кута $\pm\psi = 0^0$, де розбіжність досягає 9,1%. В цілому можливо стверджувати, що пропонований підхід до визначення компонентів НДС анізотропного, шаруватого циліндра під розподіленим боковим навантаженням дозволяє отримувати результати, що збігаються з приведеними в літературі.

Результати порівняння величин напружень та прогинів для анізотропного
циліндра

$\frac{12\psi}{\pi}$	[83]	Пропо- нований підхід	D, %	[83]	Пропо- нований підхід	D, %
	$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_0}$			$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$		
0	$-0,5091 \cdot 10$	$-0,5091 \cdot 10$	0,0	$-0,1228 \cdot 10^2$	$-0,1116 \cdot 10^2$	9,1
3	$-0,4372 \cdot 10$	$-0,4372 \cdot 10$	0,0	$-0,6933 \cdot 10$	$-0,6933 \cdot 10$	0,0
6	$-0,1755 \cdot 10$	$-0,1755 \cdot 10$	0,0	$-0,2117 \cdot 10$	$-0,2117 \cdot 10$	0,0
	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$			$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$		
0	$-0,7638 \cdot 10$	$-0,7638 \cdot 10$	0,0	0,0	0,0	0,0
3	$-0,1069 \cdot 10^2$	$-0,1069 \cdot 10^2$	0,0	$-0,3658 \cdot 10$	$-0,3658 \cdot 10$	0,0
6	$-0,9959 \cdot 10$	$-0,9959 \cdot 10$	0,0	0,0	0,0	0,0

Проведене порівняння результатів визначення параметрів НДС анізотропного циліндра в просторовій постановці отриманих згідно методу описаного в роботах [83]. На торцях оболонки мають місце граничні умови, що в просторовій постановці в циліндричних координатах записуються у вигляді:

$$\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0, \quad z = 0, \quad z = L$$

та, отриманих за пропонованим підходом, з граничними умовами на торцях:

$$\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0, \quad z = 0, \quad z = L.$$

Розглядалась одношарова циліндрична оболонка головні напрямки пружності матеріалу якої повернуті на кут ψ до напрямку меридіану конструкції. Пружні сталі матеріалу шарів мають значення: $E_{11}=5,7E_0$; $E_{22}=E_{33}=1,4E_0$; $G_{12}=G_{23}=0,575E_0$; $G_{13}=0,5E_0$; $\nu_{12}=\nu_{13}=0,068$; $\nu_{23}=0,4$. Оболонка знаходиться під дією зовнішнього бокового тиску $q = -q_0 \sin^p \frac{\pi z}{L}$. Радіус внутрішньої бокової поверхні рівний r_0 , а зовнішньої – $1,1r_0$. Обчислення

виконано при $r_0=1$, $L=2r_0$, $p=2$. В таблиці 2.4 порівняні значення переміщення u_r та напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні посередині довжини твірної циліндра.

Таблиця 2.4

Результати порівняння величин напружень та прогинів для анізотропного циліндра при різних типах граничних умов

12ψ π	[83] $\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0$	Пропонований підхід для граничних умов $\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0$	D, %	[83] $\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0$	Пропонований підхід для граничних умов $\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0$	D, %
	$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_0 10}$			$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$		
0	-0,6865	-0,6865	0,0	-0,9471·10	-0,9471·10	0,0
2	-0,6490	-0,6460	0,5	-0,9476·10	-0,9562·10	0,9
3	-0,5335	-0,4976	6,7	-0,6668·10	-0,6664·10	0,1
5	-0,2483	-0,2245	9,6	-0,1881·10	-0,1770·10	5,9
6	-0,1938	-0,1938	0,0	-0,1302·10	-0,1302·10	0,0
	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$			$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$		
0	-0,9781·10	-0,9781·10	0,0	0,0	0,0	0,0
2	-0,1133·10 ²	-0,1134·10 ²	0,1	0,3405·10	-0,9715	-
3	-0,1189·10 ²	-0,1183·10 ²	0,5	0,3448·10	-0,5837	-
5	-0,1071·10 ²	-0,1080·10 ²	0,8	0,1026·10	0,0250	-
6	-0,1068·10 ²	-0,1068·10 ²	0,0	0,0	0,0	0,0

Аналізуючи результати порівняння компонентів напружено-деформованого стану анізотропної циліндричної оболонки при дії розподіленого бокового тиску (табл. 2.4) видно, що при куті ψ рівному 0° та 90° розходження між порівнюваними результатами відсутнє. В той же час в діапазоні зміни кута $0^\circ < \psi < 90^\circ$ існують розходження між значеннями, що порівнюються. Між порівнюваними прогинами u_r найбільше розходження складає 9,6% для кута $\psi = 75^\circ$. Розходження між осьовими нормальними напруженнями σ_{zz} досягає 5,9% для того ж кута $\psi = 75^\circ$. Розходження між коловими нормальними

напруженнями $\sigma_{\theta\theta}$ не перебільшує 1%. Зв'язку між порівнюваними величинами дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ практично немає. Це пов'язане із тим, що при граничних умовах на торцях оболонки $\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0$ для $z = 0, z = L$ значення $\tau_{z\theta} = 0$, а при умовах $\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0$ ці напруження $\tau_{z\theta}$ приймають на торцях максимальні значення.

В цілому можна стверджувати, що запропонований підхід до розв'язку задач про напружено-деформований стан анізотропних товстостінних композитних циліндричних оболонок під дією розподіленого бокового тиску в просторовій постановці дає результати, що узгоджуються з відомими в літературі [83, 86-88] підходами та дозволяє обчислювати НДС анізотропних циліндрів в просторовій постановці для типів граничних умов (2.7), (2.8), чим розширює область використання тривимірних рівнянь теорії пружності.

2.5.2. Осьовий тиск

Дослідження достовірності отримуваних результатів чисельного розрахунку напружено-деформованого стану циліндричної оболонки, у випадку осьового тиску з застосуванням методу прямих, проводилось з використанням викладених в літературі [134] підходів до просторового розв'язку задачі осьового тиску та шляхом порівняння з відомими двовимірними методиками розрахунку анізотропних оболонок.

Для циліндричної анізотропної оболонки, головні напрямки пружності ортотропного матеріалу, якої можуть бути повернуті на кут ψ відносно напрямку її меридіану, проведено порівняння переміщень u_r , отриманих згідно запропонованого підходу та згідно уточненої теорії, описаної в [226]. Розглядався циліндр з такими геометричними характеристиками: радіус серединної поверхні $R=0,6$ м; довжина уздовж твірної $L=1,2$ м; товщина $h=0,02$ м. Механічні характеристики ортотропного матеріалу такі: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000$ МПа. До торців

оболонки прикладені осьові стискаючі навантаження еквівалентні напруженням $\sigma_{zz} = 1,0$ МПа. Порівнювались величини прогинів u_r для координати $z = L/2$ вздовж довжини твірної циліндра, на рівні серединної поверхні, для різних значень ψ , табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Результати порівняння переміщень u_r для анізотропного циліндра

ψ	$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} R \cdot 10^{-3}}$		
	Уточнена теорія [226]	Пропонований підхід	Δ , %
0	$0,908 \cdot 10^{-3}$	$0,909 \cdot 10^{-3}$	0,1
10	$0,257 \cdot 10^{-2}$	$0,191 \cdot 10^{-2}$	25,7
20	$0,692 \cdot 10^{-2}$	$0,529 \cdot 10^{-2}$	23,5
30	$0,117 \cdot 10^{-1}$	$0,117 \cdot 10^{-1}$	0,0
40	$0,148 \cdot 10^{-1}$	$0,194 \cdot 10^{-1}$	31,1
50	$0,148 \cdot 10^{-1}$	$0,198 \cdot 10^{-1}$	33,8
60	$0,117 \cdot 10^{-1}$	$0,122 \cdot 10^{-1}$	4,3
70	$0,685 \cdot 10^{-2}$	$0,543 \cdot 10^{-2}$	20,7
80	$0,258 \cdot 10^{-2}$	$0,192 \cdot 10^{-2}$	25,6
90	$0,893 \cdot 10^{-3}$	$0,895 \cdot 10^{-3}$	0,2

Аналізуючи результати порівнянь величин переміщень u_r здобутих за використанням двовимірної уточненої теорії та тривимірної (табл. 2.5) можливо зробити висновок, що отримані результати узгоджуються між собою. При цьому видно, що при куті $\psi = 0^0$ та 90^0 розходження між порівнюваними значеннями не перевищують 0,2%. В діапазоні зміни кута повороту головних напрямів пружності матеріалу $10^0 \leq \psi \leq 80^0$ ця розбіжність коливається в межах від 0% до 33,8%. Таке розходження між порівнюваними величинами можливо пояснити тим, що у пропонованому тривимірному підході враховуються механічні характеристики матеріалу, що характеризують жорсткість

конструкції в поперечному напрямку та враховане поперечне обтиснення матеріалу.

Тестування результатів достовірності визначення НДС у просторовій постановці для випадку осьового тиску проведено на прикладі циліндричних анізотропних оболонок [134], анізотропія яких обумовлена наявністю однієї площини пружної симетрії.

Розглядались одношарові анізотропні циліндричні оболонки головні напрями пружності матеріалу яких повернуто на кут ψ відносно напрямку меридіану. Геометричні характеристики є такими: довжина твірної $L=4,8\text{м}$; радіус внутрішньої поверхні $r_1=0,57\text{м}$, зовнішньої – $r_2=0,63\text{м}$. Механічні характеристики ортотропного матеріалу наступні: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000\text{МПа}$. До торців оболонки прикладені осьові стискаючі напруження $\sigma_{zz}=100,0\text{МПа}$. Результати порівняння величин компонентів напруженого стану σ_{zz} та $\tau_{z\theta}$ приведені в табл. 2.6 посередині довжини твірної циліндра для поверхонь з радіусами $r_1=0,57\text{м}$, $r_0=0,60\text{м}$ и $r_2=0,63\text{м}$ в залежності від кута повороту головних напрямків пружності матеріалу ψ .

Аналізуючи представлені в табл. 2.6 результати розрахунків, слід зазначити, що на серединній поверхні циліндричної оболонки значення напружень, отримані з використанням пропонованого підходу, практично збігаються з такими, що обчислені відповідно до методики [134]. Зокрема, для σ_{zz} неспівпадіння складає менше 0,01%. Більшим, до 5,3%, є розходження між порівнюваними напруженнями σ_{zz} на зовнішній та внутрішній поверхнях. Також добре узгоджуються порівнювані значення дотичних напружень $\tau_{z\theta}$.

Результати порівняння напружень σ_{zz} та $\tau_{z\theta}$ для анізотропного циліндра

ψ	Координата r	σ_{zz} [МПа]			$\tau_{z\theta}$ [МПа]		
		[134]	Пропонований підхід	Δ , %	[134]	Пропонований підхід	Δ , %
0	0,63м	-100,00	-95,24	4,7	0,0	0,0	0,0
	0,60м	-100,00	-100,00	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,57м	-100,00	-105,27	5,3	0,0	0,0	0,0
30	0,63м	-103,17	-98,24	4,8	49,37	46,95	4,9
	0,60м	-100,00	-100,00	0,0	47,87	47,81	0,1
	0,57м	-96,50	-101,60	5,3	46,19	48,57	5,2
60	0,63м	-101,44	-96,79	4,6	2,03	3,47	29,1
	0,60м	-100,00	-99,99	0,01	-0,05	1,22	95,9
	0,57м	-98,44	-103,41	5,0	-2,38	-1,55	34,9
90	0,63м	-99,70	-94,95	4,8	0,0	0,0	0,0
	0,60м	-100,02	-100,02	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,57м	-100,25	-105,53	5,3	0,0	0,0	0,0

Таким чином, можливо зробити висновок, що пропонуваний підхід до розв'язку задач про напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску в просторовій постановці дає результати, що узгоджуються з отриманими за іншими відомими підходами.

2.5.3. Крутний момент

Дослідимо достовірність результатів співставлення параметрів напруженого стану при дії крутного моменту, отримуваних за пропонованим підходом з використанням методу прямих, з результатами викладеними в літературі.

Порівняння результатів визначення НДС у випадку дії зовнішнього крутного моменту було проведено на прикладі циліндричних анізотропних оболонок [134]. В просторовій постановці розглянутий напружений стан одношарової анізотропної циліндричної оболонки з такими геометричними характеристиками: довжина твірної $L = 9,6\text{м}$; радіус внутрішньої поверхні

$r_1=0,57\text{м}$, а зовнішньої – $r_2=0,63\text{м}$. Механічні характеристики ортотропного матеріалу такі: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000\text{МПа}$. До торців оболонки прикладені зсувні напруження $\tau_{z\theta}=100,0\text{МПа}$. Результати співставлення значень напруженого стану $\tau_{z\theta}$ та σ_{zz} посередині довжини твірної циліндра для поверхонь з радіусами $r_1=0,57\text{м}$, $r_0=0,60\text{м}$ и $r_2=0,63\text{м}$ представлені в табл. 2.7 для окремих значень кута ψ .

Таблиця 2.7

Результати порівняння напружень $\tau_{z\theta}$ та σ_{zz} для анізотропного циліндра

ψ	Координата r	$\tau_{z\theta}$ [МПа]			σ_{zz} [МПа]		
		[134]	Пропонова- ний підхід	Δ , %	[134]	Пропонова- ний підхід	Δ , %
0	0,63м	104,66	99,01	5,4	0,0	0,0	0,0
	0,60м	99,68	99,76	0,1	0,0	0,0	0,0
	0,57м	94,69	101,01	6,7	0,0	0,0	0,0
30	0,63м	110,48	108,82	2,5	-125,79	-132,78	5,6
	0,60м	107,09	103,55	3,3	-123,74	-124,25	0,4
	0,57м	103,83	97,31	6,3	-121,91	-111,17	8,8
60	0,63м	101,64	109,90	8,1	-1,04	-2,16	51,8
	0,60м	95,16	101,56	6,7	0,15	-0,69	21,7
	0,57м	88,57	92,23	4,1	1,36	1,24	8,8
90	0,63м	104,66	99,01	5,4	0,0	0,0	0,0
	0,60м	99,68	99,76	0,1	0,0	0,0	0,0
	0,57м	94,69	101,01	6,7	0,0	0,0	0,0

Аналізуючи отримані результати порівнянь компонентів напруженого стану циліндра, що знаходиться під дією кручення (табл. 2.7) слід зауважити, що розходження між порівнюваними напруженнями $\tau_{z\theta}$ не перевищує 8,1%. Також видно, що характер зміни порівнюваних величин σ_{zz} , які відповідають випадку відхилення осей ортотропії матеріалу від криволінійної системи координат оболонки, узгоджується за обома методами.

Таким чином, порівняльний аналіз отриманих згідно запропонованих підходів компонентів напружень та переміщень в умовах розподіленого бокового тиску, осьового тиску та кручення, з відомими з літератури даними, вказує на достовірність отримуваних результатів при розв'язку просторової задачі теорії пружності для аналізу напружено-деформованого стану анізотропних товстостінних циліндричних оболонок.

2.6. Дослідження напружено-деформованого стану товстостінних пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Наведені вище системи рівнянь (2.12) та (2.27) з відповідними їм граничними умовами, застосуємо для дослідження розв'язків лінійних задач напружено-деформованого стану циліндрів під дією представлених раніше силових факторів. Проаналізуємо на конкретних прикладах розрахунку взаємовплив деформацій розтягу та зсуву, згину та кручення для шаруватих пакетів утворених симетрично або несиметрично, відносно серединної поверхні, укладанням шарів волокнистого композиту з орієнтацією волокон під кутами $+\psi$ та $-\psi$ до напрямку меридіана оболонки.

2.6.1. Товстостінні циліндричні анізотропні оболонки під дією зовнішнього розподіленого бокового навантаження

При проведенні розрахунків будемо розглядати анізотропні оболонки, що виготовлені з композитного матеріалу – боропластику [123, 124, 198, 199] і закріплені на торцях відповідно до умов (2.7). До зовнішньої поверхні оболонкових конструкцій прикладений стискаючий розподілений боковий тиск

$$q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right).$$

У власних осях такий матеріал є ортотропним з такими

характеристиками: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$,

$\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000$ МПа. Відносно координатних осей, що співпадають з поверхнею оболонки, осі ортотропій можуть бути повернуті на довільний кут ψ . При $\psi \neq 0^0$ та 90^0 матеріал втрачає властивості ортотропії та веде себе при деформуванні як такий, що має одну площину пружної симетрії. При формуванні пакету шарів на практиці вважається, що для збереження ортотропії досить забезпечити їх послідовність вкладання таким чином, щоб кожному шару з додатним значенням кута ψ відповідав шар з кутом $-\psi$ симетрично відносно серединної поверхні. Така інтуїтивна точка зору при більш детальному аналізі для оболонок виявилась помилковою [31, 145]. Нижче збільшуючи кількість шарів, проаналізуємо, як при цьому змінюється напружено-деформований стан товстостінних циліндричних оболонок. Прийmemo відношення довжини $L=1,2$ м до радіуса серединної поверхні оболонки r рівним двом ($L/r=2$), а також відношення товщини до радіуса $h/r=0,2$. Радіус внутрішньої поверхні $r_1=0,54$ м, зовнішньої – $r_2=0,66$ м.

2.6.1.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки

В таблицях 2.8-2.11 приведений розподіл параметрів напружено-деформованого стану: відносних значень напружень (нормальних σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$; дотичних τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$) та відносних значень переміщень (u_r , u_z , u_θ), здобутих для одношарових анізотропних оболонок з використанням пропонованого тривимірного підходу (2.12) за довжиною твірної циліндра на торцях якого виконуються умови (2.7). Результати для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_r представлені на зовнішній поверхні, а для σ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, u_z , u_θ на серединній поверхні, де ці величини приймають близькі до максимальних значення або характеризують загальний напружено-деформований стан циліндра.

Компоненти НДС отримано для кутів ψ рівних: 0^0 (табл. 2.8), 30^0 (табл. 2.9),

60^0 (табл. 2.10), 90^0 (табл. 2.11). Підхід до їх відшукування для випадку розподіленого бокового тиску приведений в пункті 2.2.

Перша колонка табл. 2.8-2.11 вказує на параметр НДС анізотропного циліндра, інші представляють його значення у перерізах за твірною оболонки.

Для кожної координати за довжиною твірної циліндра маємо два рядки компонентів напружено-деформованого стану:

- верхній рядок відповідає розв'язку системи (2.12) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) та позначений як «АПР» (анізотропний просторовий розв'язок);
- нижній – підхід, що також використовує для розв'язку поставленої задачі систему (2.12), але відрізняється від першого тим, що механічні характеристики $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$ і позначений «ОПР» (ортотропний просторовий розв'язок).

При цьому визначення компонентів НДС вздовж твірної, що представлено в табл. 2.8-2.11 проводиться, після розв'язку системи (2.12), з використанням тригонометричних рядів (2.11).

На рис. 2.4-2.9 наведені графіки в осях: відносна величина параметру НДС (вісь ординат) – відносна довжина оболонки (вісь абсцис), що вираховані для кутів ψ рівних: 0^0 , 30^0 , 60^0 , 90^0 для результатів представлених в табл. 2.8-2.11 для одношарових оболонкових конструкцій. На рис. 2.4 представлений розподіл за твірною оболонки нормального напруження σ_{rr} , рис. 2.5 – напруження σ_{zz} , рис. 2.6 – $\sigma_{\theta\theta}$, рис. 2.7 – дотичного напруження $\tau_{z\theta}$, рис. 2.8 характеризує розподіл переміщення u_r , рис. 2.9 – переміщення u_θ . При цьому нумерація кривих відповідає таким кутам ψ : 1 – $\psi = 0^0$; 2 – $\psi = 30^0$; 3 – $\psi = 60^0$; 4 – $\psi = 90^0$ у випадку підходу «АПР» до розв'язку системи (2.12), а також 2' – $\psi = 30^0$; 3' – $\psi = 60^0$ отриманих для відповідних кутів відхилення осей ортотропії від координатних при розв'язку системи (2.12) згідно підходу «ОПР»

Таблиця 2.8

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за твірною одношарової товстостінної циліндричної оболонки на серединній поверхні при $\psi = 0^0$

Параметр НДС	Підхід до розв'язку	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	0,7L	0,8L	0,9L	L
σ_{rr}/q_0	АПР	0,0	-0,1717	-0,3265	-0,4494	-0,5283	-0,5555	-0,5283	-0,4494	-0,3265	-0,1717	0,0
	ОПР	0,0	-0,1717	-0,3265	-0,4494	-0,5283	-0,5555	-0,5283	-0,4494	-0,3265	-0,1717	0,0
τ_{rz}/q_0	АПР	-0,7133	-0,6784	-0,5771	-0,4193	-0,2204	0,0	0,2204	0,4193	0,5771	0,6784	0,7133
	ОПР	-0,7133	-0,6784	-0,5771	-0,4193	-0,2204	0,0	0,2204	0,4193	0,5771	0,6784	0,7133
$\tau_{r\theta}/q_0$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
σ_{zz}/q_0	АПР	0,0	-2,7857	-5,2986	-7,2930	-8,5734	-9,0146	-8,5734	-7,2930	-5,2986	-2,7857	0,0
	ОПР	0,0	-2,7857	-5,2986	-7,2930	-8,5734	-9,0146	-8,5734	-7,2930	-5,2986	-2,7857	0,0
$\sigma_{\theta\theta}/q_0$	АПР	0,0	-1,4330	-2,7257	-3,7517	-4,4103	-4,6373	-4,4103	-3,7517	-2,7257	-1,4330	0,0
	ОПР	0,0	-1,4330	-2,7257	-3,7517	-4,4103	-4,6373	-4,4103	-3,7517	-2,7257	-1,4330	0,0
$\tau_{z\theta}/q_0$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	-0,5041	-0,9589	-1,3197	-1,5515	-1,6313	-1,5515	-1,3197	-0,9589	-0,5041	0,0
	ОПР	0,0	-0,5041	-0,9589	-1,3197	-1,5515	-1,6313	-1,5515	-1,3197	-0,9589	-0,5041	0,0
$\frac{u_z}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	-0,0407	-0,0387	-0,0329	-0,0239	-0,0126	0,0	0,0126	0,0239	0,0329	0,0387	0,0407
	ОПР	-0,0407	-0,0387	-0,0329	-0,0239	-0,0126	0,0	0,0126	0,0239	0,0329	0,0387	0,0407
$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблиця 2.9

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за твірною одношарової циліндричної оболонки на серединній поверхні при $\psi = 30^\circ$

Параметр НДС	Підхід до розв'язку	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	0,7L	0,8L	0,9L	L
σ_{rr}/q_0	АПР	0,0	-0,1464	-0,2784	-0,3832	-0,4505	-0,4737	-0,4505	-0,3832	-0,2784	-0,1464	0,0
	ОПР	0,0	-0,1465	-0,2787	-0,3836	-0,4509	-0,4741	-0,4509	-0,3836	-0,2787	-0,1465	0,0
τ_{rz}/q_0	АПР	-0,4565	-0,4342	-0,3693	-0,2683	-0,1411	0,0	0,1411	0,2683	0,3693	0,4342	0,4565
	ОПР	-0,4682	-0,4453	-0,3788	-0,2752	-0,1447	0,0	0,1447	0,2752	0,3788	0,4453	0,4682
$\tau_{r\theta}/q_0$	АПР	0,0	0,1014	0,1641	0,1641	0,1014	0,0	-0,1014	-0,1641	-0,1641	-0,1014	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
σ_{zz}/q_0	АПР	0,0	-1,8603	-3,5385	-4,8704	-5,7255	-6,0201	-5,7255	-4,8704	-3,5385	-1,8603	0,0
	ОПР	0,0	-1,8445	-3,5084	-4,8289	-5,6767	-5,9688	-5,6767	-4,8289	-3,5084	-1,8445	0,0
$\sigma_{\theta\theta}/q_0$	АПР	0,0	-2,0450	-3,8899	-5,3540	-6,2940	-6,6179	-6,2940	-5,3540	-3,8899	-2,0450	0,0
	ОПР	0,0	-2,0396	-3,8795	-5,3397	-6,2772	-6,6002	-6,2772	-5,3397	-3,8795	-2,0396	0,0
$\tau_{z\theta}/q_0$	АПР	-1,0849	-0,8777	-0,3353	0,3353	0,8777	1,0849	0,8777	0,3353	-0,3353	-0,8777	-1,0849
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	-0,6080	-1,1564	-1,5917	-1,8711	-1,9674	-1,8711	-1,5917	-1,1564	-0,6080	0,0
	ОПР	0,0	-0,6078	-1,1562	-1,5913	-1,8707	-1,9670	-1,8707	-1,5913	-1,1562	-0,6078	0,0
$\frac{u_z}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	-0,4241	-0,4033	-0,3431	-0,2493	-0,1311	0,0	0,1311	0,2493	0,3431	0,4033	0,4241
	ОПР	-0,4257	-0,4049	-0,3444	-0,2502	-0,1315	0,0	0,1315	0,2502	0,3444	0,4049	0,4257
$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	0,0005	0,0009	0,0009	0,0005	0,0	-0,0005	-0,0009	-0,0009	-0,0005	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблиця 2.10

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за твірною одношарової циліндричної оболонки на серединній поверхні при $\psi = 60^\circ$

Параметр НДС	Підхід до розв'язку	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	0,7L	0,8L	0,9L	L
σ_{rr}/q_0	АПР	0,0	-0,1680	-0,3196	-0,4399	-0,5172	-0,5438	-0,5172	-0,4399	-0,3196	-0,1680	0,0
	ОПР	0,0	-0,1659	-0,3156	-0,4344	-0,5107	-0,5370	-0,5107	-0,4344	-0,3156	-0,1659	0,0
τ_{rz}/q_0	АПР	-0,0307	-0,0292	-0,0248	-0,0180	-0,0095	0,0	0,0095	0,0180	0,0248	0,0292	0,0307
	ОПР	-0,0408	-0,0388	-0,0330	-0,0240	-0,0126	0,0	0,0126	0,0240	0,0330	0,0388	0,0408
$\tau_{r\theta}/q_0$	АПР	0,0	-0,0082	-0,0132	-0,0132	-0,0082	0,0	0,0082	0,0132	0,0132	0,0082	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
σ_{zz}/q_0	АПР	0,0	-0,3658	-0,6957	-0,9576	-1,1257	-1,1836	-1,1257	-0,9576	-0,6957	-0,3658	0,0
	ОПР	0,0	-0,1672	-0,3181	-0,4378	-0,5147	-0,5412	-0,5147	-0,4378	-0,3181	-0,1672	0,0
$\sigma_{\theta\theta}/q_0$	АПР	0,0	-1,7589	-3,3456	-4,6048	-5,4133	-5,6919	-5,4133	-4,6048	-3,3456	-1,7589	0,0
	ОПР	0,0	-1,7987	-3,4213	-4,7090	-5,5358	-5,8207	-5,5358	-4,7090	-3,4213	-1,7987	0,0
$\tau_{z\theta}/q_0$	АПР	0,0655	0,0530	0,0202	-0,0202	-0,0530	-0,0655	-0,0530	-0,0202	0,0202	0,0530	0,0655
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	-0,1735	-0,3299	-0,4541	-0,5338	-0,5613	-0,5338	-0,4541	-0,3299	-0,1735	0,0
	ОПР	0,0	-0,1890	-0,3594	-0,4947	-0,5816	-0,6115	-0,5816	-0,4947	-0,3594	-0,1890	0,0
$\frac{u_z}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	-0,2981	-0,2835	-0,2412	-0,1752	-0,0921	0,0	0,0921	0,1752	0,2412	0,2835	0,2981
	ОПР	-0,4788	-0,4554	-0,3874	-0,2814	-0,1480	0,0	0,1480	0,2814	0,3874	0,4554	0,4788
$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	0,0436	0,0706	0,0706	0,0436	0,0	-0,0436	-0,0706	-0,0706	-0,0436	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Таблиця 2.11

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за твірною одношарової циліндричної оболонки на серединній поверхні при $\psi = 90^\circ$

Параметр НДС	Підхід до розв'язку	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	0,6L	0,7L	0,8L	0,9L	L
$\frac{\sigma_{rr}}{q_0}$	АПР	0,0	-0,1699	-0,3231	-0,4447	-0,5228	-0,5497	-0,5228	-0,4447	-0,3231	-0,1699	0,0
	ОПР	0,0	-0,1699	-0,3231	-0,4447	-0,5228	-0,5497	-0,5228	-0,4447	-0,3231	-0,1699	0,0
$\frac{\tau_{rz}}{q_0}$	АПР	-0,0204	-0,0194	-0,0165	-0,0120	-0,0063	0,0	0,0063	0,0120	0,0165	0,0194	0,0204
	ОПР	-0,0204	-0,0194	-0,0165	-0,0120	-0,0063	0,0	0,0063	0,0120	0,0165	0,0194	0,0204
$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{\sigma_{zz}}{q_0}$	АПР	0,0	-0,0786	-0,1494	-0,2057	-0,2418	-0,2542	-0,2418	-0,2057	-0,1494	-0,0786	0,0
	ОПР	0,0	-0,0786	-0,1494	-0,2057	-0,2418	-0,2542	-0,2418	-0,2057	-0,1494	-0,0786	0,0
$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$	АПР	0,0	-1,7312	-3,2929	-4,5323	-5,3280	-5,6022	-5,3280	-4,5323	-3,2929	-1,7312	0,0
	ОПР	0,0	-1,7312	-3,2929	-4,5323	-5,3280	-5,6022	-5,3280	-4,5323	-3,2929	-1,7312	0,0
$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	-0,0714	-0,1357	-0,1868	-0,2196	-0,2309	-0,2196	-0,1868	-0,1357	-0,0714	0,0
	ОПР	0,0	-0,0714	-0,1357	-0,1868	-0,2196	-0,2309	-0,2196	-0,1868	-0,1357	-0,0714	0,0
$\frac{u_z}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	-0,0345	-0,0328	-0,0279	-0,0203	-0,0107	0,0	0,0107	0,0203	0,0279	0,0328	0,0345
	ОПР	-0,0345	-0,0328	-0,0279	-0,0203	-0,0107	0,0	0,0107	0,0203	0,0279	0,0328	0,0345
$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Розподіл значень напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщень u_r , u_θ на рис. 2.4-2.9 та в табл. 2.8-2.11 вздовж твірної циліндра відповідає граничним умовам заданим на торцях оболонки та відповідному цим умовам розкладенню в тригонометричні ряди вздовж осьової координати z .

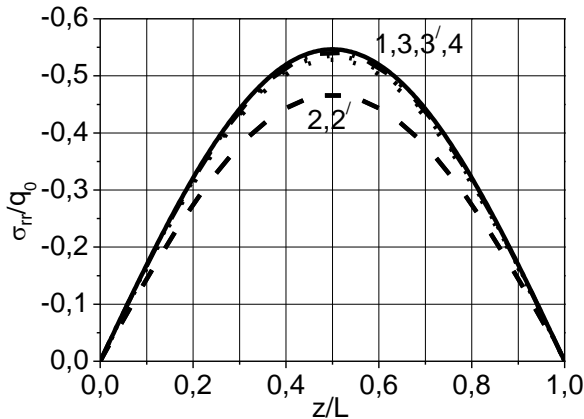


Рис. 2.4. Розподіл напружень σ_{rr} вздовж твірної серединної поверхні циліндра

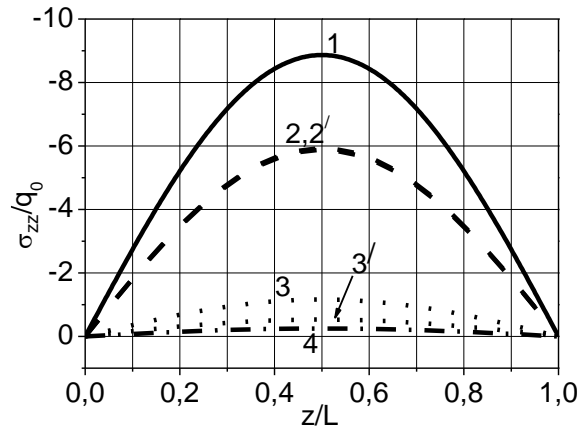


Рис. 2.5. Розподіл напружень σ_{zz} вздовж твірної зовнішньої поверхні циліндра

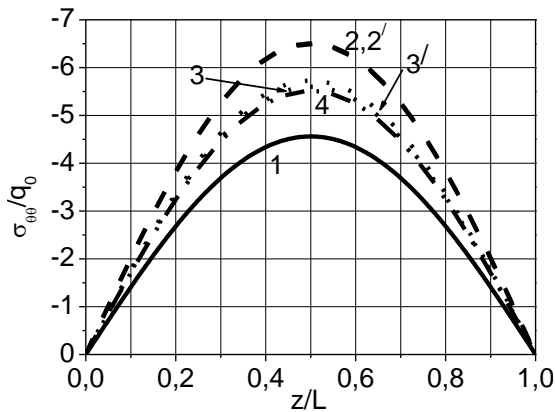


Рис. 2.6. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ вздовж твірної зовнішньої поверхні циліндра

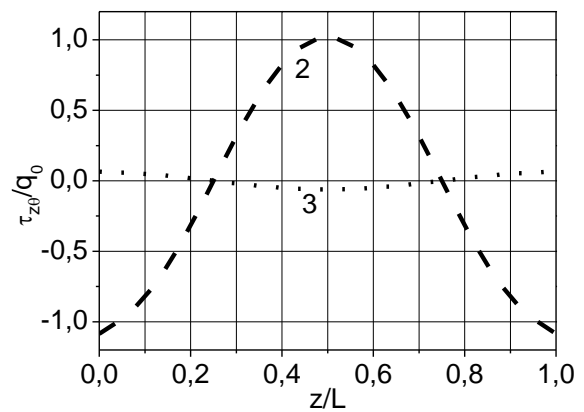


Рис. 2.7. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ вздовж твірної зовнішньої поверхні циліндра

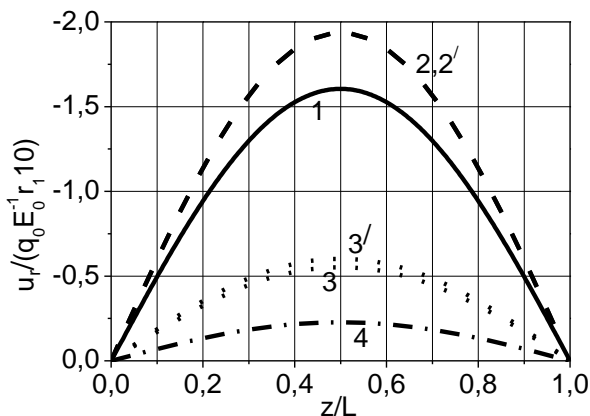


Рис. 2.8. Розподіл переміщень u_r вздовж твірної зовнішньої поверхні циліндра

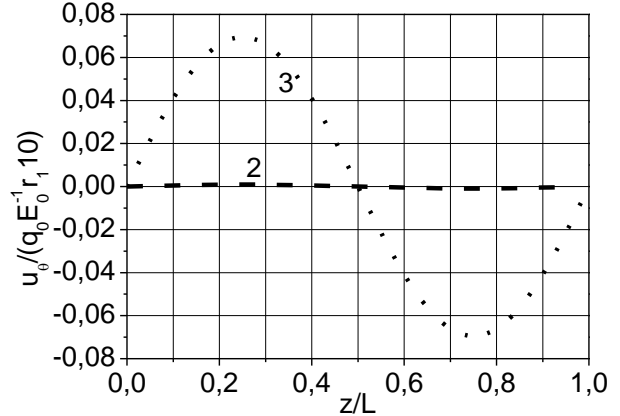


Рис. 2.9. Розподіл переміщень u_θ вздовж твірної серединної поверхні циліндра

Розподіл величин σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r характеризується півхвилею синусоїди (рис. 2.4, 2.5, 2.6, 2.8) із максимальними значеннями посередині довжини твірної циліндра та нульовими на його торцях. Значення u_θ змінюються за довжиною твірної відповідно до повної хвилі синусоїди (рис. 2.9) приймаючи максимальні величини при координатах вздовж твірної $z=0,25L$ та $z=0,75L$.

При цьому зауважимо розходження в результатах визначення компонентів НДС з використанням закону Гука в формі (2.3) «АПР» та при підході «ОПР», коли механічні характеристики c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} приймаються рівними нулю. Видно, що при використанні підходу «АПР» на відміну від «ОПР» з'являються дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ (табл. 2.9; 2.10) $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.7) та переміщення u_θ (рис. 2.9).

Проведені дослідження дозволяють встановити, що величини нормальних напружень σ_{rr} визначених при використанні підходу «АПР» більші від таких же визначених згідно підходу «ОПР» на 2%.

Дотичні напруження τ_{rz} відшукані згідно «АПР» менші, знайдених за «ОПР», і розходження значень сягає 33%.

Нормальні напруження σ_{zz} згідно «АПР» більші, від обчислених за «ОПР», і посередині твірної для $\psi = 60^\circ$ розбіжність складає 46%.

Відмінність у 2% досягається між значеннями нормальних напружень в коловому напрямку $\sigma_{\theta\theta}$ знайденими за двома підходами «АПР» та «ОПР».

Розходження між величинами переміщень u_r , знайденими за підходами «АПР» та «ОПР», досягає 9% при $\psi = 60^\circ$. Також при куті $\psi = 60^\circ$ розбіжність між величинами зміщень в осьовому напрямку обчисленими згідно цих двох підходів сягає 61%.

Для розглядуваних циліндрів, приведемо результати розв'язку даної задачі за товщиною оболонки.

В таблиці 2.12 приведений розподіл за товщиною параметрів напружено-деформованого стану: напружень (нормальних σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$; дотичних τ_{rz} ,

$\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$) та переміщень (u_r , u_z , u_θ), здобутих для одношарових оболонок з використанням пропонованого тривимірного підходу (2.12) – (2.14). Структура таблиці 2.12 така. В першій колонці вказана координата точки за товщиною оболонки для якої визначався параметр НДС. Друга колонка – це значення кута ψ (кута повороту головних напрямів пружності матеріалу відносно до напрямку меридіана циліндру). Третя – підхід до розв’язку задачі «АПР» або «ОПР» Всі інші колонки являють собою значення відповідно приведених напружень σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ і приведених переміщень u_r , u_z , u_θ .

Для кожної координати за товщиною циліндра маємо два рядки компонентів напружено-деформованого стану: верхній рядок відповідає розв’язку системи (2.12) згідно до підходу «АПР», нижній – підхід «ОПР».

При цьому в таблиці 2.12 представлені максимальні значення величин НДС відповідно до графіків 2.4-2.9 та табл. 2.8-2.11: для σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r для координати твірної циліндра $z=0,5L$; для $\tau_{z\theta}$, τ_{rz} та u_z – $z=0$ і у випадку параметрів $\tau_{r\theta}$ та u_θ – $z=0,25L$.

Згідно табл. 2.12 покажемо характер зміни параметрів напружено-деформованого стану циліндричної оболонки в залежності від кута повороту осей ортотропії матеріалу ψ .

Таблиця 2.12

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за товщиною одношарової товстостінної циліндричної оболонки при дії розподіленого бокового тиску

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			σ_{rr}/q_0	τ_{rz}/q_0	$\tau_{r\theta}/q_0$	σ_{zz}/q_0	$\sigma_{\theta\theta}/q_0$	$\tau_{z\theta}/q_0$	$\frac{u_r}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	$\frac{u_z}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$	$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1 10}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	-1,0	0,0	0,0	-9,0146	-4,6373	0,0	-1,6313	0,1924	0,0
		ОПР	-1,0	0,0	0,0	-9,0146	-4,6373	0,0	-1,6313	0,1921	0,0
0,64		АПР	-0,8750	-0,3918	0,0	-5,7469	-4,6581	0,0	-1,6364	0,1102	0,0
		ОПР	-0,8750	-0,3918	0,0	-5,7469	-4,6581	0,0	-1,6364	0,1102	0,0
0,62		АПР	-0,7247	-0,6284	0,0	-2,6812	-4,6893	0,0	-1,6422	0,0335	0,0
		ОПР	-0,7247	-0,6284	0,0	-2,6812	-4,6893	0,0	-1,6422	0,0335	0,0
0,60		АПР	-0,5555	-0,7133	0,0	0,2883	-4,7315	0,0	-1,6490	-0,0407	0,0
		ОПР	-0,5555	-0,7133	0,0	0,2883	-4,7315	0,0	-1,6490	-0,0407	0,0
0,56		АПР	-0,1861	-0,4115	0,0	6,3672	-4,8517	0,0	-1,6665	-0,1927	0,0
		ОПР	-0,1861	-0,4115	0,0	6,3672	-4,8517	0,0	-1,6665	-0,1927	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	9,7057	-4,9309	0,0	-1,6773	-0,2764	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	9,7057	-4,9309	0,0	-1,6773	-0,2764	0,0
0,66	30	АПР	-1,0	0,0	0,0	-6,0201	-6,6179	-1,0849	-1,9674	-0,1319	0,0058
		ОПР	-1,0	0,0	0,0	-5,9688	-6,6002	0,0	-1,9670	-0,1362	0,0
0,64		АПР	-0,8267	-0,2532	0,0942	-3,8393	-6,0269	-0,6631	-1,9709	-0,2323	0,0050
		ОПР	-0,8271	-0,2591	0,0	-3,7897	-6,0096	0,0	-1,9706	-0,2363	0,0
0,62		АПР	-0,6498	-0,4042	0,1514	-1,7808	-5,4868	-0,2804	-1,9756	-0,3291	0,0032
		ОПР	-0,6503	-0,4143	0,0	-1,7381	-5,4717	0,0	-1,9750	-0,3320	0,0
0,60		АПР	-0,4737	-0,4565	0,1725	0,2047	-4,9840	0,0806	-1,9811	-0,4241	0,0009
		ОПР	-0,4741	-0,4682	0,0	0,2374	-4,9719	0,0	-1,9804	-0,4257	0,0
0,56		АПР	-0,1430	-0,2603	0,1012	4,1514	-4,0359	0,8066	-1,9954	-0,6171	-0,0031
		ОПР	-0,1429	-0,2663	0,0	4,1646	-4,0299	0,0	-1,9946	-0,6161	0,0

Продовження таблиці 2.12

0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	6,2139	-3,5625	1,2088	-2,0039	-0,7190	-0,0038
		ОПР	0,0	0,0	0,0	6,2224	-3,5580	0,0	-2,0033	-0,7177	0,0
0,66		АПР	-1,0	0,0	0,0	-1,1836	-5,6919	0,0655	-0,5613	-0,2139	0,0806
		ОПР	-1,0	0,0	0,0	-0,5412	-5,8207	0,0	-0,6115	-0,3876	0,0
0,64		АПР	-0,8549	-0,0177	-0,0063	-1,0041	-5,5672	0,0498	-0,5528	-0,2428	0,0783
		ОПР	-0,8515	-0,0233	0,0	-0,3351	-5,6465	0,0	-0,6011	-0,4189	0,0
0,62		АПР	-0,7033	-0,0277	-0,0111	-0,8368	-5,4732	0,0306	-0,5457	-0,2707	0,0761
		ОПР	-0,6975	-0,0367	0,0	-0,1433	-5,5064	0,0	-0,5920	-0,4492	0,0
0,60		АПР	-0,5438	-0,0307	-0,0139	-0,6811	-5,4124	0,0058	-0,5400	-0,2981	0,0742
		ОПР	-0,5370	-0,0408	0,0	0,0354	-5,4014	0,0	-0,5844	-0,4788	0,0
0,56		АПР	-0,1945	-0,0164	-0,0097	-0,4034	-5,4049	-0,0695	-0,5334	-0,3525	0,0701
		ОПР	-0,1902	-0,0222	0,0	0,3578	-5,3047	0,0	-0,5737	-0,5373	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,2813	-5,4686	-0,1263	-0,5328	-0,3801	0,0678
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,5029	-5,3193	0,0	-0,5710	-0,5669	0,0
0,66		АПР	-1,0	0,0	0,0	-0,2542	-5,6022	0,0	-0,2309	-0,0345	0,0
		ОПР	-1,0	0,0	0,0	-0,2542	-5,6022	0,0	-0,2309	-0,0345	0,0
0,64		АПР	-0,8575	-0,0111	0,0	-0,1648	-5,5053	0,0	-0,2222	-0,0461	0,0
		ОПР	-0,8575	-0,0111	0,0	-0,1648	-5,5053	0,0	-0,2222	-0,0461	0,0
0,62		АПР	-0,7079	-0,0180	0,0	-0,0778	-5,4402	0,0	-0,2150	-0,0570	0,0
		ОПР	-0,7079	-0,0180	0,0	-0,0778	-5,4402	0,0	-0,2150	-0,0570	0,0
0,60		АПР	-0,5497	-0,0204	0,0	0,0082	-5,4122	0,0	-0,2094	-0,0674	0,0
		ОПР	-0,5497	-0,0204	0,0	0,0082	-5,4122	0,0	-0,2094	-0,0674	0,0
0,56		АПР	-0,1987	-0,0117	0,0	0,1826	-5,4953	0,0	-0,2034	-0,0877	0,0
		ОПР	-0,1987	-0,0117	0,0	0,1826	-5,4953	0,0	-0,2034	-0,0877	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,2743	-5,6246	0,0	-0,2033	-0,0981	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,2743	-5,6246	0,0	-0,2033	-0,0981	0,0

При цьому, представимо їх залежність від ψ для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_r на зовнішній поверхні, а для σ_{rr} , u_θ на серединній поверхні для тих перерізів, де вони приймають близькі до максимальних значення: для σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r для координати твірної циліндра $z=0.5L$; для $\tau_{z\theta}$ – $z=0$ і у випадку параметра u_θ – $z=0.25L$.

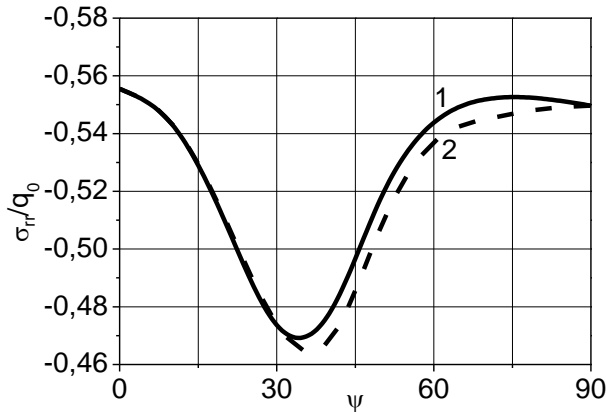


Рис. 2.10. Розподіл напружень σ_{rr} на серединній поверхні циліндра

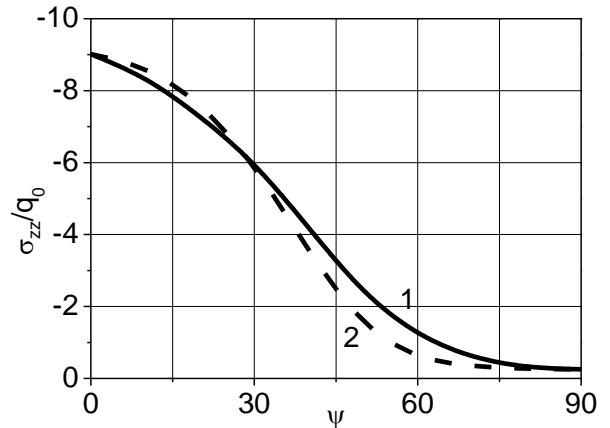


Рис. 2.11. Розподіл напружень σ_{zz} на зовнішній поверхні циліндра

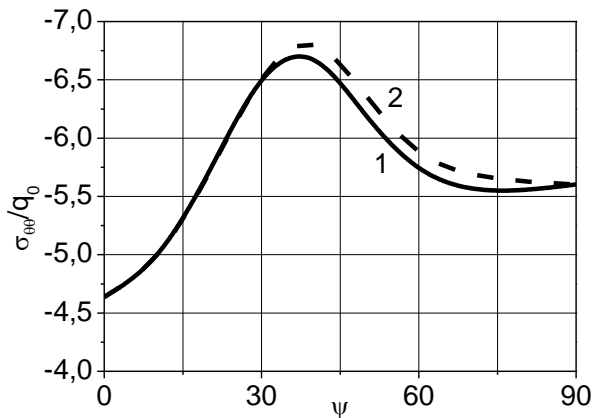


Рис. 2.12. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

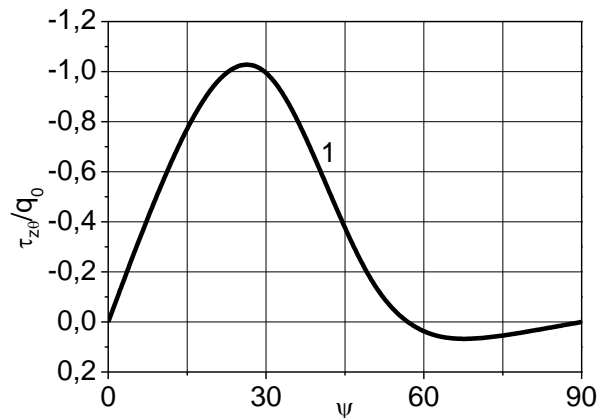


Рис. 2.13. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

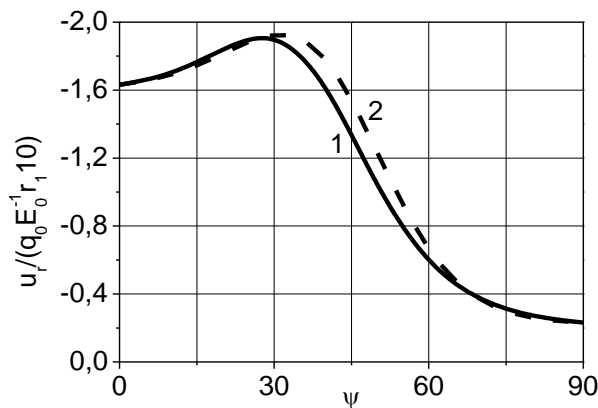


Рис. 2.14. Розподіл переміщень u_r на зовнішній поверхні циліндра

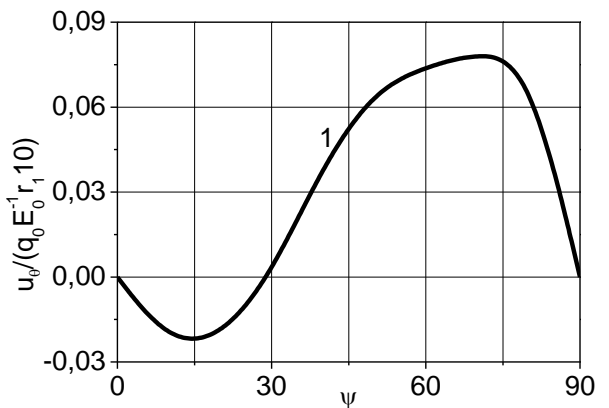


Рис. 2.15. Розподіл переміщень u_θ на серединній поверхні циліндра

З рис. 2.10-2.15 видно, що від дії симетричного навантаження (бокового тиску) – напружено-деформований стан одношарової анізотропної циліндричної оболонки при розрахунку згідно до приведеного підходу «АПР» стає більш складним порівняно із підходом «ОПР». Підтвердженням цього є наявність в напружено-деформованому стані анізотропної оболонки дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.13) та переміщень u_θ (рис. 2.15). На рисунках 2.10-2.15 кривими під номером 1 (суцільна лінія) позначені результати здобуті згідно до підходу «АПР», а графіки 2 (штрихова лінія) – згідно до підходу «ОПР».

З аналізу результатів табл. 2.12 та графіків рис. 2.10-2.15 видно, що при зростанні кута ψ величини напружень та переміщень змінюють свої значення як з урахуванням анізотропних констант матеріалу «АПР», так і без них «ОПР».

Нормальні напруження σ_{rr} (рис. 2.10) на початковому етапі зростання кута ψ до 40° зменшують свої значення в подальшому зростають при обох підходах до їх визначення. Так при $30^\circ \leq \psi \leq 40^\circ$ величини σ_{rr} отримують найменші значення, розходження між ними та значеннями σ_{rr} отриманими при $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ досягають 16%. При цьому величини отримані з урахуванням анізотропних констант матеріалу дещо менші, до 1,9% за визначені без їх урахування.

Збільшення кута повороту головних напрямів пружності матеріалу $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ веде до зменшення, за абсолютним значенням, величин дотичних напружень τ_{rz} (табл. 2.12) та нормальних напружень σ_{zz} (рис. 2.11), які спадають на всьому діапазоні збільшення кута ψ . Видно, що для величин τ_{rz} отриманих при $\psi = 0^\circ$ та 90° різниця складає 97%, а для σ_{zz} – 96%. Також максимальні розходження між величинами цих напружень знайдених згідно двох підходів «АПР» та «ОПР» отримуються при куті $\psi = 50^\circ$ складають 17% для τ_{rz} та 40% для σ_{zz} .

Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ (табл. 2.12) та $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.13), що виникають лише при врахуванні анізотропних сталих матеріалу, на початковому етапі збільшення кута ψ до 30° зростають в подальшому спадають, змінюючи знак на протилежний, при $\psi = 60^\circ$.

Максимальні значення нормальних напружень $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2.12) виникають при $\psi = 40^\circ$, де вони більші за отримані при $\psi = 0^\circ$ на 47%. Врахування анізотропних констант матеріалу в розрахунках призводить до того, що величини цих напружень при $\psi = 70^\circ$ зменшуються на 3%.

Переміщення u_r (рис. 2.14), зростаючи в діапазоні зміни кута $0^\circ \leq \psi \leq 30^\circ$, в подальшому спадають. Розходження між значеннями для переміщень, що отримані при $\psi = 0^\circ$ та $\psi = 90^\circ$ складає 88%. Також підхід «АПР» дає результати менші порівняно з підходом «ОПР» досягаючи 11% при $\psi = 40^\circ$.

Зменшення величин переміщень u_z (табл. 2.12), при використанні підходу «АПР», для кута $\psi = 50^\circ$, сягає 37% порівняно з підходом «ОПР».

Також необхідно вказати на появу переміщень в коловому напрямку u_θ (рис. 2.15) у випадку врахування анізотропних констант матеріалу, що змінюючись в залежності від кута ψ досягають максимальних значень при $\psi = 70^\circ$ та мінімальних при $\psi = 10^\circ$, розходження, в абсолютних значеннях, між цими даними складає 70%.

На рис. 2.16-2.21 наведені графіки в осях: відносна величина параметру НДС (вісь ординат) – координата за товщиною оболонки (вісь абсцис), що побудовані для кутів ψ рівних: $0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ для максимальних значень величин НДС одношарової циліндричної оболонки під розподілим зовнішнім тиском згідно результатів приведених в табл. 2.12. На рис. 2.16 представлений розподіл за товщиною оболонки нормального напруження σ_{rr} , рис. 2.17 – напруження σ_{zz} , рис. 2.18 – $\sigma_{\theta\theta}$, рис. 2.19 – дотичного напруження $\tau_{z\theta}$, рис. 2.20 характеризує розподіл переміщення u_r і рис. 2.21 – переміщення u_θ . При цьому нумерація кривих відповідає наступним кутам ψ : 1 – $\psi = 0^\circ$;

2 – $\psi = 30^\circ$; 3 – $\psi = 60^\circ$; 4 – $\psi = 90^\circ$; 5 – $\psi = 10^\circ$; 6 – $\psi = 80^\circ$, а також 2' – $\psi = 30^\circ$; 3' – $\psi = 60^\circ$; 5' – $\psi = 10^\circ$; 6' – $\psi = 80^\circ$ отримані для відповідних кутів відхилення осей ортотропії від координатних при розв'язку системи (2.12) з нульовими «не ортотропними» членами (2.3): c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} , підхід «ОПР».

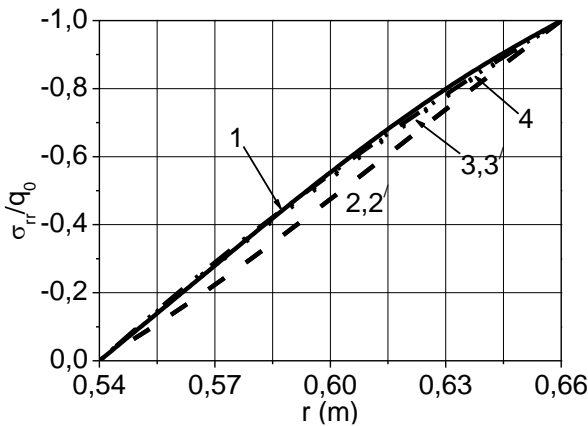


Рис. 2.16. Розподіл напружень σ_{rr} за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

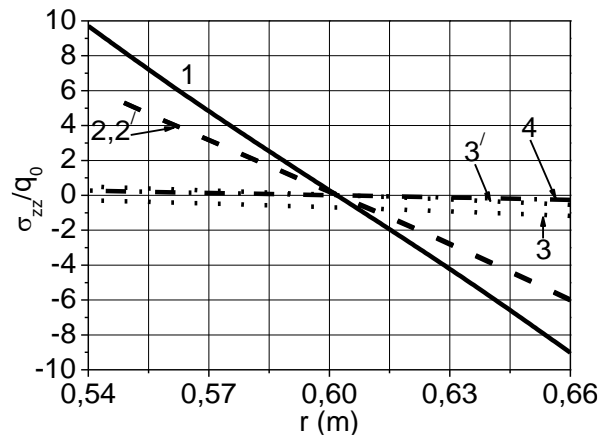


Рис. 2.17. Розподіл напружень σ_{zz} за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

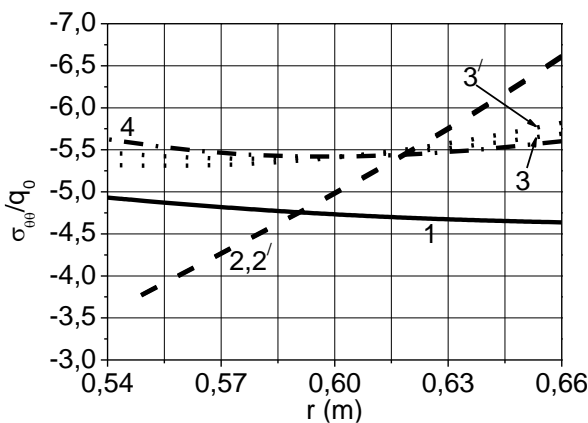


Рис. 2.18. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

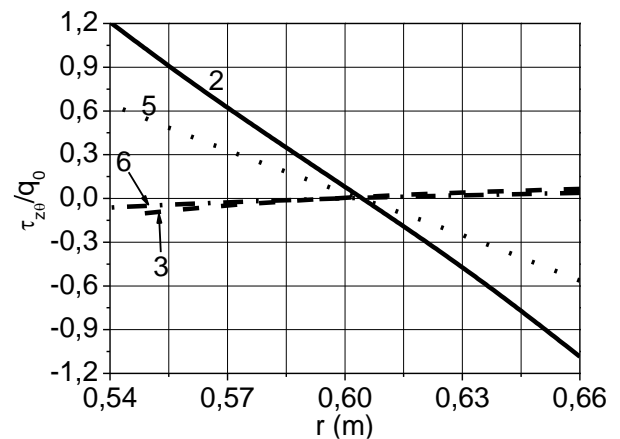


Рис. 2.19. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0$

З аналізу результатів приведених в таблиці 2.12 та на рисунках 2.16-2.21 видно, що величини нормальних напружень σ_{rr} (рис. 2.16) змінюються за товщиною циліндра за законом прямої лінії, від значення рівного прикладеному розподіленому навантаженню на навантаженій зовнішній поверхні до нуля на незавантаженій внутрішній.

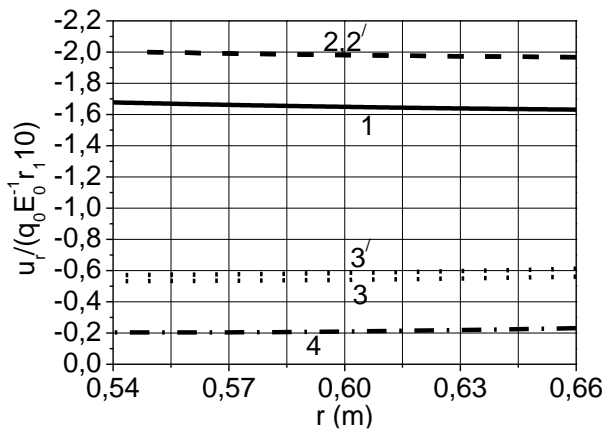


Рис. 2.20. Розподіл переміщень u_r за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

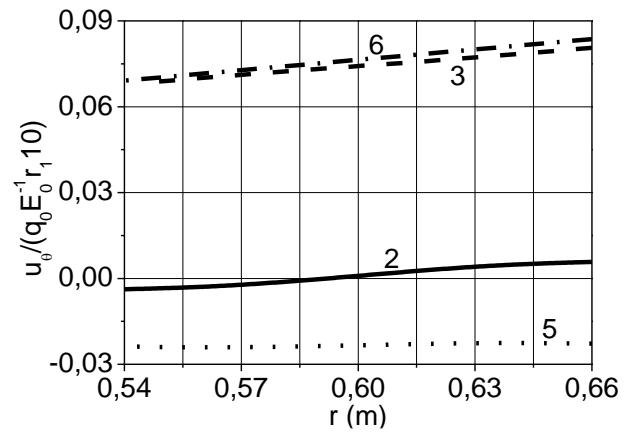


Рис. 2.21. Розподіл переміщень u_θ за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0,25$

Дотичні напруження τ_{rz} та $\tau_{r\theta}$ (табл. 2.12), змінюючись за товщиною, приймають максимальні значення на серединній поверхні оболонки та нульові на зовнішній та внутрішній поверхнях.

Нормальні напруження σ_{zz} (рис. 2.17) отримують у випадку розподіленого навантаження максимальні значення на внутрішній та зовнішній поверхнях і змінюються за товщиною практично за лінійним законом, змінюючи знак від додатного на внутрішній до від'ємного на зовнішній поверхні оболонки.

Нормальні напруження в коловому напрямку $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2.18), змінюючись за товщиною циліндра за законом близьким до закону прямої лінії, не змінюють свої знаки. Причому при кутах $30^0 \leq \psi \leq 50^0$ виникає суттєва, до 47% різниця між значеннями цих напружень на зовнішній та внутрішній поверхнях.

Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.19) отримують максимальні значення на поверхнях оболонки. При цьому так само як і для напружень σ_{zz} величини $\tau_{z\theta}$ мають протилежні знаки на зовнішній та внутрішній поверхнях.

Переміщення u_r (рис. 2.20) не суттєво змінюються за товщиною як для випадку розрахунку згідно підходу «АПР», так і підходу «ОПР».

Зміна переміщень u_z (табл. 2.12) за товщиною відбувається за лінійним законом при цьому для діапазону зміни кутів $0^0 \leq \psi \leq 20^0$ відбувається зміна знаку даного переміщення від додатного на зовнішній поверхні до від'ємного

на внутрішній. В іншому діапазоні $30^0 \leq \psi \leq 90^0$ осьове зміщення від'ємне по всій товщині.

Переміщення в коловому напрямку u_θ (рис. 2.21) незначно змінюються за товщиною, розходження між величинами на зовнішній та внутрішній поверхнях досягає 20%.

Описані вище зміни компонентів напружено-деформованого стану анізотропних циліндрів за товщиною в залежності від кута повороту осей ортотропії до напрямку меридіана оболонки пов'язані з перерозподілом фізико-механічних характеристик матеріалу (2.3), що має властивості однієї площини пружної симетрії при зміні кута ψ .

Таким чином, пропонується підхід «АПР» до розв'язку задач НДС анізотропних циліндрів в якому враховуються всі фізико-механічні константи матеріалу з однією площиною пружної симетрії уточнює результати отримані з використанням підходу «ОПР», а також дозволяє визначати дотичні напруження $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_θ . Ці напруження та переміщення обов'язково мають бути враховані при аналізі НДС анізотропних циліндрів так як досягають значних, для $\tau_{z\theta}$ до 20%, величин у порівнянні з коловими напруженнями $\sigma_{\theta\theta}$.

2.6.1.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки

Розглянемо характер зміни напруженого та деформованого стану анізотропних оболонок, в залежності від кута ψ . Геометричні та механічні характеристики оболонок такі ж як і в попередньому підпункті 2.6.1.1, лише вони є дво-, три- та чотиришарові.

При цьому, для двошарових оболонок шаруватий пакет є симетричним відносно серединної поверхні та має координати поверхонь внутрішнього $r_1=0,54\text{м}$, $r_{s1}=0,6\text{м}$ та зовнішнього $r_{s2}=0,6\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ шарів.

Кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару « $+\psi$ ». У випадку тришарових оболонок, маємо для внутрішнього $r_1=0,54\text{м}$, $r_{s1}=0,58\text{м}$ та зовнішнього $r_{s3}=0,62\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ шарів кут повороту головних напрямків пружності матеріалу до напрямку меридіана оболонки « $+\psi$ »; для серединного шару: $r_{s1}=0,58\text{м}$, $r_{s2}=0,62\text{м}$, кут має значення « $-\psi$ ». Для чотиришарових циліндрів пакет зібраний симетрично відносно серединної поверхні і кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару визначається величиною « $+\psi$ ». Результати досліджень представимо графічно.

Структура рис. 2.22-2.27 повністю відповідає рис. 2.10-2.15, де приведені результати для одношарових оболонок. Загальне орієнтування кривих, що описують нормальні, дотичні напруження та переміщення дозволяє зробити якісний висновок про ту ж тенденцію щодо їх розподілу відповідно до графіків, представлених на рис. 2.10-2.15. Тому проведемо об'єднуючі ілюстративні дані для одно-, дво-, три- та чотиришарових анізотропних оболонок. При цьому позначення кривих на рис. 2.22-2.27 таке: 1 – одношарова оболонка, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова і 1' – представляє результати отримані для циліндра без урахування анізотропних констант матеріалу, підхід «ОПР».

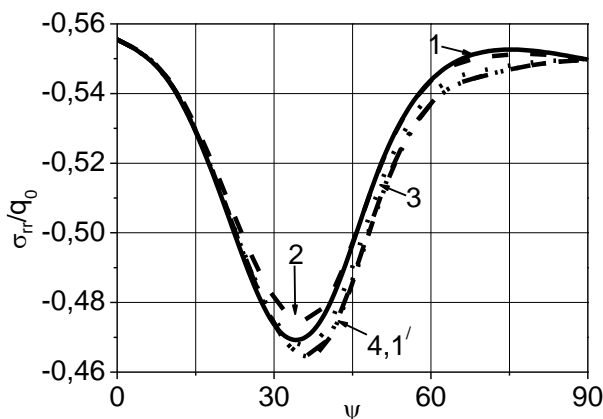


Рис. 2.22. Розподіл напружень σ_{rr} на серединній поверхні циліндра

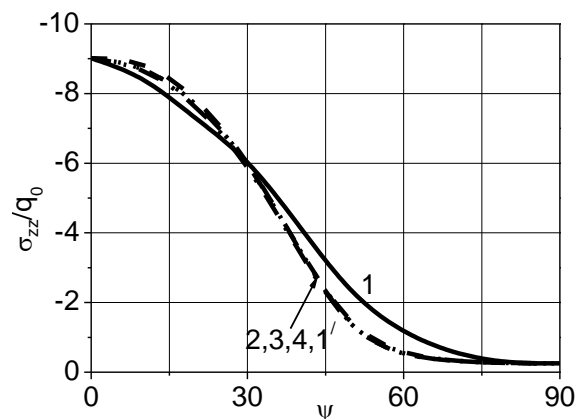


Рис. 2.23. Розподіл напружень σ_{zz} на зовнішній поверхні циліндра

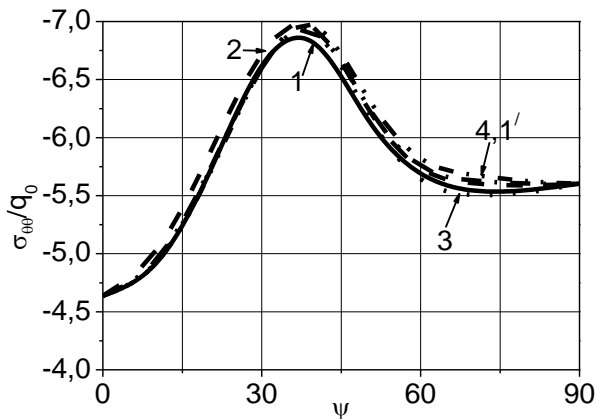


Рис. 2.24. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

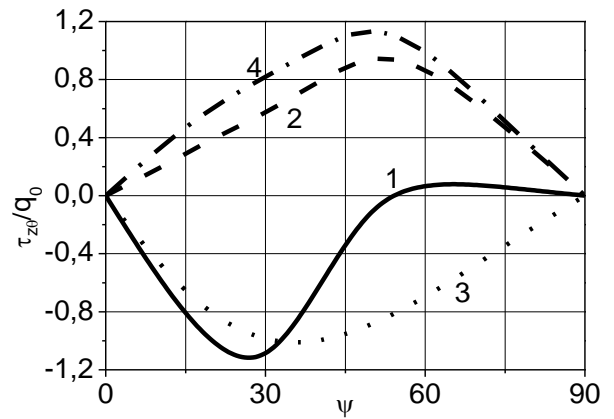


Рис. 2.25. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

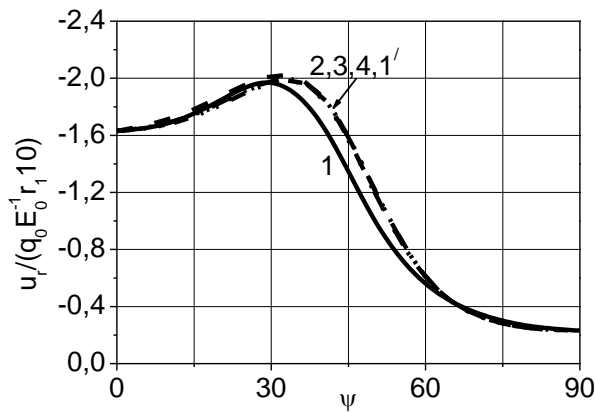


Рис. 2.26. Розподіл переміщень u_r на зовнішній поверхні циліндра

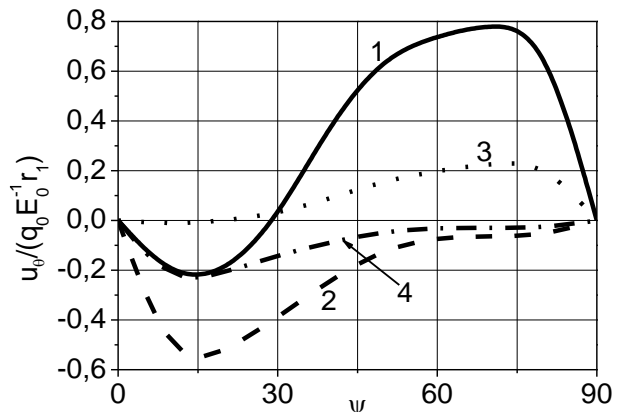


Рис. 2.27. Розподіл переміщень u_θ на серединній поверхні циліндра

Рис. 2.22 представляє нормальні напруження σ_{rr} . Як видно з графіків величини цих напружень із збільшенням кількості шарів наближаються до значень здобутих для ортотропної оболонки (крива 1'). Криві на рис. 2.23 та 2.24 характеризують залежність нормальних напружень σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ відповідно від кута повороту ψ . З цих рисунків видно, що збільшення кількості шарів призводить до наближення значень σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ здобутих згідно підходу «АПР» до величин, отриманих для ортотропної оболонки (крива 1'). Графіки 1-4, що представлені на рис. 2.25, описують дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ відповідно для одно-, дво-, три- та чотиришарових анізотропних оболонок. Видно, що знак $\tau_{z\theta}$ залежить від знаку кута повороту ψ шару зовнішньої поверхні до якого прикладене розподілене зовнішнє навантаження. Якщо для одношарового

циліндра (крива 1) та для зовнішнього шару тришарового (крива 3) має місце орієнтація осей ортотропії « $+\psi$ », то напруження $\tau_{z\theta}$ або від'ємні в усьому діапазоні зміни ψ , або їх максимальні значення є від'ємними. Для випадків дво- (крива 2) та чотиришарових (крива 4) оболонок, де зовнішній шар повертається на кут « $-\psi$ », величини $\tau_{z\theta}$ – додатні. Водночас збільшення кількості шарів від одного до трьох призводить до зменшення максимальних значень напружень орієнтовно на 8% із зміщенням максимуму від $\psi=30^0$ до $\psi=40^0$. Збільшення ж кількості шарів від двох до чотирьох призводить до зростання максимальних величин $\tau_{z\theta}$ на 17%, при максимумі для $\psi=50^0$ в обох випадках. З рис. 2.26 випливає, що збільшення кількості шарів від одного (крива 1) до чотирьох (крива 4) веде до того, що величини переміщень u_r наближаються до значень отриманих для ортотропного циліндра (крива 1'). Знаки величин переміщень в коловому напрямку u_θ , як видно з графіків рис. 2.27, так само як і дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ залежать від орієнтації шару до якого прикладене розподілене бокове навантаження. Для одно- та тришарової оболонок (криві 1 та 3 відповідно) максимальні значення u_θ – додатні, для дво- та тришарової (криві 2 та 4 відповідно) – від'ємні. В той же час збільшення кількості шарів призводить до зменшення цих переміщень від одного до чотирьох шарів, за абсолютним значенням, це зменшення сягає 67%. Таким чином, збільшення кількості шарів $\pm\psi$ сприяє тому, що переміщення u_θ прямують до нуля.

2.6.1.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском

З аналізу робіт присвячених дослідженню стійкості та вільних коливань анізотропних оболонкових конструкцій утворених перехресним укладанням шарів головні напрями пружності яких повернуті на кут $\pm\psi$ відносно

меридіану оболонки [31, 145] відомо, що при збільшенні кількості шарів вище деякої межі (7÷8 шарів) такі оболонки починають проявляти характеристики ортотропних. Тобто при їх розрахунку можна не враховувати механічні характеристики анізотропного матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} . Водночас в [86] розглядається циліндр, пружні характеристики якого за товщиною можливо розглядати як апроксимацію властивостей десятишарової оболонки, зібраної почергово з шарів з кутами армування $\psi = 15^\circ$ та $\psi = 90^\circ$. З представлених результатів видно, що анізотропні дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ у випадку симетричного в коловому напрямку розподіленого навантаження складають майже 30% від відповідних величин для σ_{zz} та 15% у порівнянні з $\sigma_{\theta\theta}$.

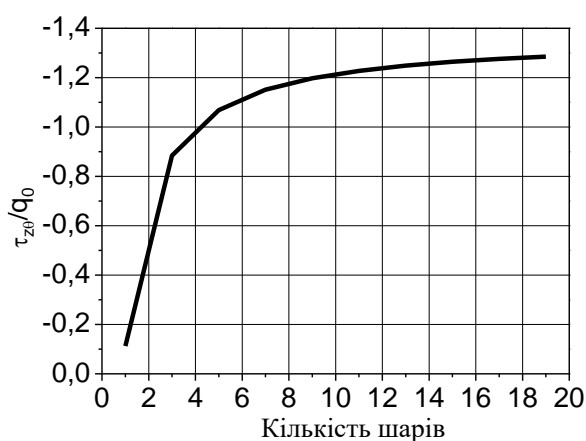
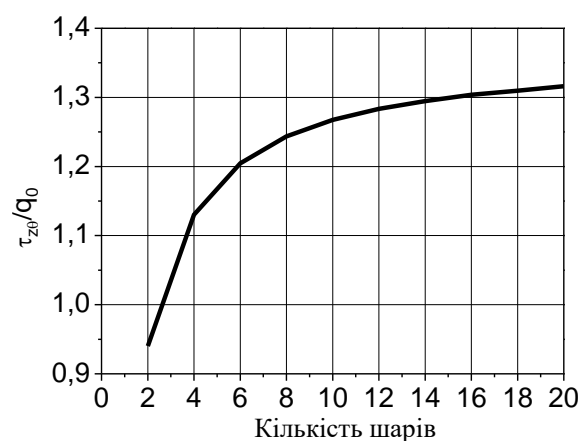
Тому, представляє інтерес дослідження впливу збільшення кількості шарів, головні напрями пружності яких повернуті на кути $\pm\psi$ до напрямку меридіана оболонки, на компоненти напружено-деформованого стану циліндричної оболонки. Йдеться про те, що як відомо, дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ і $\tau_{r\theta}$ та переміщення в коловому напрямку u_θ можливо визначити лише при урахуванні анізотропних констант матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} .

Розглянемо оболонкову конструкцію з геометричними, механічними характеристиками та навантаженням описаними в попередніх пунктах 2.6.1.1-2.6.1.2. Кут повороту осей ортотропії $\psi = \pm 50^\circ$. Величини $\tau_{z\theta}$ визначатимемо для координати $z=0$ вздовж твірної на зовнішній поверхні циліндра при $r=0,66\text{м}$, значення $\tau_{r\theta}$ та u_θ обчислимо для координати $z=0,25L$ на серединній поверхні оболонки при $r=0,60\text{м}$. Результати приведено в табл. 2.13 та на рис. 2.28-2.31.

Таблиця 2.13

Вплив збільшення кількості шарів $\pm\psi$ на компоненти напружено-деформованого стану товстостінної циліндричної оболонки отримані за підходом «АПР»

Кількість шарів	$\tau_{r\theta}/q_0$	$\tau_{z\theta}/q_0$	$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1}$
1	0,0143	-0,1126	0,6623
2	-0,2967	0,9400	-0,1135
3	0,0322	-0,8842	0,1599
4	0,0136	1,1302	-0,0450
5	0,0131	-1,0685	0,1087
6	-0,1004	1,2046	-0,0388
7	0,0127	-1,1509	0,0714
8	0,0068	1,2435	-0,0231
9	0,0080	-1,1978	0,0589
10	-0,0603	1,2674	-0,0233
11	0,0077	-1,2272	0,0462
12	0,0046	1,2835	-0,0154
13	0,0058	-1,2486	0,0405
14	-0,0399	1,2947	-0,0209
15	0,0056	-1,2641	0,0339
16	0,0034	1,3039	-0,0116
17	0,0045	-1,2762	0,0307
18	-0,0342	1,3097	-0,0132
19	0,0044	-1,2849	0,0270
20	0,0027	1,3162	-0,0093

Рис. 2.28. Залежність напружень $\tau_{z\theta}$ від збільшення непарної кількості шарів $\pm\psi$ Рис. 2.29. Залежність напружень $\tau_{z\theta}$ від збільшення парної кількості шарів $\pm\psi$

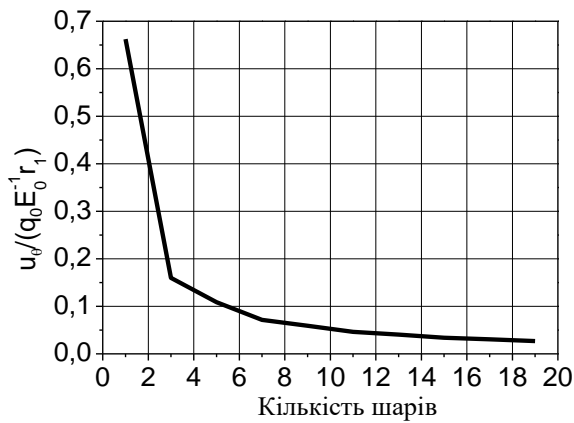


Рис. 2.30. Залежність переміщень u_θ від збільшення непарної кількості шарів $\pm \psi$

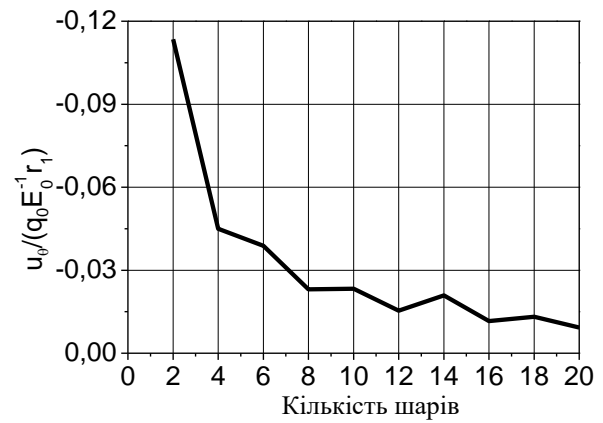


Рис. 2.31. Залежність переміщень u_θ від збільшення парної кількості шарів $\pm \psi$

З аналізу результатів приведених в табл. 2.13 та на рис. 2.28-2.31 можемо зробити висновок, що величини дотичних напружень $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_θ при збільшенні кількості шарів, головні напрямки пружності яких знаходяться під кутом $\psi = \pm 50^\circ$ до меридіану циліндричної оболонки, зменшуються та прямують до нуля. Так напруження $\tau_{r\theta}$ табл. 2.13 при двадцяти шарах складають 18% від їх значень для одного шару, а переміщення u_θ рис. 2.30-2.31 для 20 шарів лише 1,5% від цих же переміщень в одношаровій оболонці. На противагу цьому дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ рис. 2.28-2.29 при збільшенні кількості шарів $\psi = \pm 50^\circ$ зростають поступово усталюючись як для парної, так і для непарної кількості шарів. При цьому, нормальні напруження σ_{zz} складають майже 20% від максимальних значень напружень $\sigma_{\theta\theta}$. Напруження ж $\tau_{z\theta}$ різко зростають, на порядок, від одного до дев'яти шарів для непарної кількості шарів та на 32% при збільшенні кількості шарів від 2-х до 8-и. Наступне збільшення шарів від дев'яти до одинадцяти та від восьми до десяти призводить до зростання величин $\tau_{z\theta}$ до 2% і при подальшому збільшенні кількості шарів вони ще зменшуються.

В табл. 2.14 та на рис. 2.32-2.33 показаний розподіл компонентів напружено-деформованого стану $\tau_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ та u_θ за товщиною десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ циліндричної оболонки під дією розподіленого бокового тиску.

Таблиця 2.14

Розподіл компонентів напружено-деформованого стану за товщиною десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ циліндричної оболонки під дією розподіленого бокового тиску

$r, \text{ м}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{q_0}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{q_0}$	$\frac{u_\theta}{q_0 E_0^{-1} r_1}$
0,660	0,000	1,2674	-0,0493
0,654	-0,0396	1,2336	-0,0476
0,648	-0,0790	1,2059	-0,0433
0,648	-0,0790	-1,3835	-0,0433
0,642	-0,0374	-1,3375	-0,0376
0,636	0,0037	-1,2981	-0,0347
0,636	0,0037	1,1561	-0,0347
0,630	-0,0324	1,1232	-0,0349
0,624	-0,0682	1,0962	-0,0327
0,624	-0,0682	-1,2302	-0,0327
0,618	-0,0312	-1,1881	-0,0267
0,612	0,0053	-1,1523	-0,0233
0,612	0,0053	1,0570	-0,0233
0,606	-0,0276	1,0264	-0,0245
0,600	-0,0603	1,0016	-0,0233
0,600	-0,0603	-1,0971	-0,0233
0,594	-0,0274	-1,0595	-0,0175
0,588	0,0052	-1,0279	-0,0142
0,588	0,0052	0,9695	-0,0142
0,582	-0,0250	0,9427	-0,0155
0,576	-0,0551	0,9215	-0,0144
0,576	-0,0551	-0,9807	-0,0144
0,570	-0,0257	-0,9484	-0,0095
0,564	0,0034	-0,9219	-0,0069
0,564	0,0034	0,8935	-0,0069
0,558	-0,0245	0,8718	-0,0074
0,552	-0,0524	0,8557	-0,0055
0,552	-0,0524	-0,8782	-0,0055
0,546	-0,0261	-0,8520	-0,0019
0,540	0,000	-0,8314	-0,0007

Аналізуючи результати приведені в табл. 2.14 та на рис. 2.32-2.33 можемо зробити такі висновки. Величини напружень $\tau_{z\theta}$ рис. 2.32 та переміщень u_θ рис. 2.33 зменшуються вздовж стінки циліндра від навантаженої поверхні до вільної. Для дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ це зменшення складає 34%, а для переміщення u_θ зменшуються практично до нуля.

Величини дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ при дії розподіленого бокового тиску на шаруватий циліндр змінюють свої знаки при переході від шару до шару на протилежні, але незначно змінюються в межах 5% для окремих шарів.

Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ (табл. 2.14) мають локальні максимуми в точках контакту шарів. За товщинами окремих шарів вони змінюють свої величини зі зміною їх знаків. Характер зміни переміщень u_θ також залежить від орієнтації шарів.

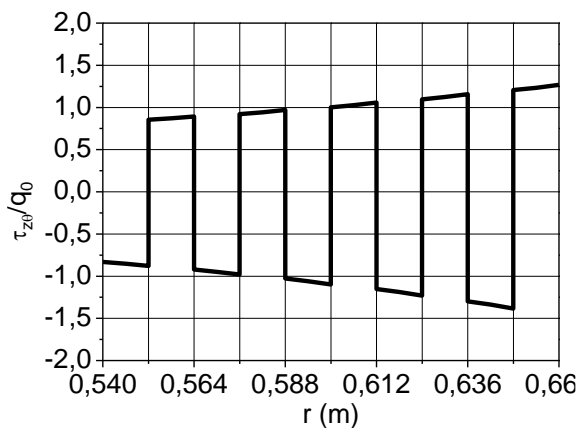


Рис. 2.32. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною десятишарової $\pm\psi$ циліндричної оболонки

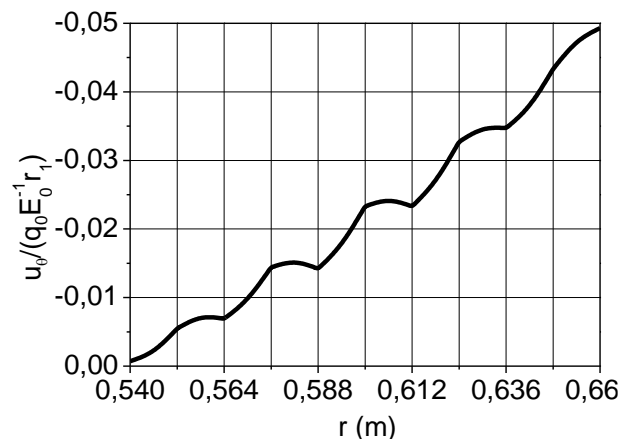


Рис. 2.33. Розподіл переміщень u_θ за товщиною десятишарової $\pm\psi$ циліндричної оболонки

2.6.1.4. Напружено-деформований стан циліндричних анізотропних оболонок під розподіленим боковим тиском для різних умов закріплення торців оболонок

На рис. 2.34-2.39 представлено розподіл компонентів напружено-деформованого стану: напружень (нормальних σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ і дотичних $\tau_{z\theta}$) та переміщень (u_r , u_z , u_θ). Вони вираховані для одношарових оболонок в залежності від кута повороту ψ головних напрямів пружності матеріалу відносно напрямку меридіана циліндра при використанні пропонованого тривимірного підходу «АПР» (2.12) – (2.14) для різних граничних умов на торцях (2.7) – (2.10).

Розглянуто такі типи закріплення: 31 – на обох торцях виконуються умови

($\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$); 32 – на одному торці мають місце умови ($\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$), а на іншому ($\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0$); 33 – на обох торцях виконуються умови ($\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0$); 34 – один торець спирається при використанні умов ($\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0$) інший – ($\sigma_{zz} = \tau_{z\theta} = u_r = 0$).

Досліджено циліндричні оболонки виготовлені із боропластику механічні характеристики якого приведені в підпункті 2.6.1 з такими геометричними характеристиками: відношення довжини $L=1,2\text{м}$ до радіуса серединної поверхні оболонки r рівне двом ($L/r=2$), відношення товщини до радіуса $h/r=0,2$. Радіус внутрішньої поверхні $r_1=0,54\text{м}$, зовнішньої – $r_2=0,66\text{м}$.

До зовнішньої поверхні оболонкових конструкцій прикладений зовнішній розподілений боковий тиск, який для граничних умов 31 описується залежністю $q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$, для 32 – $q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)$, для 33 – $q = -q_0 \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)$, для 34 – $q = -q_0 \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right)$.

На графіках представимо залежність максимальних величин параметрів НДС від кута ψ для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_r на зовнішній поверхні, а для u_z , u_θ на рівні серединної поверхні.

На рис. 2.34-2.39 прийнята така система позначень: крива 1 характеризує умови на торцях оболонки виду 31, графік 2 відповідає умовам 32, графічна залежність 3 – умови 33 та крива 4 – умови 34.

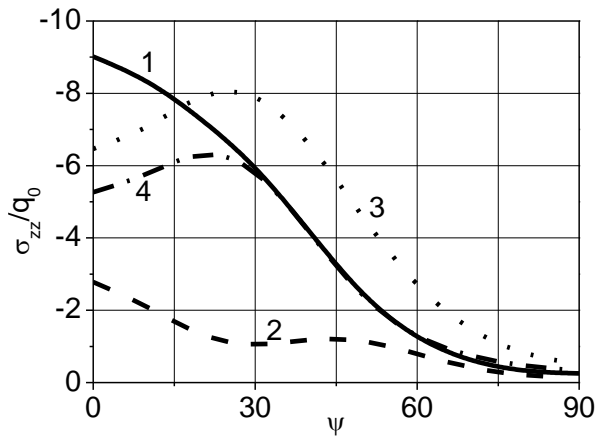


Рис. 2.34. Розподіл напружень σ_{zz} на зовнішній поверхні циліндра

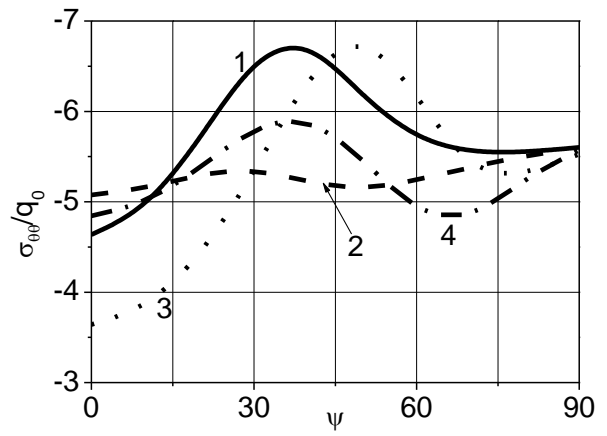


Рис. 2.35. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

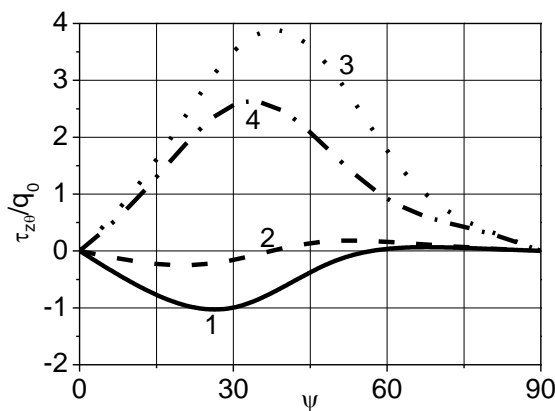


Рис. 2.36. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

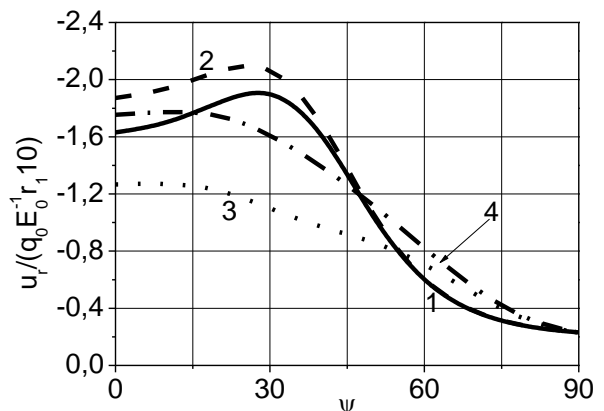


Рис. 2.37. Розподіл переміщень u_r на зовнішній поверхні циліндра

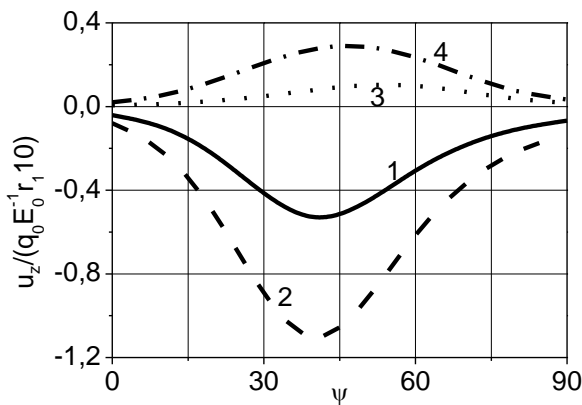


Рис. 2.38. Розподіл переміщень u_z на зовнішній поверхні циліндра

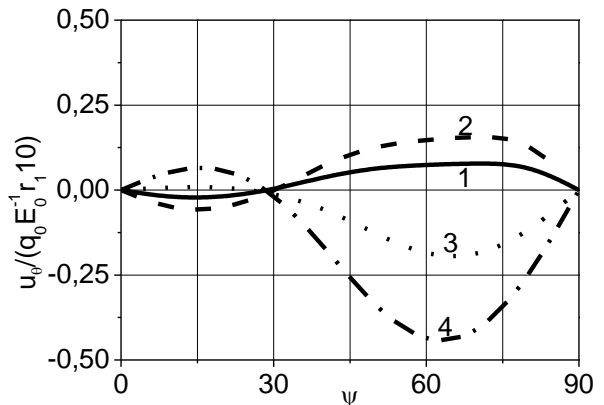


Рис. 2.39. Розподіл переміщень u_θ на зовнішній поверхні циліндра

Аналізуючи результати визначення компонентів напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних оболонок при різних умовах закріплення їх торців від дії розподіленого зовнішнього бокового тиску в залежності від кута

повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ відносно твірної можливо зробити такі висновки.

Нормальні напруження σ_{zz} при $\psi=0^0$ мають максимальні значення для умов на торцях 31 і найменші для умов 32, розбіжність складає 69%. В той же час при $\psi=30^0$ найбільшими є напруження σ_{zz} для циліндра з крайовими умовами 33, а найменшими при 32, розходження знаходиться в межах 80%. У разі крайових умов 33 та 34 в діапазоні $20^0 \leq \psi \leq 30^0$ мають місце максимуми σ_{zz} за абсолютними величинами розбіжності між якими та їх значеннями при $\psi=0^0$ для 33 складають 26%, для 34 – 24%. При подальшому збільшенні кута ψ напруження σ_{zz} також починають зменшуватись і отримують мінімальні значення при $\psi=90^0$, де складають для умов 33 8% від відшуканих при $\psi=0^0$, і 6% для умов 34.

Нормальні напруження $\sigma_{\theta\theta}$ змінюють свої величини із зміною кута ψ . Так вони приймають найбільші значення для умов 31 при $\psi=35^0$ і 33 при $\psi=50^0$. При куті $\psi=90^0$ розбіжність між максимальними $\sigma_{\theta\theta}$ для 31 та мінімальними при 33 знаходиться в межах 2%.

Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$, які можливо визначити лише з використанням запропонованого підходу «АПР», маючи нульові значення при $\psi=0^0, 90^0$, на проміжку $20^0 \leq \psi \leq 40^0$ отримують максимальні за абсолютними значеннями величини. При цьому розбіжність між найбільшими значеннями $\tau_{z\theta}$ при умовах 33 та найменшими при 32 знаходиться в межах 94%. Зауважимо, що максимальні значення напружень $\tau_{z\theta}$ є додатними для умов 33, 34 і від'ємними при умовах 31, 32.

Переміщення в радіальному напрямку u_r при граничних умовах 33 та 34 плавно спадають із зростанням ψ від 0^0 до 90^0 , а для 31 та 32 мають місце максимуми величин u_r в діапазоні $20^0 \leq \psi \leq 30^0$. Тут u_r є більшими за отримані при $\psi=0^0$ на 21% для умов 31 та на 15% для 32.

Переміщення в осьовому напрямку u_z мають максимальні за абсолютним значенням величини в діапазоні зміни кута ψ від 40^0 до 50^0 . Тут найбільші переміщення мають місце для умов на торцях 32 і найменші при 33, розбіжність між ними знаходиться в межах 91%. Вкажемо на те, що на всьому розглядуваному діапазоні зміни кута ψ значення переміщень u_z додатні для умов 33, 34 і від'ємні при умовах 31, 32.

Переміщення за коловим напрямком u_θ , на початковому етапі зміни кута ψ , для граничних умовах 33 та 34 будучи додатними, а для умов 31, 32 – від'ємними, при $\psi \approx 30^0$ змінюють свої значення на протилежні і в діапазоні $60^0 \leq \psi \leq 70^0$ отримують свої максимальні величини. Розбіжність між найбільшими з них (умови 34) та найменшими (умови 31) складають 83%.

Описані вище зміни компонентів напружено-деформованого стану циліндричної оболонки в залежності від кута ψ повороту головних напрямів пружності матеріалу при різних граничних умовах можливо пояснити перерозподілом механічних характеристик матеріалу при зміні кута ψ і різними умовами на торцях. Для розглядуваного виду анізотропії деформації розтягу-стиску, зсуву, згину та кручення є взаємопов'язаними, а отже компоненти НДС є чутливими до найменших змін граничних умов.

2.6.2. Товстостінні циліндричні анізотропні оболонки під дією осьового тиску

Розглядатимемо анізотропні циліндричні оболонкові конструкції, виготовлені з композитного матеріалу – склопластика [123, 124, 198, 199], що закріплені на торцях відповідно до умов (2.21). До торців оболонок прикладені осьові стискаючі зусилля еквівалентні напруженню σ'_{zz} . У власних осях матеріал склопластик є ортотропним з такими характеристиками: $E_{zz}=44,5E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0$, $G_{rz}=8,48E_0$, $\nu_{\theta z}=0,26$, $\nu_{z\theta}=0,0628$, $E_0=1000\text{МПа}$.

Розглядаємо циліндричні оболонки з геометричними характеристиками

такими, як і в підпункті 2.6.1. Водночас, так само як і в пп. 2.6.1, збільшуючи кількість шарів, проаналізуємо як при цьому змінюється їх напружено-деформований стан.

2.6.2.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки

В таблиці 2.15 приведений розподіл параметрів напружено-деформованого стану анізотропних одношарових циліндричних оболонок від дії осьового тиску відносних: напружень (нормальних σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$; дотичних τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$) та переміщень (u_r , u_z , u_θ). Зазначені параметри здобуті при використанні пропонованого підходу (2.27)÷(2.29) для граничних умов на торцях (2.21). Водночас досліджений вплив анізотропних констант матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} на параметри напружено-деформованого стану.

Таблицю 2.15 скомпоновано так само, як і таблицю 2.12 в пп. 2.6.1.1. При цьому, в ній представлені максимальні значення величин НДС відповідно до граничних умов (2.21) для: σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r – координати твірної циліндра $z=0,5L$; $\tau_{z\theta}$, τ_{rz} та u_z – з координатою $z=0$ і у випадку параметрів $\tau_{r\theta}$ та u_θ – $z=0,25L$.

Таблиця 2.15

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за товщиною одношарової товстостінної циліндричної оболонки при осьовому тиску

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			σ_{rr}/σ'_{zz}	τ_{rz}/σ'_{zz}	$\tau_{r\theta}/\sigma'_{zz}$	σ_{zz}/σ'_{zz}	$\sigma_{\theta\theta}/\sigma'_{zz}$	$\tau_{z\theta}/\sigma'_{zz}$	$\frac{u_r}{\sigma'_{zz} E_0^{-1} r_1}$	$\frac{u_z}{\sigma'_{zz} E_0^{-1} r_1}$	$\frac{u_\theta}{\sigma'_{zz} E_0^{-1} r_1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	0,0	0,0	0,0	-0,9533	0,0091	0,0	0,7882	2,2739	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,9533	0,0091	0,0	0,7882	2,2739	0,0
0,64		АПР	-0,0002	0,0304	0,0	-0,9686	0,0085	0,0	0,7680	2,3432	0,0
		ОПР	-0,0002	0,0304	0,0	-0,9686	0,0085	0,0	0,7680	2,3432	0,0
0,62		АПР	-0,0002	0,0289	0,0	-0,9848	0,0078	0,0	0,7475	2,3962	0,0
		ОПР	-0,0002	0,0289	0,0	-0,9848	0,0078	0,0	0,7475	2,3962	0,0
0,60		АПР	-0,0001	0,0184	0,0	-1,0015	0,0071	0,0	0,7266	2,4414	0,0
		ОПР	-0,0001	0,0184	0,0	-1,0015	0,0071	0,0	0,7266	2,4414	0,0
0,56		АПР	0,0001	-0,0084	0,0	-1,0347	0,0055	0,0	0,6834	2,5180	0,0
		ОПР	0,0001	-0,0084	0,0	-1,0347	0,0055	0,0	0,6834	2,5180	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-1,0506	0,0048	0,0	0,6612	2,5444	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-1,0506	0,0048	0,0	0,6612	2,5444	0,0
0,66	30	АПР	0,0	0,0	0,0	-0,8866	0,0463	0,3174	3,7020	3,6060	-0,0267
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,8866	0,0460	0,0	3,6967	3,6091	0,0
0,64		АПР	-0,0008	0,0691	0,0026	-0,9235	0,0436	0,3424	3,6877	3,8943	-0,0262
		ОПР	-0,0008	0,0684	0,0	-0,9233	0,0434	0,0	3,6821	3,8976	0,0
0,62		АПР	-0,0008	0,0853	0,0041	-0,9632	0,0406	0,3525	3,6725	4,1477	-0,0261
		ОПР	-0,0008	0,0850	0,0	-0,9630	0,0404	0,0	3,6668	4,1503	0,0
0,60		АПР	-0,0002	0,0792	0,0047	-1,0042	0,0379	0,3593	3,6563	4,3850	-0,0262
		ОПР	-0,0002	0,0793	0,0	-1,0042	0,0376	0,0	3,6505	4,3865	0,0
0,56		АПР	0,0007	0,0275	0,0029	-1,0838	0,0348	0,3686	3,6207	4,8464	-0,0263
		ОПР	0,0006	0,0279	0,0	-1,0840	0,0343	0,0	3,6146	4,8465	0,0

Продовження таблиці 2.15

0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-1,1191	0,0355	0,3640	3,6017	5,0771	-0,0257
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-1,1191	0,0350	0,0	3,5954	5,0777	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-1,0103	-0,0134	0,0361	3,8134	9,1779	-0,3488
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-1,0182	-0,0105	0,0	3,5689	9,0895	0,0
0,64		АПР	0,0007	0,0813	0,0048	-1,0056	0,0041	0,0624	3,7589	9,6051	-0,3382
		ОПР	0,0006	0,0929	0,0	-1,0107	0,0052	0,0	3,5124	9,5367	0,0
0,62		АПР	0,0019	0,1013	0,0078	-1,0025	0,0214	0,0756	3,7046	9,9670	-0,3277
		ОПР	0,0016	0,1193	0,0	-1,0049	0,0205	0,0	3,4563	9,9120	0,0
0,60		АПР	0,0029	0,0927	0,0090	-1,0001	0,0391	0,0844	3,6503	10,2963	-0,3172
		ОПР	0,0026	0,1136	0,0	-0,9998	0,0362	0,0	3,4004	10,2514	0,0
0,56		АПР	0,0026	0,0307	0,0054	-0,9936	0,0785	0,0986	3,5425	10,9124	-0,2964
		ОПР	0,0023	0,0452	0,0	-0,9880	0,0712	0,0	3,2899	10,8922	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,9875	0,1019	0,1015	3,4901	11,2081	-0,2860
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,9792	0,0923	0,0	3,2363	11,2117	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,9992	0,0566	0,0	0,8723	9,7890	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,9992	0,0566	0,0	0,8723	9,7890	0,0
0,64		АПР	-0,0015	0,0437	0,0	-0,9994	0,0406	0,0	0,8044	9,9563	0,0
		ОПР	-0,0015	0,0437	0,0	-0,9994	0,0406	0,0	0,8044	9,9563	0,0
0,62		АПР	-0,0024	0,0462	0,0	-0,9997	0,0238	0,0	0,7366	10,0709	0,0
		ОПР	-0,0024	0,0462	0,0	-0,9997	0,0238	0,0	0,7366	10,0709	0,0
0,60		АПР	-0,0028	0,0331	0,0	-1,0001	0,0059	0,0	0,6686	10,1581	0,0
		ОПР	-0,0028	0,0331	0,0	-1,0001	0,0059	0,0	0,6686	10,1581	0,0
0,56		АПР	-0,0017	-0,0035	0,0	-1,0006	-0,0338	0,0	0,5312	10,2747	0,0
		ОПР	-0,0017	-0,0035	0,0	-1,0006	-0,0338	0,0	0,5312	10,2747	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-1,0006	-0,0560	0,0	0,4613	10,2960	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-1,0006	-0,0560	0,0	0,4613	10,2960	0,0

На рис. 2.40-2.45 приведені графіки в осях: відносна величина параметру НДС (вісь ординат) – координата за товщиною оболонки (вісь абсцис), що побудовані при кутах ψ рівних: 0° , 10° , 30° , 60° , 80° , 90° для компонентів НДС одношарової циліндричної оболонки під осьовим тиском згідно результатів приведених в табл. 2.15. На рис. 2.40 представлений розподіл за товщиною оболонки дотичного напруження τ_{rz} , на рис. 2.41 – нормального напруження σ_{zz} , рис. 2.42 – $\sigma_{\theta\theta}$, рис. 2.43 – $\tau_{z\theta}$, рис. 2.44 характеризує розподіл переміщення u_z і рис. 2.45 – переміщення u_θ . При цьому нумерація кривих відповідає кутам: 1 – $\psi = 0^\circ$; 2 – $\psi = 30^\circ$; 3 – $\psi = 60^\circ$; 4 – $\psi = 90^\circ$; 5 – $\psi = 10^\circ$; 6 – $\psi = 80^\circ$, а також 2' – $\psi = 30^\circ$; 3' – $\psi = 60^\circ$; 5' – $\psi = 10^\circ$; 6' – $\psi = 80^\circ$.

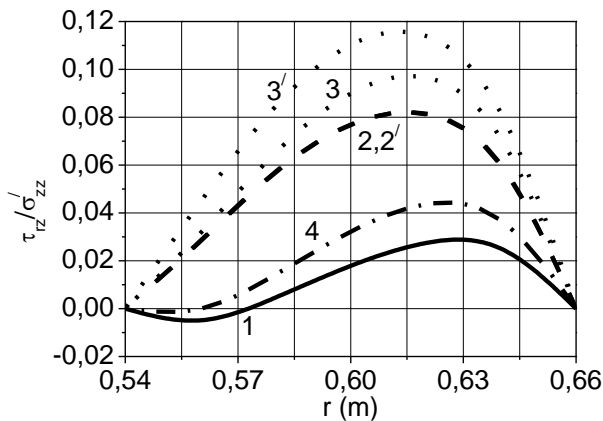


Рис. 2.40. Розподіл напружень τ_{rz} за товщиною на торці циліндра, $z/L = 0$

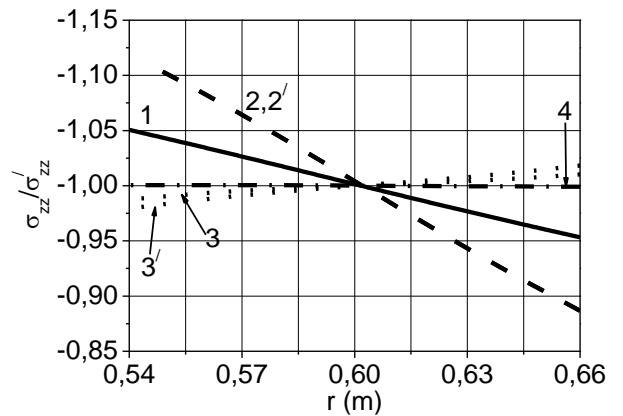


Рис. 2.41. Розподіл напружень σ_{zz} за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

Аналіз величин, що характеризують розподіл напружень σ_{rr} (табл. 2.15) за товщиною анізотропної циліндричної оболонки вказує на те, що при кутах повороту головних напрямів пружності матеріалу $\psi = 60^\circ$ та 90° напруження σ_{rr} за товщиною мають сталий знак, а при $\psi = 0^\circ$ та 30° з внутрішньої сторони стінки напруження додатні, з зовнішньої – від'ємні. Також видно, що найбільші за абсолютною величиною значення σ_{rr} мають місце при $\psi = 60^\circ$, де вони на два порядки більші, ніж при $\psi = 0^\circ$.

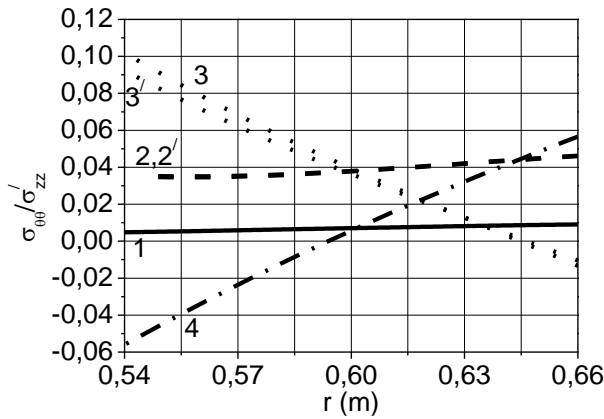


Рис. 2.42. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною посередині твірної циліндра, $z/L = 0,5$

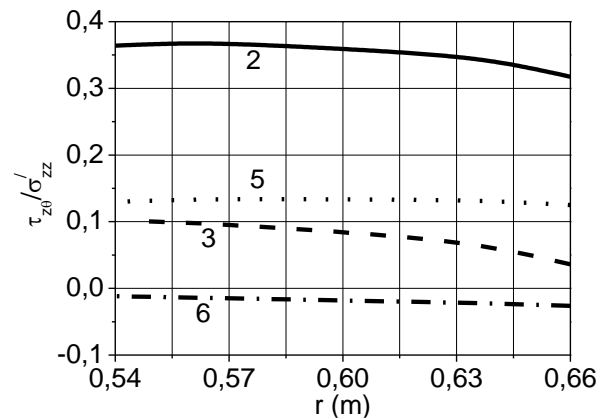


Рис. 2.43. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною на торці циліндра, $z/L = 0$

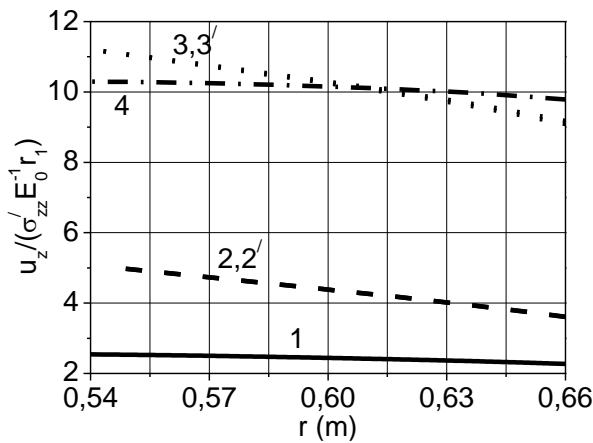


Рис. 2.44. Розподіл переміщень u_z за товщиною на торці циліндра, $z/L = 0$

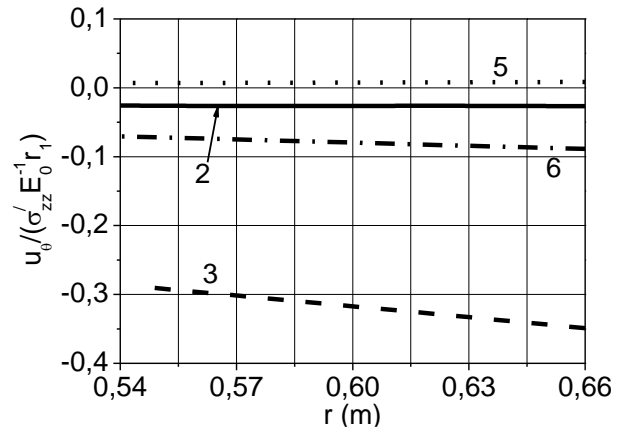


Рис. 2.45. Розподіл переміщень u_θ за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0,25$

Така ж тенденція проявляється на рис. 2.40, що характеризує розподіл дотичних напружень τ_{rz} за товщиною циліндра, де найменші значення τ_{rz} мають місце при $\psi = 0^0$ (крива 1), а найбільші – при $\psi = 60^0$ (крива 3). Максимальне розходження між величинами τ_{rz} при цих кутах досягає 71%.

З аналізу таблиці 2.15, де охарактеризовано розподіл напружень $\tau_{r\theta}$ за товщиною оболонки, також видно, що при куті $\psi = 60^0$ ці напруження є більшими у порівнянні із їх величинами при $\psi = 30^0$ розбіжність досягає 48%.

Нормальні напруження σ_{zz} (рис. 2.41) мають поблизу серединної поверхні значення рівні напруженню σ_{zz}' еквівалентному зовнішньому осьовому стискаючому навантаженню. Розподіляються вони за товщиною відповідно до

закону прямої лінії і зазнають найбільшої зміни для $\psi = 0^\circ$ та $\psi = 30^\circ$ (криві 1 та 2 відповідно), де на внутрішній поверхні мають максимальні значення, що перевищують σ_{zz}' на 5% та 12% відповідно.

Нормальні напруження в коловому напрямку $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2.42) змінюються за товщиною оболонки за законом близьким до закону прямої лінії. В той же час при $\psi = 0^\circ$ (крива 1) та $\psi = 30^\circ$ (крива 2) величини $\sigma_{\theta\theta}$ мають сталий знак, а при $\psi = 60^\circ$ (крива 3) та $\psi = 90^\circ$ (крива 4) ці напруження змінюють свої знаки за товщиною досягаючи найбільших значень на внутрішній поверхні. На ній $\sigma_{\theta\theta}$ при $\psi = 60^\circ$ більше ніж при $\psi = 0^\circ$ на 95%.

Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.43) розподіляються за товщиною циліндричної оболонки за криволінійним законом. При цьому найбільші значення $\tau_{z\theta}$ виникають при $\psi = 30^\circ$ (крива 2) на 97% більше ніж при $\psi = 80^\circ$ (крива 6).

З табл. 2.15 видно, що переміщення u_r при $\psi = 30^\circ$ та $\psi = 60^\circ$ є більшими ніж при $\psi = 0^\circ$ та $\psi = 90^\circ$. Максимальне розходження досягає 87%. Також видно, що прогини u_r у випадку осьового тиску збільшуються від внутрішньої поверхні до зовнішньої для всіх кутів ψ .

У свою чергу переміщення в осьовому напрямку u_z (рис. 2.44) зменшують свої величини при русі від внутрішньої поверхні до зовнішньої, максимальна різниця між переміщеннями на поверхнях досягається при $\psi = 30^\circ$ (крива 2) і складає 29%. Також видно, що найбільші переміщення u_z виникають при $\psi = 60^\circ$ (крива 3), а найменші при $\psi = 0^\circ$ (крива 1) розходження сягає 77%.

Розходження між переміщеннями в коловому напрямку u_θ (рис. 2.45) на поверхнях оболонки змінюється від 20% при $\psi = 10^\circ$ (крива 5) до 19% при $\psi = 60^\circ$ (крива 3). Також розходження між переміщеннями u_θ при $\psi = 60^\circ$ де вони найбільші та при $\psi = 10^\circ$ (крива 5), де u_θ найменші, досягає 97%.

2.6.2.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки

Розглянемо характер зміни напружено-деформованого стану товстостінних композитних анізотропних оболонок від дії осьового тиску, в залежності від кута ψ , тих самих геометричних та механічних характеристик, як і в попередньому підпункті 2.6.2.1, але дво-, три- та чотиришарових.

При цьому, для двошарових оболонок шаруватий пакет є симетричним відносно серединної поверхні та має координати поверхонь внутрішнього $r_1=0,54\text{м}$, $r_{s1}=0,6\text{м}$ та зовнішнього $r_{s2}=0,6\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ шарів. Кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару « $+\psi$ ». У випадку тришарових оболонок, маємо для внутрішнього $r_1=0,54\text{м}$, $r_{s1}=0,58\text{м}$ та зовнішнього $r_{s3}=0,62\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ шарів кут повороту головних напрямків пружності матеріалу до напрямку меридіана оболонки « $+\psi$ »; для серединного шару: $r_{s1}=0,58\text{м}$, $r_{s2}=0,62\text{м}$, кут має значення « $-\psi$ ». Для чотиришарових циліндрів пакет зібраний симетрично відносно серединної поверхні й кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару визначається величиною « $+\psi$ ». Результати досліджень представимо у вигляді графіків.

На рис. 2.46-2.51 наведені об'єднуючі ілюстративні дані для одно-, дво-, три- та чотиришарових анізотропних оболонок графіки в осях напруження (рис. 2.46-2.49) або переміщення (рис. 2.50-2.51) – кут ψ . Вони побудовані для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ за координатою твірної циліндра $z = 0,5L$; $\tau_{z\theta}$, τ_{rz} та u_z – з координатою $z = 0$, а у випадку параметру u_θ – $z = 0,25L$.

Водночас представимо їх залежність від кута ψ для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні, а для напружень та переміщень τ_{rz} , u_z , u_θ на серединній поверхні. Позначення кривих на рис. 2.46-2.51 таке: 1 – одношарова оболонка, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова і 1' – представляє

результати отримані для ортотропної оболонки, підхід «ОПР».

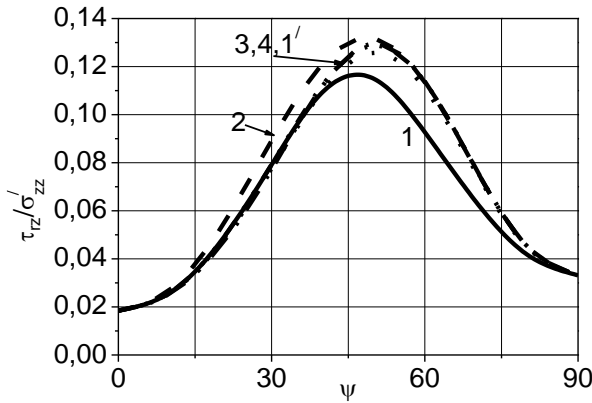


Рис. 2.46. Розподіл напружень τ_{rz} на серединній поверхні циліндра

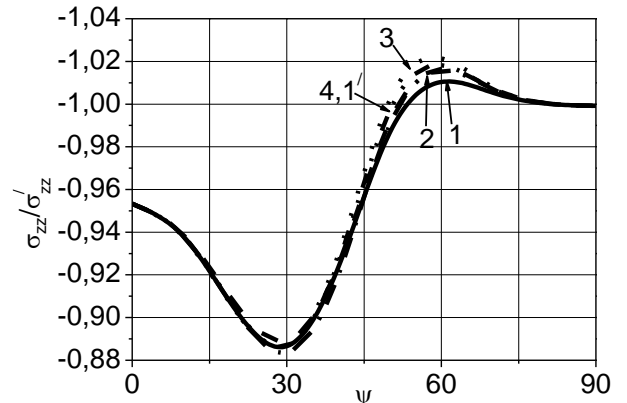


Рис. 2.47. Розподіл напружень σ_{zz} на зовнішній поверхні циліндра

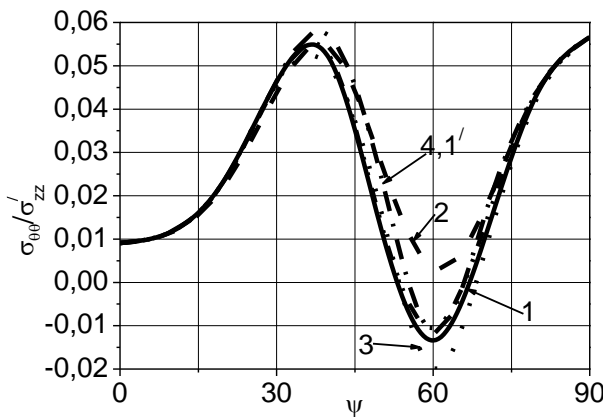


Рис. 2.48. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

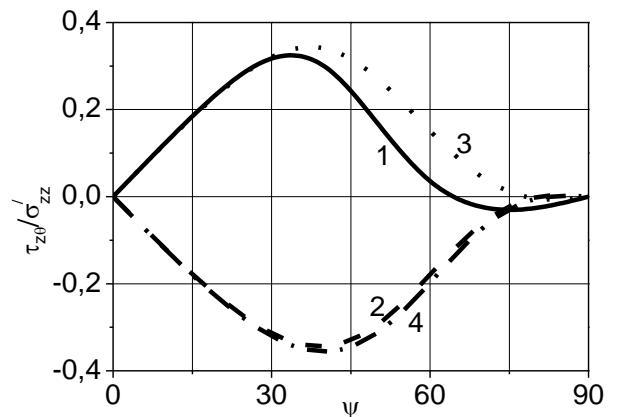


Рис. 2.49. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

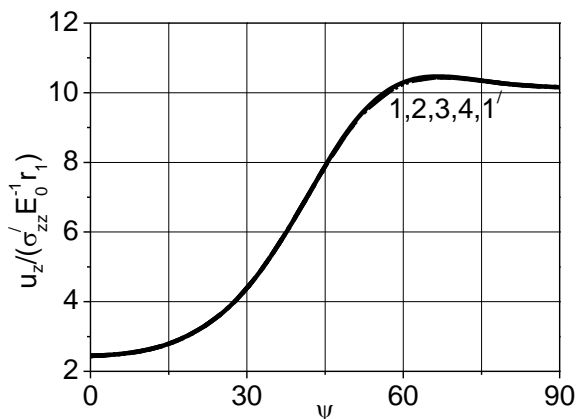


Рис. 2.50. Розподіл переміщень u_z на серединній поверхні циліндра

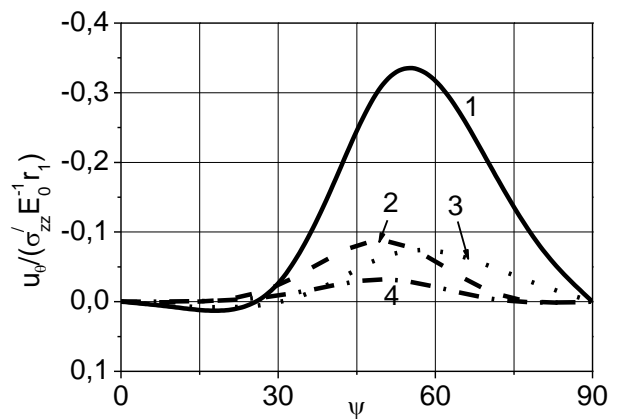


Рис. 2.51. Розподіл переміщень u_θ на серединній поверхні циліндра

Рис. 2.46 відображає дотичні напруження τ_{rz} . Крива 1 описує їх величини для одношарової, 2 – для двошарової, 3 – тришарової, 4 – чотиришарової

оболонки. Крива 1' відповідає значенню напруження τ_{rz} для ортотропної оболонки. Для цих напружень збільшення кількості шарів наближає величини τ_{rz} до значень здобутих для ортотропної оболонки (крива 1'). Рис. 2.47 та 2.48 (напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ відповідно) вказують на те, що їх величини із збільшенням кількості шарів наближаються до значень отриманих без урахування анізотропних констант матеріалу (крива 1'). Знаки при максимальних величинах дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.49) залежать від кількості шарів з перехресним орієнтуванням осей ортотропії матеріалу. Для непарної кількості (криві 1, 3) вони додатні, для парної (криві 2, 4) – від'ємні. В той же час збільшення кількості шарів веде до незначного зростання максимальних значень $\tau_{z\theta}$: для непарної кількості на орієнтовно 7%, для парної – на величину близьку 4,5%. З рис. 2.50 (переміщення u_z) видно, що збільшення кількості шарів наближає величини цих переміщень до таких, які отримані для ортотропної оболонки (крива 1'). Вплив збільшення кількості шарів на переміщення за коловим напрямком u_θ відображено на рис. 2.51. Взаємне розташування кривих свідчить про те, що зі збільшенням кількості шарів від одного до чотирьох, анізотропної оболонки, переміщення u_θ зменшуються приблизно на порядок та мають тенденцію прямувати до нульових значень.

2.6.2.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском

Розглянемо, як впливає збільшення кількості шарів, головні напрями пружності яких повернуті на кут $\pm\psi$ до напрямку меридіана оболонки, на величини компонентів дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ і $\tau_{r\theta}$ та переміщень в коловому напрямку u_θ циліндричної оболонки, які, у випадку осьового тиску, можливо отримати лише при урахуванні анізотропних констант матеріалу

$c_{16}, c_{26}, c_{36}, a_{45}$.

Розглянемо оболонкову конструкцію з геометричними, механічними характеристиками та навантаженням описаними в попередніх пунктах 2.6.2.1-2.6.2.2. Кути повороту $\psi = \pm 50^0$. Величини $\tau_{z\theta}$ визначатимемо для координати $z = 0$ вздовж твірної на зовнішній поверхні циліндра при $r=0,66\text{м}$, значення $\tau_{r\theta}$ та u_{θ} обчислимо для координати $z = 0,25L$ на серединній поверхні оболонки при $r=0,60\text{м}$. Результати розрахунків приведено в табл. 2.16 та на рис. 2.52-2.55.

Таблиця 2.16

Вплив збільшення кількості шарів $\psi = \pm 50^0$ на компоненти напружено-деформованого стану товстостінної циліндричної оболонки отримані за підходом «АПР»

Кількість шарів	$\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma'_{zz}}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{\sigma'_{zz}}$	$\frac{u_{\theta}}{\sigma'_{zz} E_0^{-1} r_1}$
1	0,0141	0,1697	-0,3120
2	0,0167	-0,2947	-0,0867
3	0,0084	0,2720	-0,0637
4	0,0001	-0,3127	-0,0318
5	0,0043	0,2990	-0,0372
6	0,0055	-0,3226	-0,0296
7	0,0036	0,3121	-0,0252
8	0,00004	-0,3283	-0,0165
9	0,0025	0,3197	-0,0198
10	0,0033	-0,3320	-0,0178
11	0,0023	0,3245	-0,0160
12	0,00003	-0,3345	-0,0111
13	0,0018	0,3280	-0,0136
14	0,0018	-0,3350	-0,0084
15	0,0016	0,3306	-0,0116
16	0,00002	-0,3376	-0,0084
17	0,0014	0,3325	-0,0103
18	0,0019	-0,3385	-0,0101
19	0,0013	0,3339	-0,0092
20	0,00002	-0,3395	-0,0067

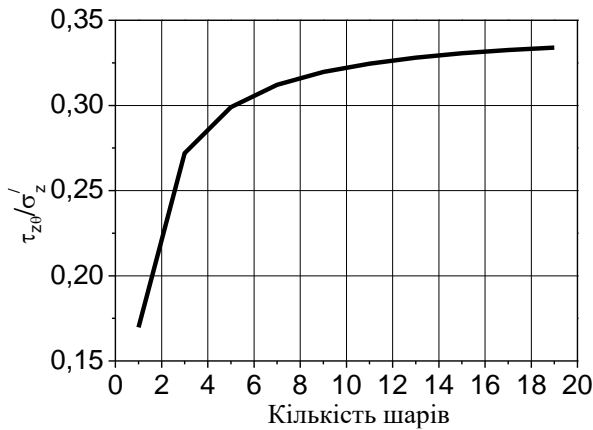


Рис. 2.52. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ при збільшенні непарної кількості шарів $\pm\psi$

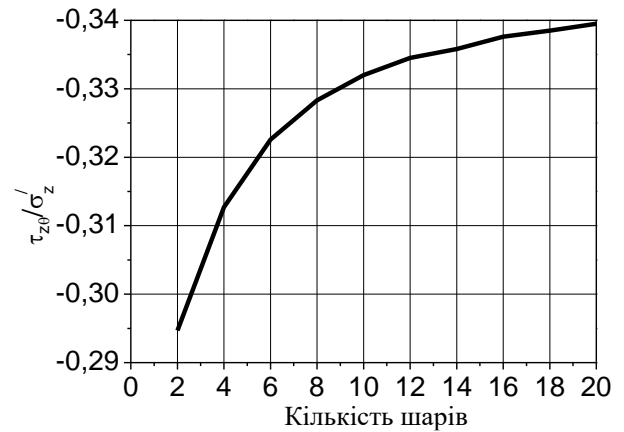


Рис. 2.53. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ при збільшенні парної кількості шарів $\pm\psi$

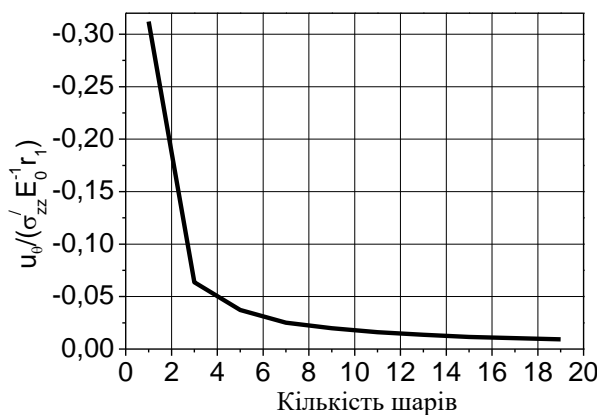


Рис. 2.54. Розподіл переміщень u_θ при збільшенні непарної кількості шарів $\pm\psi$

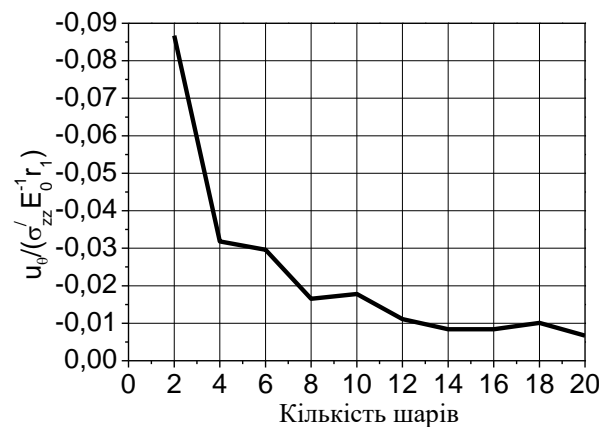


Рис. 2.55. Розподіл переміщень u_θ при збільшенні парної кількості шарів $\pm\psi$

Аналізуючи результати представлені в табл. 2.16 та на рис. 2.52-2.55 зробимо такі висновки. Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ та переміщення u_θ при збільшенні кількості шарів $\psi = \pm 50^\circ$ зменшують свої величини прямуючи до нуля. Так для пакету утвореного непарною кількістю шарів $\pm\psi$ збільшення кількості шарів від одного до дев'ятнадцяти веде до зменшення $\tau_{r\theta}$ на 91%, а u_θ на 97%. Для парної структури при двадцяти шарах $\tau_{r\theta}$ складає 0,12%, а u_θ 7,7% від їх величин для двошарового циліндра.

В той же час напруження $\tau_{z\theta}$ із збільшенням кількості шарів зростають за абсолютними значеннями та усталюються. Від одного до дев'ятнадцяти шарів на близько 97%, а від двох до двадцяти на 15%.

В табл. 2.17 та на рис. 2.56-2.57 показаний розподіл компонентів

напружено-деформованого стану $\tau_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ та u_θ за товщиною десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ циліндричної оболонки під дією осьового тиску.

Таблиця 2.17

Розподіл компонентів напружено-деформованого стану за товщиною десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ циліндричної оболонки під дією осьового тиску

$r, \text{ м}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma'_{zz}}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{\sigma'_{zz}}$	$\frac{u_\theta}{\sigma'_{zz} E_0^{-1} r_1}$
0,660	0,0	-0,3320	-0,0167
0,654	-0,0009	-0,3463	-0,0167
0,648	-0,0014	-0,3577	-0,0169
0,648	-0,0014	0,3841	-0,0169
0,642	-0,0005	0,3837	-0,0156
0,636	0,0	0,3837	-0,0141
0,636	0,0	-0,3847	-0,0141
0,630	0,0003	-0,3824	-0,0156
0,624	0,0010	-0,3807	-0,0173
0,624	0,0010	0,4039	-0,0173
0,618	0,0007	0,3965	-0,0153
0,612	0,00002	0,3906	-0,0132
0,612	0,00002	-0,4061	-0,0132
0,606	0,0015	-0,3989	-0,0154
0,600	0,0033	-0,3930	-0,0178
0,600	0,0033	0,4129	-0,0178
0,594	0,0019	0,4044	-0,0159
0,588	0,00004	0,3975	-0,0138
0,588	0,00004	-0,4168	-0,0138
0,582	0,0026	-0,4095	-0,0160
0,576	0,0056	-0,4037	-0,0186
0,576	0,0056	0,4181	-0,0186
0,570	0,0030	0,4116	-0,0174
0,564	0,00005	0,4067	-0,0159
0,564	0,00005	-0,4217	-0,0159
0,558	0,0039	-0,4170	-0,0174
0,552	0,0082	-0,4133	-0,0193
0,552	0,0082	0,4193	-0,0193
0,546	0,0043	0,4165	-0,0197
0,540	0,0	0,4141	-0,0196

З результатів приведених в табл. 2.17 та на рис. 2.56-2.57 можливо зробити такі висновки. Напруження $\tau_{z\theta}$ рис. 2.56 та переміщення u_θ рис. 2.57 зменшуються за товщиною циліндра від внутрішньої поверхні до зовнішньої.

Для дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ це зменшення досягає 20%, а для переміщень u_θ 15%.

Величини дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.56) при осьовому тиску змінюють свої знаки при переході від шару до шару на протилежні та змінюються в межах до 8% для окремих шарів.

Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ табл. 2.17 та переміщення u_θ рис. 2.57 мають локальні максимуми в точках контакту шарів.

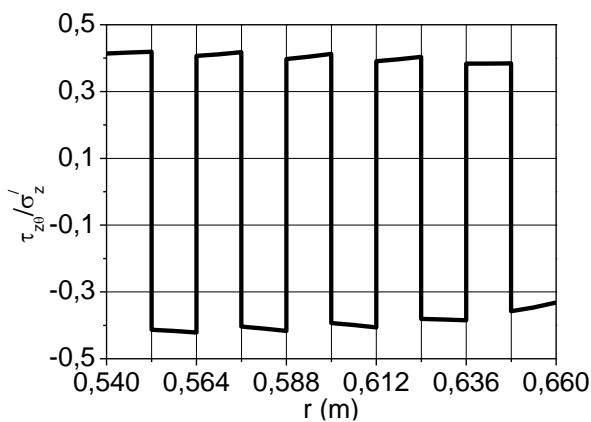


Рис. 2.56. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною десятишарової $\pm \psi$ циліндричної оболонки

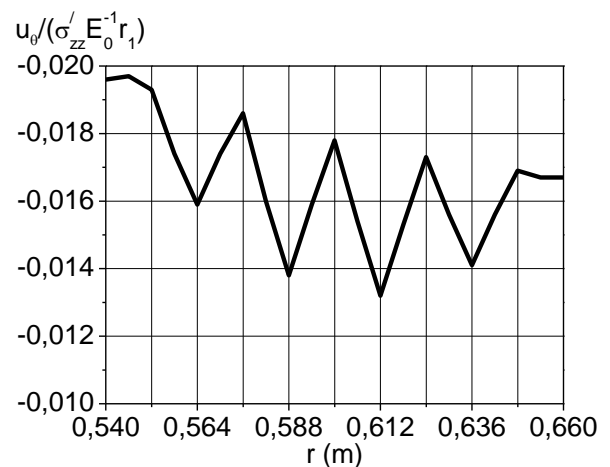


Рис. 2.57. Розподіл переміщень u_θ за товщиною десятишарової $\pm \psi$ циліндричної оболонки

2.6.3. Циліндричні товстостінні анізотропні оболонки під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту), що діє на їх торці

Розглядатимемо шаруваті анізотропні циліндричні оболонкові конструкції, що виготовлені з композитного матеріалу вуглепластику [145, 239] та закріплені по торцях згідно умов (2.34). На торцях циліндрів моделюється напружений стан $\tau_{z\theta}$ еквівалентний дії крайового зсувного зусилля (крутного моменту). У власних осях матеріал вуглепластик є ортотропним з такими характеристиками: $E_{zz}=2110E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=53E_0$, $G_{z\theta}=G_{rz}=26E_0$, $G_{r\theta}=13E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $E_0=100\text{МПа}$.

Оболонкові конструкції мають геометричні параметри такі ж, як в підпунктах 2.6.1 та 2.6.2. В той же час, подібно до попередніх пп. 2.6.1 та пп. 2.6.2 проаналізуємо як змінюється напружено-деформований стан таких оболонок у випадку дії кручення при збільшенні кількості шарів.

2.6.3.1. Одношарові товстостінні циліндричні оболонки

В таблиці 2.18 показано характер зміни параметрів напружено-деформованого стану анізотропних одношарових циліндричних оболонок при дії кручення залежно від координати за товщиною та кута ψ повороту головних напрямків пружності матеріалу. Приведені величини відносних напружень (нормальних σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$; дотичних τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$) та відносних переміщень (u_r , u_z , u_θ), здобутих з використанням пропонованого тривимірного підходу (2.27)÷(2.29) для граничних умов (2.34). При цьому, досліджено вплив анізотропних констант матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} на параметри НДС при використанні підходів «АПР» та «ОПР».

Таблиця 2.18 з компонована так само, як і таблиці 2.12 та табл. 2.15.

При цьому в ній представлені максимальні значення величин параметрів НДС відповідно до граничних умов (2.34) для: $\tau_{z\theta}$ за координатою твірної циліндра $z=0,5L$; для σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$, u_r , u_θ – з $z=0$ і у випадку параметрів τ_{rz} та u_z – $z=0,25L$.

Таблиця 2.18

Розподіл параметрів напружено-деформованого стану за товщиною одношарової товстостінної циліндричної оболонки при дії крайового зсувного зусилля (крутного моменту)

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			$\frac{\sigma_{rr}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\tau_{rz}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\sigma_{zz}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\tau_{z\theta}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{u_r}{\tau'_{z\theta} E_0^{-1} r_1}$	$\frac{u_z}{\tau'_{z\theta} E_0^{-1} r_1}$	$\frac{u_\theta}{\tau'_{z\theta} E_0^{-1} r_1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0927	0,0	0,0	-4,5355
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0927	0,0	0,0	-4,5355
0,64		АПР	0,0	0,0	0,0239	0,0	0,0	1,0596	0,0	0,0	-4,4018
		ОПР	0,0	0,0	0,0239	0,0	0,0	1,0596	0,0	0,0	-4,4018
0,62		АПР	0,0	0,0	0,0365	0,0	0,0	1,0265	0,0	0,0	-4,2729
		ОПР	0,0	0,0	0,0365	0,0	0,0	1,0265	0,0	0,0	-4,2729
0,60		АПР	0,0	0,0	0,04123	0,0	0,0	0,9934	0,0	0,0	-4,1461
		ОПР	0,0	0,0	0,04123	0,0	0,0	0,9934	0,0	0,0	-4,1461
0,56		АПР	0,0	0,0	0,0264	0,0	0,0	0,9272	0,0	0,0	-3,8900
		ОПР	0,0	0,0	0,0264	0,0	0,0	0,9272	0,0	0,0	-3,8900
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8941	0,0	0,0	-3,7552
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8941	0,0	0,0	-3,7552
0,66	30	АПР	0,0	0,0	0,0	-1,5229	-0,1406	2,8188	0,8776	0,0252	-0,7134
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0853	0,0	0,0	-0,2841
0,64		АПР	0,0047	-0,0482	0,0079	-1,5615	-0,1348	1,5529	0,8834	0,0092	-0,6926
		ОПР	0,0	0,0	0,0081	0,0	0,0	1,0534	0,0	0,0	-0,2766
0,62		АПР	0,0059	-0,0764	0,0200	-1,5712	-0,1204	1,2514	0,8891	-0,0015	-0,6744
		ОПР	0,0	0,0	0,0118	0,0	0,0	1,0233	0,0	0,0	-0,2705
0,60		АПР	0,0034	-0,0858	0,0264	-1,5626	-0,1008	1,0557	0,8951	-0,0097	-0,6583
		ОПР	0,0	0,0	0,0131	0,0	0,0	0,9942	0,0	0,0	-0,2649
0,56		АПР	-0,0017	-0,0508	0,0123	-1,5580	-0,0604	0,5383	0,9084	-0,0289	-0,6246
		ОПР	0,0	0,0	0,0090	0,0	0,0	0,9346	0,0	0,0	-0,2530

Продовження таблиці 2.18

0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-1,5856	-0,0450	-0,7915	0,9154	-0,0456	-0,6038
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,9023	0,0	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,5227	-0,6421	3,6224	1,2565	0,0416	-1,9622
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0884	0,0	0,0	-0,2852
0,64		АПР	0,0149	-0,0128	0,1305	-0,3830	-0,3686	2,1644	1,2630	0,0097	-1,9164
		ОПР	0,0	0,0	0,0095	0,0	0,0	1,0560	0,0	0,0	-0,2775
0,62		АПР	0,0219	-0,0246	0,1870	-0,3189	-0,2504	1,5826	1,2698	-0,0203	-1,8847
		ОПР	0,0	0,0	0,0138	0,0	0,0	1,0246	0,0	0,0	-0,2709
0,60		АПР	0,0228	-0,0291	0,2117	-0,2703	-0,1494	1,1192	1,2772	-0,0493	-1,8589
		ОПР	0,0	0,0	0,0154	0,0	0,0	0,9938	0,0	0,0	-0,2648
0,56		АПР	0,0110	-0,0119	0,1602	-0,1600	0,0956	0,0255	1,2948	-0,1097	-1,8028
		ОПР	0,0	0,0	0,0105	0,0	0,0	0,9315	0,0	0,0	-0,2519
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,0093	0,4519	-1,5305	1,3059	-0,1430	-1,7553
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8988	0,0	0,0	-0,2440
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0927	0,0	0,0	-4,5439
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0927	0,0	0,0	-4,5439
0,64		АПР	0,0	0,0	0,0299	0,0	0,0	1,0596	0,0	0,0	-4,4085
		ОПР	0,0	0,0	0,0299	0,0	0,0	1,0596	0,0	0,0	-4,4085
0,62		АПР	0,0	0,0	0,0466	0,0	0,0	1,0265	0,0	0,0	-4,2762
		ОПР	0,0	0,0	0,0466	0,0	0,0	1,0265	0,0	0,0	-4,2762
0,60		АПР	0,0	0,0	0,0529	0,0	0,0	0,9934	0,0	0,0	-4,1454
		ОПР	0,0	0,0	0,0529	0,0	0,0	0,9934	0,0	0,0	-4,1454
0,56		АПР	0,0	0,0	0,0330	0,0	0,0	0,9272	0,0	0,0	-3,8819
		ОПР	0,0	0,0	0,0330	0,0	0,0	0,9272	0,0	0,0	-3,8819
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8941	0,0	0,0	-3,7458
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,8941	0,0	0,0	-3,7458

На рис. 2.58-2.63 представлені графіки в осях: відносна величина параметру напружено-деформованого стану (вісь ординат) – координата за товщиною оболонки (вісь абсцис), що здобуті при різних значеннях кута ψ : 0° , 10° , 30° , 60° , 80° , 90° для одношарової циліндричної оболонки від дії кручення. Графіки побудовано відповідно до результатів представлених в табл. 2.18. На рис. 2.58 представлений розподіл за товщиною оболонки нормального напруження σ_{zz} , рис. 2.59 – $\sigma_{\theta\theta}$, рис. 2.60 – дотичного напруження $\tau_{z\theta}$, рис. 2.61 характеризує розподіл переміщення u_r , рис. 2.62 – переміщення u_z і рис. 2.63 – u_θ . Нумерація кривих відповідає таким кутам: 1 – $\psi = 0^\circ$; 2 – $\psi = 30^\circ$; 3 – $\psi = 60^\circ$; 4 – $\psi = 90^\circ$; 5 – $\psi = 10^\circ$; 6 – $\psi = 80^\circ$, а також 2' – $\psi = 30^\circ$; 3' – $\psi = 60^\circ$; 5' – $\psi = 10^\circ$; 6' – $\psi = 80^\circ$.

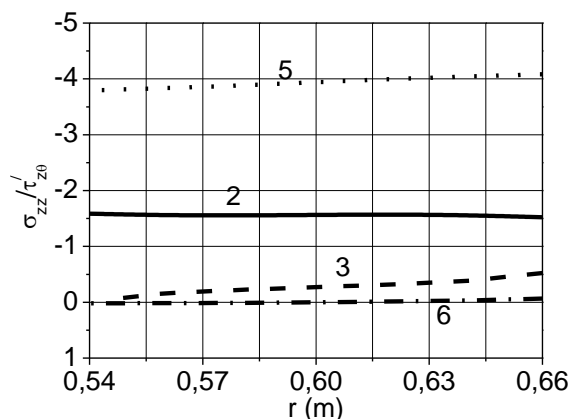


Рис. 2.58. Розподіл напружень σ_{zz} за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0$

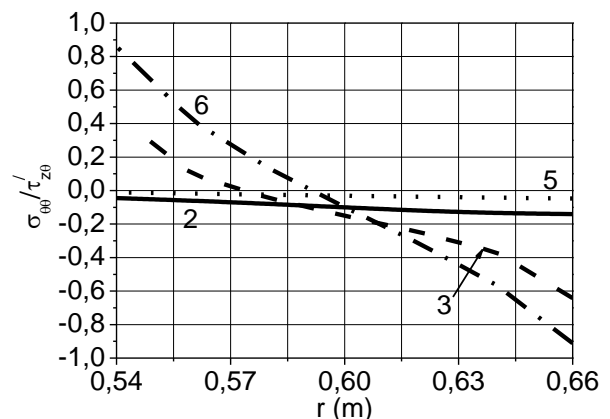


Рис. 2.59. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0$

З аналізу результатів (табл. 2.18), що відображають зміну нормального напруження σ_{rr} за товщиною оболонки випливає, що при $\psi = 60^\circ$ напруження σ_{rr} плавно зростає від нуля на зовнішній та внутрішній поверхнях до максимальних значень на серединній. В той же час при $\psi = 30^\circ$ між внутрішньою поверхнею та серединною мають місце від'ємні значення σ_{rr} , а від серединної до зовнішньої – додатні.

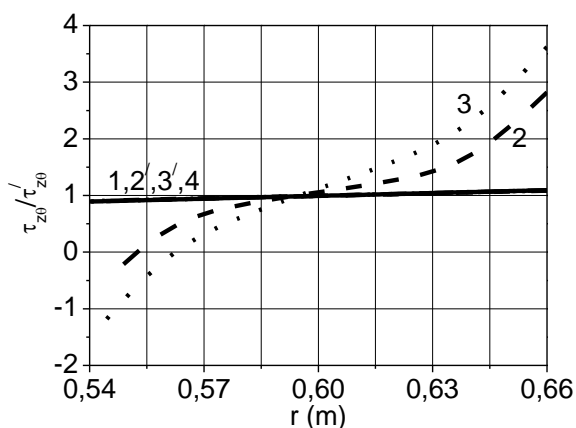


Рис. 2.60. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0,5$

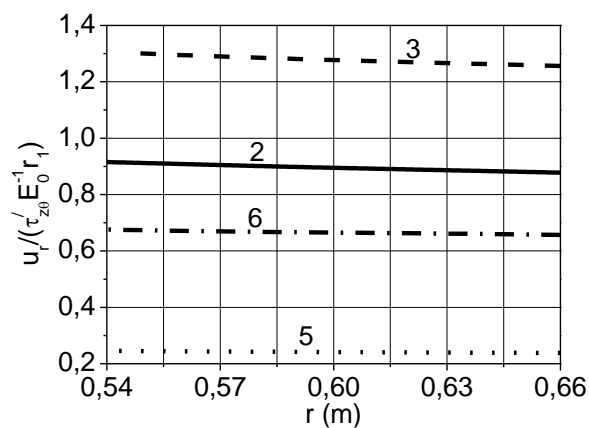


Рис. 2.61. Розподіл переміщень u_r за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0$

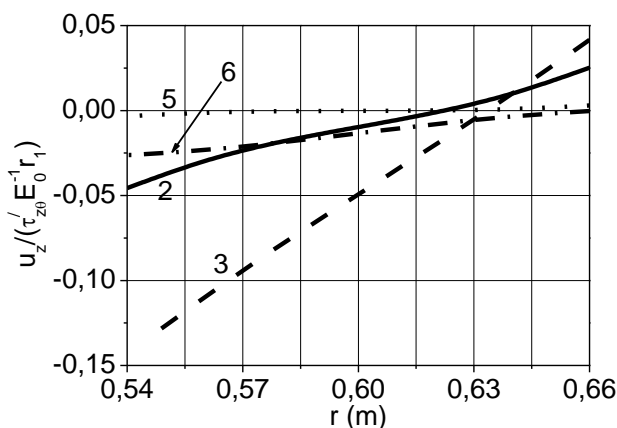


Рис. 2.62. Розподіл переміщень u_z за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0,25$

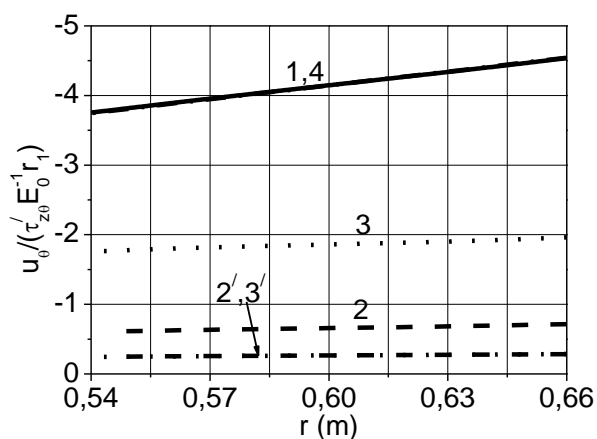


Рис. 2.63. Розподіл переміщень u_θ за товщиною циліндра при координаті $z/L = 0$

Дотичні напруження τ_{rz} , для всіх представлених в табл. 2.18 кутів ψ , розподіляються за товщиною від нульових значень на зовнішній та внутрішній поверхнях до максимумів на серединній.

Дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ (табл. 2.18) у випадку кручення циліндрів також мають нульові значення на зовнішній та внутрішній поверхнях та максимальні на серединній. В той же час найбільше розходження між $\tau_{r\theta}$ отриманими з використанням «АПР» порівняно із «ОПР» при $\psi = 30^\circ$ не перевищує 51%, а при $\psi = 60^\circ$ досягає 92%. В обох випадках дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ здобуті згідно «АПР» є більшими порівняно із «ОПР».

Нормальні напруження σ_{zz} (рис. 2.58) не суттєво змінюються за товщиною оболонки при крученні, лише при $\psi = 60^\circ$ (крива 3) напруження на зовнішній поверхні більші ніж на внутрішній на 98%. При цьому найбільші значення σ_{zz} мають місце при $\psi = 10^\circ$ (крива 5), а найменші при $\psi = 80^\circ$ (крива 6), розходження між їх величинами складає 98%.

Нормальні напруження в коловому напрямку $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 2.59) при кутах $\psi = 10^\circ$ та 30° (криві 5 та 2 відповідно) приймають від'ємні значення в усіх точках за товщиною оболонки. Але при $\psi = 60^\circ$ та 80° (криві 2 та 6 відповідно), поблизу від внутрішньої поверхні, ці напруження стискаючі, а біля зовнішньої є розтягуючими з максимальними величинами на поверхнях.

Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ (рис. 2.60) для кутів $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ (криві 1, 4 відповідно) та отримані з використанням підходу «ОПР» для $\psi = 30^\circ, 60^\circ$ (криві 2', 3' відповідно) незначно змінюють свої величини за товщиною, максимальне розходження між значеннями на зовнішній та внутрішній поверхнях досягає 19%. В той же час врахування анізотропних констант матеріалу при $\psi = 30^\circ, 60^\circ$ (криві 2, 3 відповідно) приводить до більш значного розходження між результатами на поверхнях із мінімальними величинами на внутрішній та максимальними на зовнішній поверхнях.

Переміщення u_r (рис. 2.61) для всіх представлених кутів ψ плавно зменшують свої величини від внутрішньої поверхні до зовнішньої. Максимальне розходження між переміщеннями на поверхнях виникає при $\psi = 10^\circ$ (крива 5) і досягає 3%.

Переміщення в осьовому напрямку u_z (рис. 2.62) мають від'ємні значення поблизу внутрішньої поверхні та додатні біля зовнішньої. При цьому найменша різниця між величинами u_z на поверхнях при $\psi = 10^\circ$ (крива 5), а найбільша при $\psi = 60^\circ$ (крива 3).

З рис. 2.63, що характеризує розподіл переміщення u_θ впливає таке. При $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ (криві 1, 4 відповідно) величини u_θ практично не відрізняються,

розходження не перевищує 0,25%. Дещо більшою є різниця в результатах отриманих згідно підходу «ОПР» для $\psi = 30^0$, 60^0 (криві 2', 3' відповідно) розбіжність досягає 14%. Водночас використання підходу «АПР» приводить до збільшення переміщень u_θ на 251% при $\psi = 30^0$ (крива 2) та на 688% при $\psi = 60^0$ (крива 3) порівняно з їх ортотропними значеннями (криві 2' та 3' відповідно).

2.6.3.2. Двошарові, тришарові та чотиришарові товстостінні циліндричні оболонки

Розглянемо розподіл напруженого та деформованого стану товстостінних анізотропних композитних оболонок від дії кручення, в залежності від кута ψ . Для таких самих геометричних та механічних характеристик оболонок, як і в підпункті 2.6.3.1, лише дво-, три- та чотиришарових.

При цьому, для двошарових оболонок шаруватий пакет є симетричним відносно серединної поверхні і має координати внутрішнього $r_1 = 0,54\text{м}$, $r_{s1} = 0,6\text{м}$ та зовнішнього $r_{s2} = 0,6\text{м}$, $r_2 = 0,66\text{м}$ шарів. Кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару « $+\psi$ ». У випадку тришарових оболонок, маємо для внутрішнього $r_1 = 0,54\text{м}$, $r_{s1} = 0,58\text{м}$ та зовнішнього $r_{s3} = 0,62\text{м}$, $r_2 = 0,66\text{м}$ шарів кут повороту головних напрямків пружності матеріалу до напрямку меридіана оболонки « $+\psi$ »; для серединного шару: $r_{s1} = 0,58\text{м}$, $r_{s2} = 0,62\text{м}$, кут має значення « $-\psi$ ». Для чотиришарових циліндрів пакет зібраний симетрично відносно серединної поверхні і кут повороту головних напрямків пружності матеріалу внутрішнього шару визначається величиною « $+\psi$ ». Результати досліджень представимо у вигляді графіків.

На рис. 2.64-2.69 приведено об'єднуючі ілюстративні дані для одно-, дво-, три- та чотиришарових анізотропних оболонок: графіки в осях напруження

(рис. 2.64-2.66) або переміщення (рис. 2.67-2.69) – кут ψ , що побудовані для параметрів: $\tau_{z\theta}$ при координаті твірної циліндра $z=0,5L$; для σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r , u_θ – з координатою $z=0$ і у випадку параметру u_z – $z=0,25L$. При цьому представимо їх залежність для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні, а для переміщень u_r , u_z , u_θ на серединній поверхні. Позначення кривих на рис. 2.64-2.69 таке: 1 – одношарова оболонка, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова і 1' – представляє результати отримані для ортотропної оболонки, підхід «ОПР».

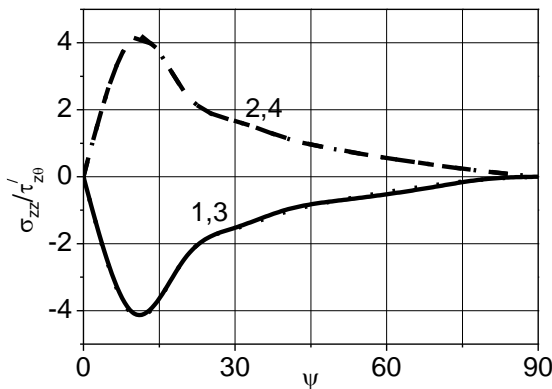


Рис. 2.64. Розподіл напружень σ_{zz} на зовнішній поверхні циліндра

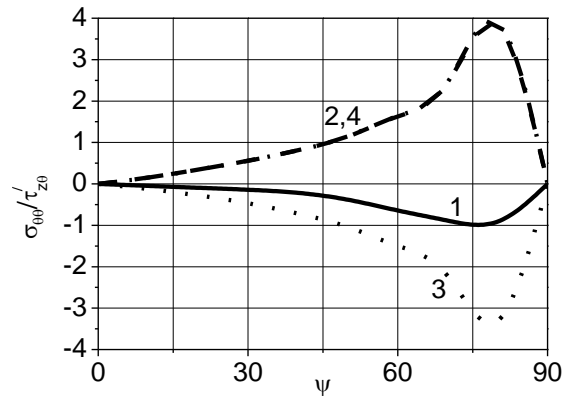


Рис. 2.65. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

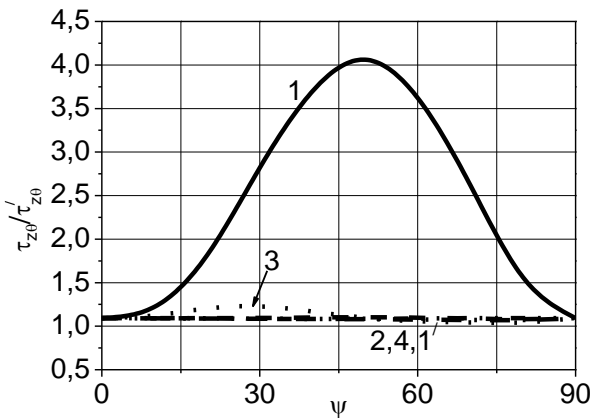


Рис. 2.66. Розподіл напружень $\tau_{z\theta}$ на зовнішній поверхні циліндра

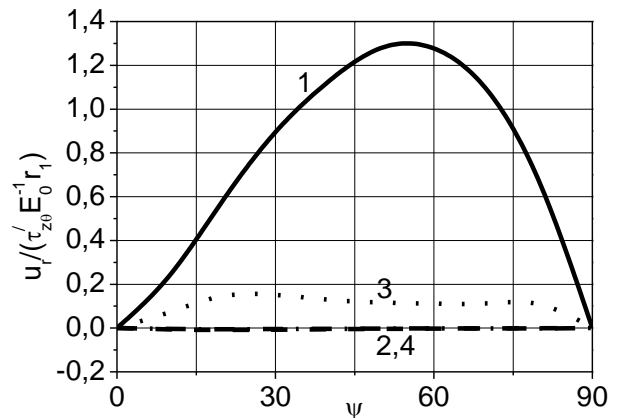


Рис. 2.67. Розподіл переміщень u_r на серединній поверхні циліндра

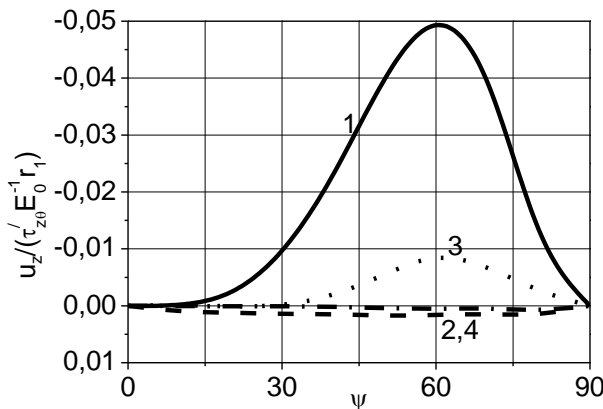


Рис. 2.68. Розподіл переміщень u_z на серединній поверхні циліндра

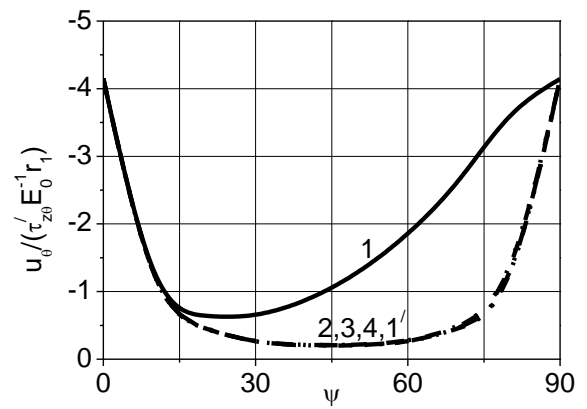


Рис. 2.69. Розподіл переміщень u_θ на серединній поверхні циліндра

Згідно з рис. 2.64 знаки максимальних значень нормальних напружень σ_{zz} залежать від парної або непарної кількості шарів в пакеті. Для парної кількості (криві 2, 4) σ_{zz} – додатні, а для непарної (криві 1, 3) – від’ємні. При цьому максимальні значення напружень σ_{zz} для всіх варіантів шаруватих пакетів мають місце для $\psi_i=10^0$. Водночас збільшення кількості шарів від 1 до 3 (криві 1, 3 відповідно) веде до зростання значень напружень до 1,5%, а від 2 до 4 (криві 2, 4 відповідно) до їх зменшення на орієнтовно 0,3%.

Подібна ситуація має місце і при аналізі рис. 2.65, що представляє залежність нормальних напружень $\sigma_{\theta\theta}$ від кута ψ_i . При непарній кількості шарів пакету (криві 1, 3) максимальні значення цих напружень від’ємні, при парній (криві 2, 4) – додатні. В той же час найбільші величини $\sigma_{\theta\theta}$ мають місце при куті $\psi_i=80^0$. Також відмітимо, що зростання кількості шарів від 1 до 3 (криві 1, 3 відповідно) веде до збільшення напружень $\sigma_{\theta\theta}$ до 72,5%, а від 2 до 4 (криві 2, 4 відповідно) до зростання на орієнтовно 2,5%.

Рис. 2.66 описує значення напружень $\tau_{z\theta}$. З рисунку видно, що збільшення кількості шарів від одного (крива 1) до чотирьох (крива 4) веде до зменшення абсолютних величин цих напружень та наближення до значень здобутих для ортотропної оболонки (крива 1’).

З рис. 2.67 та 2.68, що представляють відповідно зміну переміщень u_r та u_z в залежності від кута ψ_i впливає, що при зміні числа шарів в шаруватому пакеті від одного (крива 1) до чотирьох (крива 4) ці переміщення зменшуються і їх значення прямують до нуля. В той же час зауважимо, що ця тенденція більш контрастно спостерігається для парної кількості шарів пакету ніж для непарної.

Переміщення за коловим напрямком u_θ показані на рис. 2.69. Видно, що вже при двох шарах (крива 2) їх величини близькі до здобутих для ортотропної оболонки (крива 1'), максимальне розходження знаходиться в межах 7% і зменшується до 1,8% для чотиришарової конструкції (крива 4).

2.6.3.3. Вплив збільшення кількості перехресно-укладених шарів на напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту)

Дослідимо вплив збільшення кількості шарів, головні напрями пружності яких повернуті на кути $\pm\psi$ до напрямку меридіана оболонки, на компоненти напружено-деформованого стану циліндричної оболонки, що під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту) знаходяться лише за використанням анізотропних констант матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} : нормальні напруження σ_{zz} і $\sigma_{\theta\theta}$ та переміщення u_r .

Розглянемо оболонкову конструкцію з геометричними, механічними характеристиками та навантаженням такими ж, як і в попередніх пунктах 2.6.3.1-2.6.3.2. Кут повороту $\psi = \pm 50^\circ$. Величини σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, визначатимемо для координати $z = 0$ вздовж твірної на зовнішній поверхні циліндра $r=0,66\text{м}$, а u_r при $z = 0$ на серединній поверхні оболонки $r=0,60\text{м}$. Результати приведено в табл. 2.19 та на рис. 2.70-2.73.

З аналізу результатів приведених в табл. 2.19 та на рис. 2.70-2.73 впливає, що переміщення u_r (табл. 2.19) у випадку збільшення кількості шарів, головні

напрями пружності яких знаходяться під кутом $\psi = \pm 50^0$ до меридіану оболонки зменшують свої абсолютні значення і прямують до нуля. Так при дев'ятнадцяти шарах (табл. 2.19) величини u_r складають дещо більше 1% від значень цих переміщень для одного шару. У випадку парної кількості шарів u_r для двадцятишарового пакету досягають лише 10% цих компонентів деформації для двошарового циліндра.

Таблиця 2.19

Вплив збільшення кількості шарів $\psi = \pm 50^0$ на компоненти напружено-деформованого стану товстостінної циліндричної оболонки отримані за підходом «АПР»

Кількість шарів	$\frac{\sigma_{zz}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{u_r}{\tau'_{z\theta} E_0^{-1} r_1}$
1	-0,7184	-0,3816	1,2787
2	0,8195	1,1439	-0,0040
3	-0,7183	-1,0388	0,1166
4	0,8175	1,1479	-0,0028
5	-0,7665	-1,0911	0,0590
6	0,8174	1,1498	-0,0014
7	-0,7840	-1,1083	0,0387
8	0,8173	1,1509	-0,0012
9	-0,7923	-1,1167	0,0294
10	0,8171	1,1516	-0,0007
11	-0,7967	-1,1215	0,0235
12	0,8170	1,1520	-0,0007
13	-0,7997	-1,1252	0,0197
14	0,8169	1,1525	-0,0005
15	-0,8017	-1,1279	0,0168
16	0,8169	1,1527	-0,0005
17	-0,8032	-1,1301	0,0148
18	0,8168	1,1528	-0,0004
19	-0,8042	-1,1316	0,0133
20	0,8168	1,1530	-0,0004

В той же час нормальні напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ із збільшенням кількості перехресно армованих шарів не зникають, а усталюють свої величини. Так σ_{zz} для непарної кількості шарів від одного до дев'ятнадцяти збільшує свої значення на близько 12%, а для парної зменшує від одного до двадцяти шарів

на 0,3%. Нормальні напруження $\sigma_{\theta\theta}$ у випадку збільшення кількості $\pm\psi$ шарів від одного до дев'ятнадцяти зростають на 196%, а від двох до двадцяти на 0,8%.

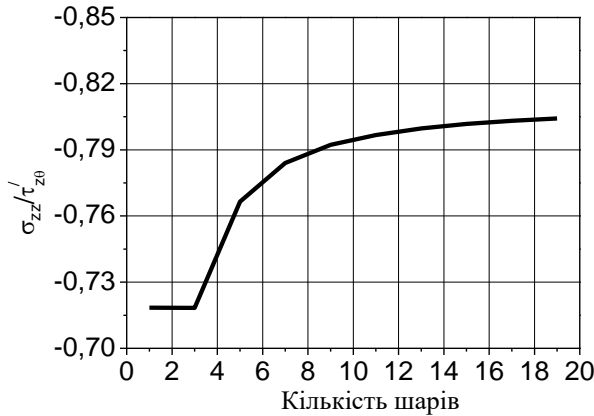


Рис. 2.70. Розподіл напружень σ_{zz} при збільшенні непарної кількості шарів $\pm\psi$

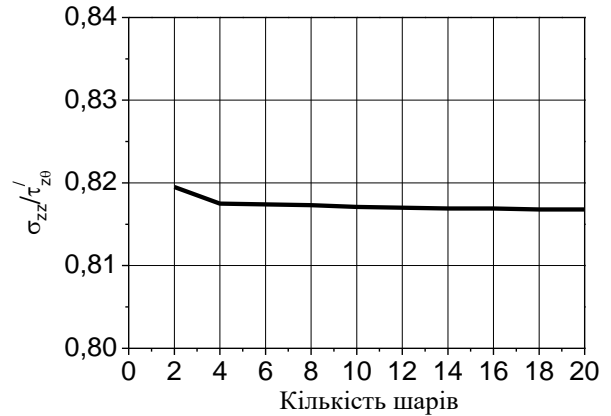


Рис. 2.71. Розподіл напружень σ_{zz} при збільшенні парної кількості шарів $\pm\psi$

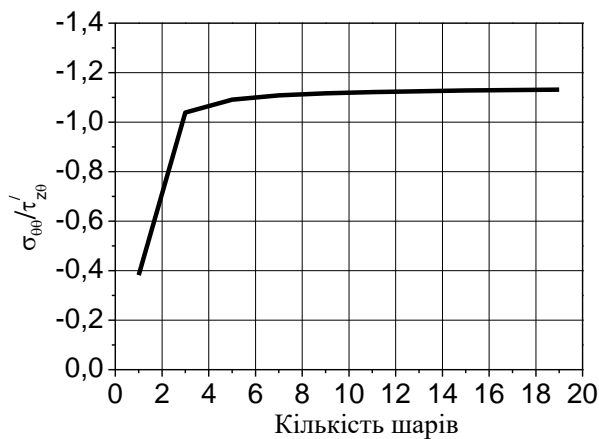


Рис. 2.72. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ при збільшенні непарної кількості шарів $\pm\psi$

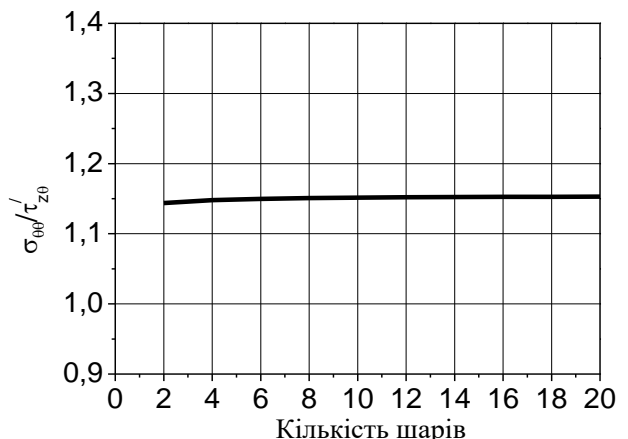


Рис. 2.73. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ при збільшенні парної кількості шарів $\pm\psi$

В табл. 2.20 та на рис. 2.74, 2.75 показаний розподіл компонентів напружено-деформованого стану σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та u_r у випадку кручення десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ анізотропної циліндричної оболонки за її товщиною.

Аналізуючи результати приведені в табл. 2.20 та на рис. 2.74, 2.75 можемо зробити такі висновки. Величини нормальних напружень σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ при переході від шару до шару змінюють свої значення на протилежні при цьому поступово зменшуючись від зовнішньої поверхні до внутрішньої за

абсолютними значеннями на 3% для σ_{zz} та на 2,3% для $\sigma_{\theta\theta}$. Переміщення u_r змінюють свої значення від додатних на внутрішній поверхні до від'ємних на зовнішній.

Таблиця 2.20

Розподіл анізотропних компонентів напружено-деформованого стану за товщиною десятишарової $\psi = \pm 50^\circ$ циліндричної оболонки при дії крайового зсувного зусилля (крутного моменту)

$r, \text{ м}$	$\frac{\sigma_{zz}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\tau'_{z\theta}}$	$\frac{u_r}{\tau'_{z\theta} E_0^{-1} r_1}$
0,660	0,8171	1,1516	-0,0029
0,654	0,8118	1,1454	-0,0027
0,648	0,8074	1,1409	-0,0023
0,648	-0,8174	-1,1569	-0,0023
0,642	-0,8167	-1,1550	-0,0021
0,636	-0,8178	-1,1564	-0,0021
0,636	0,8040	1,1372	-0,0021
0,630	0,8062	1,1397	-0,0019
0,624	0,8068	1,1403	-0,0015
0,624	-0,8134	-1,1510	-0,0015
0,618	-0,8139	-1,1507	-0,0013
0,612	-0,8166	-1,1537	-0,0013
0,612	0,8017	1,1350	-0,0013
0,606	0,8052	1,1389	-0,0011
0,600	0,8082	1,1422	-0,0007
0,600	-0,8093	-1,1453	-0,0007
0,594	-0,8106	-1,1461	-0,0005
0,588	-0,8128	-1,1482	-0,0005
0,588	0,8028	1,1367	-0,0005
0,582	0,8054	1,1394	-0,0003
0,576	0,8095	1,1443	0,0001
0,576	-0,8053	-1,1395	0,0001
0,570	-0,8060	-1,1401	0,0004
0,564	-0,8054	-1,1385	0,0004
0,564	0,8070	1,1417	0,0004
0,558	0,8067	1,1410	0,0006
0,552	0,8123	1,1480	0,0010
0,552	-0,7996	-1,1317	0,0010
0,546	-0,7981	-1,1314	0,0013
0,540	-0,7924	-1,1248	0,0014

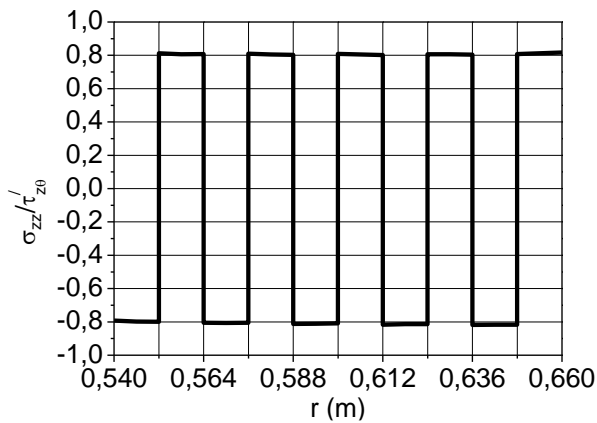


Рис. 2.74. Розподіл напружень σ_{zz} за товщиною десятишарової $\pm \psi$ циліндричної оболонки

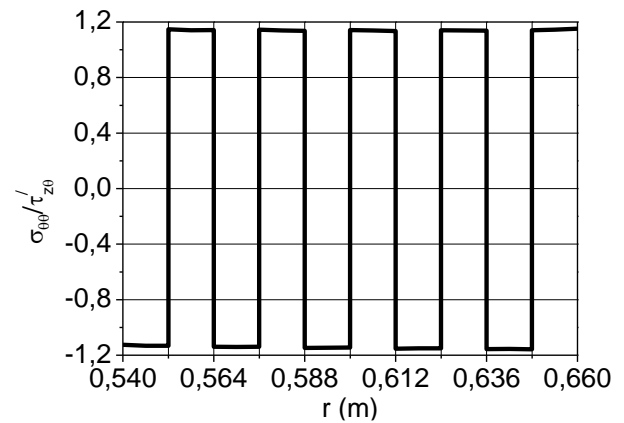


Рис. 2.75. Розподіл напружень $\sigma_{\theta\theta}$ за товщиною десятишарової $\pm \psi$ циліндричної оболонки

2.7. Висновки до розділу 2

В розділі розв’язана задача дослідження в тривимірній постановці напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних композитних шаруватих циліндричних оболонок при вісесиметричних навантаженнях.

Для приведення тривимірної системи до одновимірної було використано аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна у випадку розподіленого бокового тиску та чисельний – прямих при осьовому стиску та крученні. Ними апроксимовано невідомі системи рівнянь вздовж твірної. Також враховано, що під сталим в коловому напрямку навантаженням, до моменту втрати стійкості, докритичний напружено-деформований стан циліндричних оболонок є вісесиметричним. Для розв’язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки було використано метод дискретної ортогоналізації.

За допомогою розробленого підходу визначено параметри напружено-деформованого стану анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього бокового розподіленого тиску, осьового тиску та кручення.

Аналіз товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією розподіленого бокового та осьового тиску дозволив встановити. Збільшення кількості шарів, головні напрямки пружності однонапрявленого

волокнистого матеріалу яких відхилені на кут ψ відносно меридіану оболонки, призводить до того, що напруження σ_{rr} , τ_{rz} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та переміщення u_r і u_z наближаються до значень здобутих для еквівалентних ортотропних оболонок. В той же час дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ та переміщення u_θ , що можливо відшукати лише з урахуванням анізотропних сталих матеріалу, із збільшенням кількості шарів зменшуються та мають тенденцію прямувати до нульових значень. На противагу цьому дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ збільшують свої максимальні значення із зростанням кількості шарів. У випадку розподіленого бокового тиску стають співвимірними із нормальними напруженнями σ_{zz} та складають біля 20% від максимальних значень напружень $\sigma_{\theta\theta}$, а для осьового тиску $\tau_{z\theta}$ досягають 42% від напружень σ_{zz} при $\psi = \pm 50^\circ$.

При крученні збільшення кількості шарів веде до того, що дотичні напруження $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_θ за коловим напрямком наближаються за величинами до значень отриманих згідно ортотропного підходу «ОПР» до розрахунку. Напруження σ_{rr} , τ_{rz} та переміщення u_r і u_z знайдені згідно анізотропного підходу «АПР» до їх визначення зменшуються та прямують до нульових значень при збільшенні кількості шарів в пакеті. Водночас напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$, що можливо відшукати лише з урахуванням анізотропних констант матеріалу за підходом «АПР» при крученні із збільшенням кількості шарів не зникають, а зростають. Так напруження σ_{zz} досягає 75%, а $\sigma_{\theta\theta}$ 106% від дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ при $\psi = \pm 50^\circ$.

Також відмітимо, що використання підходу «АПР» для пакетів утворених перехресним укладанням шарів $\pm \psi$ дозволяє спостерігати на графіках стрибки при переході між точками контактів шарів для напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та $\tau_{z\theta}$ для всіх розглянутих типів навантажень на анізотропні циліндричні оболонки, що не відображається за використанням підходу «ОПР».

РОЗДІЛ 3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ЗАХИЩЕНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИМ МАТЕРІАЛОМ, ПІД ТЕРМОСИЛОВОЮ ДІЄЮ

3.1. Основні відомості про функціонально-градієнтні матеріали

3.1.1. Кераміко-металеві функціонально-градієнтні матеріали

Континуальні конструкції з композитних матеріалів широко використовуються в найрізноманітніших елементах сучасної техніки. Наприклад, авіаційна та ракетобудівна галузі потребують використання оболонок з легких композиційних матеріалів з високою несучою здатністю. Нажаль, композитні матеріали не завжди здатні використовуватись в умовах високих температур, тому що їх механічні характеристики, під такою дією, можуть суттєво погіршуватись. Для захисту композитних конструкцій від дії температури може використовуватися термостійка кераміка. Однак, цей матеріал має крихкі властивості, що негативно впливає на деформації згину.

Відносно недавно з'явився новий клас композитних матеріалів, відомий як функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [241, 251, 266, 269-272, 323]. Типовий ФГМ є неоднорідним композитом виготовленим з різних фаз матеріальних складових (як правило, кераміки та металу). Керамічні складові ФГМ здатні протистояти високотемпературному середовищу завдяки кращим характеристикам термостійкості, а металеві складові забезпечують більш високі механічні показники. Таким чином, використання ФГМ може сприяти захисту оболонкової конструкції від дії температурного поля, що дозволить їй сприймати навантаження без зниження її, наприклад, несучої здатності.

Водночас необхідно враховувати, що фізико-механічні властивості функціонально-градієнтної складової оболонки є залежними від температури та визначаються з виразів [311]:

$$\begin{aligned}
 E &= P_{0E} \cdot (P_{-1E}T^{-1} + 1 + P_{1E}T + P_{2E}T^2 + P_{3E}T^3); \\
 \nu &= P_{0\nu} \cdot (P_{-1\nu}T^{-1} + 1 + P_{1\nu}T + P_{2\nu}T^2 + P_{3\nu}T^3); \\
 \alpha &= P_{0\alpha} \cdot (P_{-1\alpha}T^{-1} + 1 + P_{1\alpha}T + P_{2\alpha}T^2 + P_{3\alpha}T^3); \\
 \kappa &= P_{0\kappa} \cdot (P_{-1\kappa}T^{-1} + 1 + P_{1\kappa}T + P_{2\kappa}T^2 + P_{3\kappa}T^3),
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

де E – шуканий модуль пружності, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного температурного розширення та κ – теплопровідність для заданої температури $T(^{\circ}\text{K})$, P_{0E} , $P_{0\nu}$, $P_{0\alpha}$, $P_{0\kappa}$ – характеристики матеріалу при $T=0^{\circ}\text{K}$, P_{iE} , $P_{i\nu}$, $P_{i\alpha}$, $P_{i\kappa}$ – беруться з таблиць 3.1 – 3.4 згідно з [291].

Таблиця 3.1

Модулі пружності кераміки та металу E (Па)

Матеріал	P_{0E}	P_{-1E}	P_{1E}	P_{2E}	P_{3E}
Нітрид силікону	$348,43 \cdot 10^9$	0	$-3,070 \cdot 10^{-4}$	$2,160 \cdot 10^{-7}$	$-8,946 \cdot 10^{-11}$
Цирконій	$244,27 \cdot 10^9$	0	$-1,371 \cdot 10^{-3}$	$1,214 \cdot 10^{-6}$	$-1,681 \cdot 10^{-10}$
Оксид алюмінію	$349,55 \cdot 10^9$	0	$-3,853 \cdot 10^{-4}$	$4,027 \cdot 10^{-7}$	$-1,673 \cdot 10^{-10}$
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	$122,56 \cdot 10^9$	0	$-4,586 \cdot 10^{-4}$	0	0
Нержавіюча сталь	$201,04 \cdot 10^9$	0	$3,079 \cdot 10^{-4}$	$-6,534 \cdot 10^{-7}$	0
Нікель	$223,95 \cdot 10^9$	0	$-2,794 \cdot 10^{-4}$	$-3,998 \cdot 10^{-9}$	0

Таблиця 3.2

Коефіцієнти Пуассона кераміки та металу ν

Матеріал	$P_{0\nu}$	$P_{-1\nu}$	$P_{1\nu}$	$P_{2\nu}$	$P_{3\nu}$
Нітрид силікону	0,2400	0	0	0	0
Цирконій	0,2882	0	$1,133 \cdot 10^{-4}$	0	0
Оксид алюмінію	0,2600	0	0	0	0
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	0,2884	0	$1,121 \cdot 10^{-4}$	0	0
Нержавіюча сталь	0,3262	0	$-2,002 \cdot 10^{-4}$	$3,797 \cdot 10^{-7}$	0
Нікель	0,3100	0	0	0	0

Таблиця 3.3

Коефіцієнти лінійного температурного розширення кераміки та металу
 α ($^{\circ}\text{K}^{-1}$)

Матеріал	$P_{0\alpha}$	$P_{-1\alpha}$	$P_{1\alpha}$	$P_{2\alpha}$	$P_{3\alpha}$
Нітрид силікону	$5,8723 \cdot 10^{-6}$	0	$9,095 \cdot 10^{-4}$	0	0
Цирконій	$12,766 \cdot 10^{-6}$	0	$-1,491 \cdot 10^{-3}$	$1,006 \cdot 10^{-5}$	$-6,778 \cdot 10^{-11}$
Оксид алюмінію	$6,8269 \cdot 10^{-6}$	0	$1,838 \cdot 10^{-4}$	0	0
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	$7,5788 \cdot 10^{-6}$	0	$6,638 \cdot 10^{-4}$	$-3,147 \cdot 10^{-6}$	0
Нержавіюча сталь	$12,330 \cdot 10^{-6}$	0	$8,086 \cdot 10^{-4}$	0	0
Нікель	$9,9209 \cdot 10^{-6}$	0	$8,705 \cdot 10^{-4}$	0	0

Таблиця 3.4

Теплопровідність кераміки та металу κ ($\text{Вт}/(\text{м}^{\circ}\text{K})$)

Матеріал	$P_{0\kappa}$	$P_{-1\kappa}$	$P_{1\kappa}$	$P_{2\kappa}$	$P_{3\kappa}$
Нітрид силікону	13,723	0	$-1,032 \cdot 10^{-3}$	$5,466 \cdot 10^{-7}$	$-7,876 \cdot 10^{-11}$
Цирконій	1,700	0	$1,276 \cdot 10^{-4}$	$6,648 \cdot 10^{-8}$	0
Оксид алюмінію	-14,087	-1123,6	$-6,277 \cdot 10^{-3}$	0	0
Титановий сплав (Ti-6Al-4V)	1,000	0	$1,704 \cdot 10^{-2}$	0	0
Нержавіюча сталь	15,379	0	$-1,264 \cdot 10^{-3}$	$2,092 \cdot 10^{-6}$	$-7,223 \cdot 10^{-10}$
Нікель ^a	187,66	0	$-2,869 \cdot 10^{-3}$	$4,005 \cdot 10^{-6}$	$-1,983 \cdot 10^{-9}$
Нікель ^b	58,754	0	$-4,614 \cdot 10^{-4}$	$6,670 \cdot 10^{-7}$	$-1,523 \cdot 10^{-10}$

^a для $300^{\circ}\text{K} \leq T \leq 635^{\circ}\text{K}$; ^b для $635^{\circ}\text{K} \leq T$

ФГМ утворюється з використанням двох матеріалів із різними властивостями з наперед заданим розподілом об'ємних часток кожного з них. Оскільки об'ємна частка поступово змінюється за напрямком градації, фізико-механічні властивості ФГМ також змінюються за цим напрямком.

Розглядатимемо випадок, коли зміна об'ємних часток ФГМ відбувається за товщиною оболонки. Тоді спільні характеристики функціонально-градієнтного матеріалу визначаються згідно [253]:

$$\begin{aligned}
 E(\xi, T) &= (E_c - E_m) \left(\frac{\xi}{h} \right)^N + E_m; & \nu(\xi, T) &= (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{\xi}{h} \right)^N + \nu_m; \\
 \alpha(\xi, T) &= (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{\xi}{h} \right)^N + \alpha_m; & \kappa(\xi, T) &= (\kappa_c - \kappa_m) \left(\frac{\xi}{h} \right)^N + \kappa_m. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

де $E(\xi, T)$, $\nu(\xi, T)$, $\alpha(\xi, T)$, $\kappa(\xi, T)$ – фізико-механічні характеристики спільного матеріалу за товщиною, E_m , ν_m , α_m , κ_m – фізико-механічні

характеристики металу, що визначені згідно виразів (3.1) залежно від температури, E_c , ν_c , α_c , κ_c – фізико-механічні характеристики кераміки, що також визначені згідно виразів (3.1) залежно від температури, h – товщина функціонально-градієнтного шару оболонки, ξ – координата за товщиною $\xi = r - r_1$, r – координата довільної точки в загальній системі координат оболонки, рис. 3.1, r_1 – координата внутрішньої поверхні шару ФГМ, N – об’ємний показник фракції змішуваних матеріалів [300].

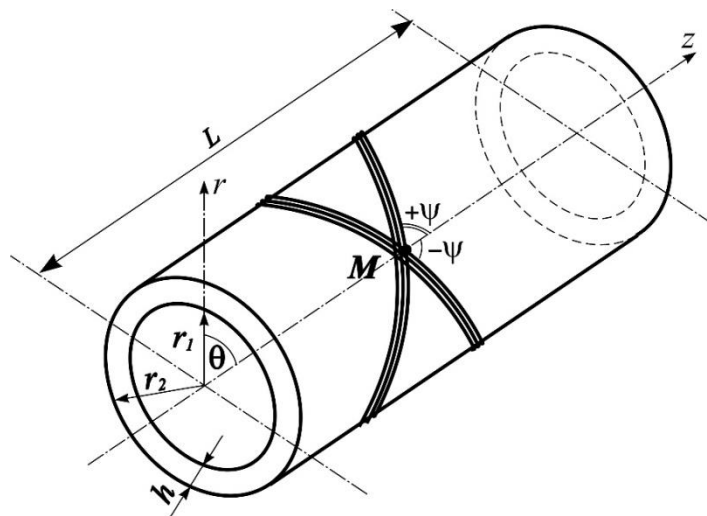


Рис. 3.1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка

У випадку коли на внутрішній та зовнішній поверхнях шару ФГМ діють різні за значеннями температурні поля, температура матеріалу шару буде функцією координати за його товщиною $T(\xi)$. Для коректного визначення фізико-механічних характеристик металевої та керамічної фракцій (3.1) необхідно мати можливість визначати температуру в довільній точці за товщиною шару ФГМ. Це можливо при використанні залежностей з [300]:

$$T(\xi) = T_0 + (T_n - T_0)\eta(\xi), \quad (3.3)$$

де T_0 – температура на внутрішній поверхні шару ФГМ, T_n – температура на зовнішній поверхні шару ФГМ, функція $\eta(\xi)$ визначається з виразу

$$\eta(\xi) = \frac{1}{C} \left[\frac{\xi}{h} - \frac{\kappa_{mc}}{(N+1)\kappa_c} \left(\frac{\xi}{h}\right)^{N+1} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2N+1)\kappa_c^2} \left(\frac{\xi}{h}\right)^{2N+1} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3N+1)\kappa_c^3} \left(\frac{\xi}{h}\right)^{3N+1} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4N+1)\kappa_c^4} \left(\frac{\xi}{h}\right)^{4N+1} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(5N+1)\kappa_c^5} \left(\frac{\xi}{h}\right)^{5N+1} \right], \quad (3.4)$$

тут

$$C = 1 - \frac{\kappa_{mc}}{(N+1)\kappa_c} + \frac{\kappa_{mc}^2}{(2N+1)\kappa_c^2} - \frac{\kappa_{mc}^3}{(3N+1)\kappa_c^3} + \frac{\kappa_{mc}^4}{(4N+1)\kappa_c^4} - \frac{\kappa_{mc}^5}{(5N+1)\kappa_c^5}, \quad (3.5)$$

$$\kappa_{mc} = \kappa_m - \kappa_c. \quad (3.6)$$

3.1.2. Функціонально-градієнтні матеріали з наноармуванням

Від моменту винайдення наноматеріалів науковці намагаються використати їх кращі якості для розвитку новітніх технологій в різноманітних галузях промисловості [262, 276, 280, 289]. Одним із варіантів використання наноматеріалів є підсилення оболонкових конструкцій, що можуть використовуватись, наприклад, в ракетобудуванні. Однак, у зв'язку із високою вартістю подібних матеріалів, на даний момент часу, більш раціональним є використання наноматеріалів у якості армуючого матеріалу для певного типу матриці. Встановлено, що введення наноматеріалів в керамічну, металеву або полімерну матрицю може суттєво змінити властивості отриманого матеріалу [260]. Тип матриці обирається залежно від виду впливу на оболонкову конструкцію.

Для випадку розглядуваного у розділі термосилового навантаження на оболонкову конструкцію доцільно розглянути варіант армування керамічної матриці виду описаного в підрозділі 3.1.1, наприклад, вуглецевими нанотрубками [4]. При цьому припускається, що всі вуглецеві нанотрубки можливо розташувати у матеріалі за деяким наперед вибраним напрямком, утворивши таким чином ортотропний ФГМ в своїх власних осях.

Згідно [4] мають місце чотири типи розташування нанотрубок за товщиною шару (FGL, FGV, FGO та FGX), що відповідають нерівномірному армуванню за цим напрямком і таким чином шар матеріалу проявляє властивості функціонально-градієнтного композитного матеріалу, рис. 3.2.

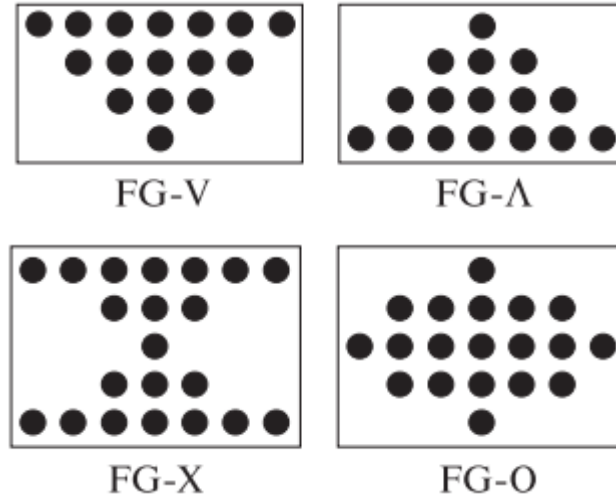


Рис. 3.2. Типи розташування нанотрубок за товщиною стінки оболонки

Спільні фізико-механічні характеристики, отриманого таким чином, ФГМ залежатимуть від координати за товщиною ξ і визначатимуться згідно [234, 301, 316]:

$$\begin{aligned}
 E_{zz}(\xi) &= \eta_1 V_{CNT}(\xi) E_{zz}^{CNT} + V_M(\xi) E^M; & E_{\theta\theta}(\xi) &= \frac{\eta_2 E_{\theta\theta}^{CNT} E^M}{V_{CNT}(\xi) E^M + V_M(\xi) E_{\theta\theta}^{CNT}}; \\
 E_{rr}(\xi) &= \frac{\eta_2 E_{rr}^{CNT} E^M}{V_{CNT}(\xi) E^M + V_M(\xi) E_{rr}^{CNT}}; & G_{z\theta}(\xi) &= \frac{\eta_3 G_{z\theta}^{CNT} G^M}{V_{CNT}(\xi) G^M + V_M(\xi) G_{z\theta}^{CNT}}; \\
 G_{rz}(\xi) &= \frac{\eta_3 G_{rz}^{CNT} G^M}{V_{CNT}(\xi) G^M + V_M(\xi) G_{rz}^{CNT}}; & G_{r\theta}(\xi) &= \frac{\eta_3 G_{r\theta}^{CNT} G^M}{V_{CNT}(\xi) G^M + V_M(\xi) G_{r\theta}^{CNT}}; \\
 \nu_{z\theta}(\xi) &= V_{CNT}(\xi) \nu_{z\theta}^{CNT} + V_M(\xi) \nu^M; & \nu_{\theta z}(\xi) &= \frac{\nu_{z\theta}(\xi)}{E_{zz}(\xi)} E_{\theta\theta}(\xi) \\
 \nu_{rz}(\xi) &= V_{CNT}(\xi) \nu_{rz}^{CNT} + V_M(\xi) \nu^M; & \nu_{r\theta}(\xi) &= V_{CNT}(\xi) \nu_{r\theta}^{CNT} + V_M(\xi) \nu^M; \\
 \alpha_z(\xi) &= V_{CNT}(\xi) \alpha_z^{CNT} + V_M(\xi) \alpha^M; & V_M(\xi) &= 1 - V_{CNT}(\xi); \\
 \alpha_\theta(\xi) &= (1 + \nu_{z\theta}^{CNT}) V_{CNT}(\xi) \alpha_\theta^{CNT} + (1 + \nu^M) V_M(\xi) \alpha_\theta^M - \nu_{z\theta}(\xi) \alpha_z(\xi).
 \end{aligned}$$

$$\alpha_r(\xi) = (1 + \nu_{zr}^{CNT}) V_{CNT}(\xi) \alpha_r^{CNT} + (1 + \nu^M) V_M(\xi) \alpha^M - \nu_{zr}(\xi) \alpha_z(\xi). \quad (3.7)$$

В (3.7) $V_{CNT}(\xi)$ – об’ємна частка нанотрубок на рівні заданої координати за товщиною ξ , визначається в залежності від сукупної об’ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* в матеріалі згідно табл. 3.5 [252, 301, 316]; $E_{zz}(\xi)$, $E_{\theta\theta}(\xi)$, $E_{rr}(\xi)$, $G_{z\theta}(\xi)$, $G_{rz}(\xi)$, $G_{r\theta}(\xi)$, $\nu_{\theta z}(\xi)$, $\nu_{z\theta}(\xi)$, $\nu_{rz}(\xi)$, $\nu_{r\theta}(\xi)$, $\alpha_z(\xi)$, $\alpha_\theta(\xi)$, $\alpha_r(\xi)$ – модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона і лінійного температурного розширення спільного композитного матеріалу; E_{zz}^{CNT} , $E_{\theta\theta}^{CNT}$, E_{rr}^{CNT} , $G_{z\theta}^{CNT}$, G_{rz}^{CNT} , $G_{r\theta}^{CNT}$, $\nu_{\theta z}^{CNT}$, α^{CNT} – модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона і лінійного температурного розширення наноматеріалу; E^M , G^M , ν^M , α^M – модуль пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона і лінійного температурного розширення керамічної матриці; η_1 , η_2 , η_3 – параметри ефективності наноармування.

Таблиця 3.5

Зміна об’ємної частки наноматеріалу за товщиною ФГМ в залежності від типу армування

Тип армування	Об’ємна частка нанотрубок
FG-Λ	$V_{CNT}(\xi) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\xi}{h}\right) V_{CNT}^*$
FG-V	$V_{CNT}(\xi) = 2 \cdot \left(\frac{\xi}{h}\right) V_{CNT}^*$
FG-O	$V_{CNT}(\xi) = 2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \left \left(\frac{\xi}{h}\right) - 0.5h\right \right) V_{CNT}^*$
FG-X	$V_{CNT}(\xi) = 4 \cdot \left(\left \left(\frac{\xi}{h}\right) - 0.5h\right \right) V_{CNT}^*$

3.2. Постановка задачі про термонапружений стан анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

На теперішній час, проведений достатньо детальний аналіз напружено-деформованого стану тонких і нетонких циліндричних оболонок як зі

звичайних композитів, так і з ФГМ в рамках розрахунків двовимірних систем під дією термосилового навантаження [31, 89, 291, 299, 300, 302]. В цих роботах зміна характеристик напружено-деформованого стану за товщиною конструкції моделюється гіпотезами різного ступеня точності. Загально відомо, що для розрахунку напружено-деформованого стану товстостінних циліндричних оболонок слід застосовувати підхід [86, 88, 255-257], що спирається на використання рівнянь просторової теорії пружності, який дозволяє коректно проаналізувати зміну параметрів напружено-деформованого стану за товщиною конструкції.

Розглянемо підхід до встановлення напружено-деформованого стану товстостінної шаруватої анізотропної циліндричної оболонки (рис. 3.1), що виготовлена з волокнистого композиту укладеного під кутом до твірної та шару з ФГМ зі спробою оцінки впливу температури на таку, складену з різних матеріалів за товщиною, конструкцію. Відомо, що при цьому необхідно враховувати ефект анізотропії, викликаний розбіжністю між напрямками армування та координатними осями оболонки.

Для розв'язку задачі про термонапружений стан шаруватих анізотропних оболонкових конструкцій в просторовій постановці використаємо систему рівнянь (1.47) знехтувавши доданками, що враховують частоти вільних коливань. Тоді для кожного i -го шару анізотропної композитної циліндричної оболонки система (1.47) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i}{r} \alpha_{zz}^i T - \frac{c_{22}^i}{r} \alpha_{\theta\theta}^i T - \frac{c_{26}^i}{r} \alpha_{z\theta}^i T ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\ & + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\
&+ c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta}; \\
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \alpha_{33}^i T - \\
&- a_{13}^i c_{11}^i \alpha_{11}^i T - a_{13}^i c_{12}^i \alpha_{22}^i T - a_{13}^i c_{16}^i \alpha_{12}^i T - a_{23}^i c_{12}^i \alpha_{11}^i T - a_{23}^i c_{22}^i \alpha_{22}^i T - \\
&- a_{23}^i c_{26}^i \alpha_{12}^i T - a_{36}^i c_{16}^i \alpha_{11}^i T - a_{36}^i c_{26}^i \alpha_{22}^i T - a_{36}^i c_{66}^i \alpha_{12}^i T; \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$ – нормальні та дотичні напруження, u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення точок кожного i -го шару оболонки за напрямками осей циліндричної системи координат z , θ , r відповідно; α_{zz} , $\alpha_{\theta\theta}$, α_{rr} – коефіцієнти лінійного температурного розширення; $\alpha_{z\theta}$, α_{rz} , $\alpha_{r\theta}$ – коефіцієнти лінійного температурного зсуву відповідно [133]; T – температура, що відраховується від температури вихідного недеформованого стану. Сталі c_{kl}^i ($k, l = 1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються згідно (1.48).

Співвідношення закону Гука, з урахуванням доданків, що враховують температурну дію, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{zz}^i T; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{22}^i T; \\
\tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{12}^i T; \\
e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \alpha_{33}^i T - a_{13}^i \beta_{11}^i T - a_{23}^i \beta_{22}^i T - a_{36}^i \beta_{12}^i T;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \\
e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

де β_{zz}^i , $\beta_{\theta\theta}^i$, $\beta_{z\theta}^i$ – термомпружні коефіцієнти i -го шару, що пов'язані з температурою $T(^{\circ}\text{K})$ залежностями:

$$\begin{aligned}
\beta_{zz}^i T &= (c_{11}^i \alpha_{zz}^i + c_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{16}^i \alpha_{z\theta}^i) T; \\
\beta_{\theta\theta}^i T &= (c_{12}^i \alpha_{zz}^i + c_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{26}^i \alpha_{z\theta}^i) T; \\
\beta_{z\theta}^i T &= (c_{16}^i \alpha_{zz}^i + c_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i + c_{66}^i \alpha_{z\theta}^i) T.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Зв'язок між коефіцієнтами лінійного температурного розширення та зсуву матеріалу кожного i -го шару з однією площиною пружної симетрії та коефіцієнтами лінійного температурного розширення ортотропного однонапрявленого матеріалу такий [10, 86]:

$$\begin{aligned}
\alpha_{zz}^i &= \alpha_z^i \cos^2 \psi^i + \alpha_{\theta}^i \sin^2 \psi^i; \\
\alpha_{\theta\theta}^i &= \alpha_z^i \sin^2 \psi^i + \alpha_{\theta}^i \cos^2 \psi^i; \\
\alpha_{z\theta}^i &= 2(\alpha_z^i - \alpha_{\theta}^i) \cos \psi^i \sin \psi^i; \\
\alpha_{rr}^i &= \alpha_r^i.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тут ψ^i – кут повороту головних напрямів пружності матеріалу i -го шару до напрямку твірної оболонки (рис. 3.1).

Прийmemo також, що при розв'язку задачі (3.8) між i -м та $i+1$ -м шарами виконуються умови їх жорсткого контакту без відриву та проковзування:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_{\theta}^i(r_i) &= u_{\theta}^{i+1}(r_i).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Розв'язок системи (3.8) у випадку лише температурної дії на оболонку має задовольняти умовам на бокових поверхнях при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0 \tag{3.13}$$

або у вигляді (2.6), якщо крім дії температури до бокових поверхонь циліндричної оболонки можливе прикладення зовнішніх або внутрішніх силових факторів .

При реалізації задачі (3.8) граничні умови на торцях оболонки для $z = 0$ та $z = L$ (рис. 3.1) можливо приймати у вигляді (2.7–2.10).

3.3. Побудова чисельно-аналітичного підходу до розв'язку задачі визначення термонапруженого стану пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок в просторовій постановці

Розв'язок системи (3.8) здійснимо при використанні граничних умов на поверхнях циліндричної оболонки (3.13) та на її торцях (2.7 – 2.10) .

Прийmemo на торцях оболонки, при $z = 0$, $z = L$ такі граничні умови:

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0. \quad (3.14)$$

При розв'язку тривимірної системи рівнянь (3.8) для граничних умов на поверхнях (3.13) і торцях (3.14) циліндричної оболонки, скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в подвійні тригонометричні ряди [86] за координатою вздовж твірної циліндра z та коловою координатою θ так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (3.14):

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z;$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z;$$

$$u_r(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4,pk}(r) \cos k\theta + y'_{4,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Тут $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – коефіцієнти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки: $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, u_r, u_z, u_\theta$, а p, m, k – хвильові числа в цих рядах. Параметр $l_m = m\pi/L$, де L – довжина твірної циліндра (рис. 3.1).

Розглядатимемо випадок дослідження оболонкових конструкцій в просторовій постановці під сталою уздовж твірної та в коловому напрямку циліндричної оболонки температурою. При цьому вважатимемо напружено-деформований стан (НДС) циліндричних оболонок вісесиметричним, а отже і компоненти НДС є сталими за коловою координатою.

З урахуванням цього, після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (3.8) за допомогою співвідношень (3.15), отримаємо для кожного i -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку нормальної форми Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r)\bar{y}^i + f^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = \overline{1, 12}), \quad (3.16)$$

де $\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/} \right\}^T$ – розв'язуюча вектор-функція. $T^i(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r , f^i – компоненти напруженого стану, що пов'язані з температурою в системі (3.8).

До системи рівнянь (3.16), у випадку лише температурного впливу, необхідно приєднати відповідні однорідні рівняння, що описують граничні умови на поверхнях оболонки:

$$B_1 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_1; \quad (3.17)$$

$$B_2 \bar{y}(r) = 0; \quad r = r_2. \quad (3.18)$$

Тут B_1, B_2 – матриці розміром 6×12 , що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (3.13).

У випадку термосилового впливу граничні умови на поверхнях оболонки приймаються у виді (2.13), (2.14).

Ненульові елементи матриці $T^i(r)$, вони ж коефіцієнти при невідомих системи (3.16) $t_{n,l}^i(r)$, запишуться у вигляді (2.15). Компоненти, що пов'язані з температурою в системі (3.16) визначаються так:

$$\begin{aligned} f_1^i = f_7^i &= -\frac{b_{12}^i}{r} \alpha_{zz}^i T - \frac{b_{22}^i}{r} \alpha_{\theta\theta}^i T - \frac{b_{26}^i}{r} \alpha_{z\theta}^i T; \\ f_2^i = f_3^i = f_8^i = f_9^i &= 0; \\ f_4^i = f_{10}^i &= \alpha_{rr}^i T - a_{13}^i b_{11}^i \alpha_{zz}^i T - a_{13}^i b_{12}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{13}^i b_{16}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{23}^i b_{12}^i \alpha_{zz}^i T - \\ &- a_{23}^i b_{22}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{23}^i b_{26}^i \alpha_{z\theta}^i T - a_{36}^i b_{16}^i \alpha_{zz}^i T - a_{36}^i b_{26}^i \alpha_{\theta\theta}^i T - a_{36}^i b_{66}^i \alpha_{z\theta}^i T; \\ f_5^i = f_{11}^i &= 0; \quad f_6^i = f_{12}^i = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Система (3.16), разом з граничними умовами на поверхнях перпендикулярних напрямку інтегрування (3.17) та (3.18), дозволяє визначати функції $y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}$, що описують напружено-деформований стан оболонки (3.15) за її товщиною.

Після розв'язку системи (3.16), визначення компонентів напружень σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$ та переміщень u_r^i , u_z^i , u_θ^i проведемо аналогічно описаному в підпункті 2.2.

Напруження σ_{zz}^i , $\sigma_{\theta\theta}^i$ та $\tau_{z\theta}^i$ виразимо через розв'язуючі функції закону Гука (3.9), з використанням залежностей (2.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{zz}^i T; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{\theta\theta}^i T; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i - \beta_{z\theta}^i T. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.4. Достовірність розв'язку задач про термонапружений стан пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Для оцінки практичної збіжності чисельного підходу стосовно визначення параметрів напружено-деформованого стану циліндричних оболонок від температурної дії були виконані співставлення результатів розрахунків з даними приведеними в дослідженнях інших авторів.

Розглянемо задачу [87] про дію на ізотропну оболонку температурного поля, що змінюється за законом $T = T_0 \sin \frac{\pi z}{L}$, де $T_0 = const$. Коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу $\alpha = const$. Задача розв'язувалась для циліндричної оболонки з такими геометричними параметрами: радіус серединної поверхні $r = 0,6\text{м}$; довжина уздовж твірної $L = 2r$; товщина оболонки $h = r/10$. Закріплення торців оболонки відповідає умовам (3.14).

Результати порівняння амплітудних значень напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та переміщень u_z , u_r , для випадку змінного за твірною температурного поля, проведено на основі співвідношень [87] і приведено в табл. 3.6.

Таблиця 3.6

Результати порівняння переміщень u_r , u_z і напружень σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ для ізотропного циліндра

Координата за товщиною r , м	$\sigma_{zz} / E\alpha T_0$			$\sigma_{\theta\theta} / E\alpha T_0$		
	[87]	Пропонований підхід	D, %	[87]	Пропонований підхід	D, %
0,57	-0,134	-0,134	0,0	$-0,461 \cdot 10^{-1}$	$-0,461 \cdot 10^{-1}$	0,0
0,606	$0,236 \cdot 10^{-1}$	$0,236 \cdot 10^{-1}$	0,0	$0,260 \cdot 10^{-2}$	$0,260 \cdot 10^{-2}$	0,0
0,63	0,134	0,134	0,0	$0,351 \cdot 10^{-1}$	$0,351 \cdot 10^{-1}$	0,0
	$u_r / \left(\frac{\alpha T_0 h}{6} \right)$			$u_z / \left(\frac{\alpha T_0 h}{6} \right)$		
0,57	$0,567 \cdot 10^2$	$0,567 \cdot 10^2$	0,0	$-0,336 \cdot 10^2$	$-0,336 \cdot 10^2$	0,0
0,606	$0,604 \cdot 10^2$	$0,604 \cdot 10^2$	0,0	$-0,397 \cdot 10^2$	$-0,397 \cdot 10^2$	0,0
0,63	$0,627 \cdot 10^2$	$0,627 \cdot 10^2$	0,0	$-0,429 \cdot 10^2$	$-0,429 \cdot 10^2$	0,0

З аналізу порівнюваних в табл. 3.6 результатів напружень і переміщень спостерігається співпадіння результатів.

Порівняння результатів визначення термонапруженого стану циліндричної анізотропної оболонки було проведено із величинами напружень та переміщень приведених в [86]. В просторовій постановці досліджений вплив зміни за товщиною кута повороту головних напрямів пружності ψ ортотропного матеріалу відносно твірної оболонки. Механічні характеристики матеріалу такі:

$$a_{11} = \frac{E_0^{-1}}{138}; \quad a_{22} = a_{33} = \frac{E_0^{-1}}{9,7}; \quad a_{12} = a_{13} = -\frac{0,31 \cdot E_0^{-1}}{138}; \quad a_{23} = -\frac{0,5 \cdot E_0^{-1}}{9,7};$$

$$a_{44} = \frac{E_0^{-1}}{3,2}; \quad a_{55} = a_{66} = \frac{E_0^{-1}}{6,9}; \quad E_0 = const.$$

Коефіцієнти лінійного температурного розширення однонапрявленого ортотропного матеріалу $\alpha_z = 0,88 \alpha_0$; $\alpha_\theta = \alpha_r = 31 \alpha_0$; $\alpha_0 = const$. Оболонка знаходиться під дією температурного поля, що змінюється згідно залежності

$$T = T_0 \sin^8 \frac{\pi z}{L},$$

де $T_0 = const$.

Кут ψ є функцією радіальної координати

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} + \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \cos \frac{10\pi(r - r_1)}{r_2 - r_1},$$

де $\psi_1 = \pi/12$ – кут повороту головних напрямів пружності матеріалу на поверхні оболонки з координатою r_1 , ψ_2 – кут повороту на поверхні оболонки з координатою r_2 , r – координата точки за товщиною циліндра, для якої визначається величина ψ .

Геометричні характеристики циліндричної оболонки такі: $r_2 = 1,1r_1$; $L = 2r_1$. Закріплення торців оболонки відповідає умовам (3.21).

Результати співставлення значень компонентів напруженого стану τ_{rz} і $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_r і u_θ для координати $z = 0,25L$ за довжиною твірної циліндра

для окремих значень кута ψ , для випадку змінного за твірною температурного поля, проведено на основі співвідношень [86] і представлено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Результати порівняння переміщень u_r , u_θ і напружень τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ для анізотропної циліндричної оболонки

Кут повороту ψ_2	$u_r / \alpha_0 T_0 r_1$			$u_\theta / \alpha_0 T_0 r_1$		
	[86]	Пропонований підхід	D, %	[86]	Пропонований підхід	D, %
$\pi/6$	$-0,445 \cdot 10$	$-0,445 \cdot 10$	0,0	$0,237 \cdot 10^2$	$0,237 \cdot 10^2$	0,0
$\pi/3$	$0,418 \cdot 10$	$0,418 \cdot 10$	0,0	$0,209 \cdot 10^2$	$0,209 \cdot 10^2$	0,0
$\pi/2$	$-0,298 \cdot 10$	$-0,298 \cdot 10$	0,0	$0,123 \cdot 10^2$	$0,123 \cdot 10^2$	0,0
	$\tau_{rz} / E_0 \alpha_0 T_0$			$\tau_{r\theta} / E_0 \alpha_0 T_0$		
$\pi/6$	$-0,138 \cdot 10^3$	$-0,138 \cdot 10^3$	0,0	$0,410 \cdot 10^2$	$0,410 \cdot 10^2$	0,0
$\pi/3$	$-0,242 \cdot 10^3$	$-0,242 \cdot 10^3$	0,0	$0,980 \cdot 10^2$	$0,980 \cdot 10^2$	0,0
$\pi/2$	$-0,109 \cdot 10^3$	$-0,109 \cdot 10^3$	0,0	$0,415 \cdot 10^2$	$0,415 \cdot 10^2$	0,0

З аналізу співставлення результатів переміщень та напружень, що приведені в табл. 3.7, спостерігається співпадіння порівнюваних параметрів.

3.5. Дослідження термонапруженого стану анізотропних циліндричних оболонок захищених шаром функціонально-градієнтного матеріалу

3.5.1. Дослідження температурного та термосилового напруженого стану анізотропних циліндричних оболонок із боропластику, захищених шаром кераміко-металевого функціонально-градієнтного матеріалу

Систему рівнянь (3.16), з відповідними їй граничними умовами (3.17) та (3.18), використаємо для дослідження розв'язків лінійних задач температурного та термосилового напруженого стану циліндричних оболонок. На конкретних прикладах розрахунку проаналізуємо вплив температурних полів на

взаємозв'язок деформацій розтягу та зсуву, згину та кручення на напружено-деформований стан таких конструкцій.

Об'єктом дослідження було вибрано циліндричну оболонку виготовлену з волокнистого композиту боропластик захищену з боку температурного поля високої інтенсивності шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). В якості ФГМ вибрана суміш нітриду силікону та титанового сплаву з об'ємним показником фракцій змішуваних матеріалів $N=1$. Характеристики цих матеріалів представлені в табл. 3.1. – 3.4. Механічні характеристики матеріалу боропластик такі: $E_{zz}=280E_0$; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$; $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$; $G_{rz}=21,2E_0$; $\nu_{\theta z}=0,25$; $\nu_{z\theta}=0,0277$; $E_0=1000\text{МПа}$. Коефіцієнти лінійного температурного розширення: $\alpha_z=4,5*10^{-6}\text{ К}^{-1}(\text{C}^{-1})$; $\alpha_\theta=7,8*10^{-6}\text{ К}^{-1}(\text{C}^{-1})$; $\alpha_r=7,8*10^{-6}\text{ К}^{-1}(\text{C}^{-1})$.

Довжина оболонки уздовж твірної: $L=1,2\text{м}$, радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$, відношення загальної товщини h до радіусу серединної поверхні $h/r=1/5$. Таке відношення відповідає товстостінній циліндричній оболонці для аналізу напружено-деформованого стану якої необхідне врахування опору її матеріалу поперечному зсуву та нормальному обтисненню матеріалу за товщиною, що можливо при використанні рівнянь просторової теорії пружності (3.16). Умови на торцях відповідають (3.14).

В табл. 3.8 представлено розподіл компонентів НДС для випадку, коли на конструкцію діє лише високої інтенсивності температурне поле розташоване зовні оболонки.

Прийнято, що циліндр складено з двох шарів: внутрішнього з координатами поверхонь $r_1=0,54\text{м}$, $r_{11}=0,64\text{м}$ – з волокнистого боропластика та зовнішнього шару з координатами за товщиною $r_{02}=0,64\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ – з ФГМ. Температурне поле змінюється лише за товщиною шару ФГМ оболонки від $T=293^0\text{К}$ (20^0C) на внутрішній поверхні шару при $r_{02}=0,64\text{м}$ до $T=393^0\text{К}$ (120^0C) на зовнішній при $r_2=0,66\text{м}$ згідно залежності (3.3). Шар волокнистого композиту боропластика знаходиться в умовах незмінної температури $T=293^0\text{К}$ (20^0C), яка відповідає температурі вихідного недеформованого стану.

Табл. 3.8 характеризує розподіл за товщиною максимальних компонент

напружено-деформованого стану оболонки для таких перерізів за довжиною твірної: σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, u_r – $z=0,5L$; $\tau_{z\theta}$ та u_z – $z=0$ і u_θ – $z=0,25L$. Для кожної координати за товщиною циліндра маємо два рядки компонент напружено-деформованого стану: верхній рядок відповідає розв’язку системи (3.16) згідно до підходу «АПР», нижній – підхід «ОПР».

В табл. 3.9 відображено результати аналізу термосилового напружено-деформованого стану цієї ж циліндричної оболонки одним з шарів якої є волокнистий композит боропластик, а іншим функціонально-градієнтний матеріал. При цьому до конструкції, що знаходиться під дією змінного за товщиною шару ФГМ температурного поля додається дія зовнішнього розподіленого за бічною поверхнею тиску $q = -q_0 \sin(\pi z/L)$, де $q_0=10$ МПа. Структура табл. 3.9 така ж як і табл. 3.8.

Водночас табл. 3.8 та табл. 3.9 представляють залежність компонентів напружено-деформованого стану розглядуваної циліндричної оболонки від кута ψ повороту головних напрямів пружності волокнистого композиту боропластика відносно твірної циліндра.

Рис. 3.3 представляє два типи напружено-деформованого стану описаної циліндричної оболонки у випадку, коли відхилення між осями ортотропії волокнистого матеріалу боропластику та твірною оболонки $\psi = 60^\circ$. Позначення кривих на рис. 3.3 таке: крива 1 – це компоненти НДС для двошарової оболонки із зовнішнім шаром кераміко-металевого ФГМ від дії лише температури (табл. 3.8). Крива 2 – характеризує параметри НДС для тієї ж оболонки, але від спільної дії температури та розподіленого за зовнішньою бічною поверхнею конструкції тиску q (табл. 3.9). Всі представлені на рис. 3.3 результати отримані згідно підходу «АПР».

Таблиця 3.8

Розподіл параметрів термонапруженого стану за товщиною двошарової із шаром кераміко-металевого ФГМ товстостінної циліндричної оболонки

r, (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			$\frac{\sigma_{rr} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{rz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{r\theta} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{zz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$\frac{\tau_{z\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$u_r \cdot 10^{-3}$ м	$u_z \cdot 10^{-3}$ м	$u_\theta \cdot 10^{-4}$ м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	0,0	0,0	0,0	-27,25	-24,06	0,0	0,1603	-0,0450	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-27,25	-24,06	0,0	0,1603	-0,0450	0,0
0,65		АПР	1,42	-3,05	0,0	-2,35	-0,17	0,0	0,1540	-0,0407	0,0
		ОПР	1,42	-3,05	0,0	-2,35	-0,17	0,0	0,1540	-0,0407	0,0
0,64		АПР	1,16	-2,94	0,0	1,98	3,17	0,0	0,1536	-0,0361	0,0
		ОПР	1,16	-2,94	0,0	1,98	3,17	0,0	0,1536	-0,0361	0,0
0,64		АПР	1,16	-2,94	0,0	2,89	0,85	0,0	0,1536	-0,0361	0,0
		ОПР	1,16	-2,94	0,0	2,89	0,85	0,0	0,1536	-0,0361	0,0
0,58		АПР	0,61	-0,22	0,0	0,82	0,88	0,0	0,1569	-0,0080	0,0
		ОПР	0,61	-0,22	0,0	0,82	0,88	0,0	0,1569	-0,0080	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,40	0,90	0,0	0,1595	0,0085	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,40	0,90	0,0	0,1595	0,0085	0,0
0,66	30	АПР	0,0	0,0	0,0	-27,67	-25,67	-0,72	0,1287	-0,0446	-0,1071
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-28,52	-25,14	0,0	0,1442	-0,03282	0,0
0,65		АПР	1,63	-3,14	0,31	-2,62	-1,28	-0,46	0,1222	-0,0411	-0,1057
		ОПР	1,56	-3,33	0,0	-3,21	-0,93	0,0	0,1377	-0,0289	0,0
0,64		АПР	1,51	-3,09	0,51	1,86	2,62	-0,22	0,1215	-0,0374	-0,1048
		ОПР	1,41	-3,40	0,0	1,56	2,78	0,0	0,1370	-0,0247	0,0
0,64		АПР	1,51	-3,09	0,51	2,59	1,40	0,24	0,1215	-0,0374	-0,1048
		ОПР	1,41	-3,40	0,0	2,35	1,38	0,0	0,1370	-0,0247	0,0

Продовження таблиці 3.8

0,58	60	АПР	0,69	-0,86	0,08	1,58	1,12	0,08	0,1239	-0,0117	-0,0883
		ОПР	0,64	-0,88	0,0	1,18	1,06	0,0	0,1393	0,0040	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	1,06	0,99	0,0	0,1261	0,0022	-0,0803
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,58	0,92	0,0	0,1412	0,0196	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-25,49	-29,77	-0,65	0,0323	-0,0828	-0,0977
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-26,16	-29,88	0,0	0,0333	-0,0750	0,0
0,65		АПР	2,14	-2,64	0,29	-1,08	-4,00	-0,42	0,0257	-0,0818	-0,0964
		ОПР	2,16	-2,79	0,0	-1,53	-4,10	0,0	0,0266	-0,0741	0,0
0,64		АПР	2,34	-2,27	0,46	2,70	1,29	-0,20	0,0249	-0,0808	-0,0955
		ОПР	2,37	-2,51	0,0	2,46	1,23	0,0	0,0257	-0,0729	0,0
0,64		АПР	2,34	-2,27	0,46	1,20	1,74	0,08	0,0249	-0,0808	-0,0955
		ОПР	2,37	-2,51	0,0	1,17	1,82	0,0	0,0257	-0,0729	0,0
0,58	АПР	1,10	-0,91	0,23	1,06	1,65	0,11	0,0256	-0,0693	-0,0827	
	ОПР	1,11	-0,99	0,0	1,01	1,68	0,0	0,0261	-0,0602	0,0	
0,54	АПР	0,0	0,0	0,0	1,02	1,68	0,13	0,0274	-0,0651	-0,0767	
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,96	1,69	0,0	0,0276	-0,0557	0,0	
0,66	90	АПР	0,0	0,0	0,0	-24,31	-29,39	0,0	0,0343	-0,0959	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-24,31	-29,39	0,0	0,0343	-0,0959	0,0
0,65		АПР	2,09	-2,38	0,0	-0,27	-3,72	0,0	0,0278	-0,0949	0,0
		ОПР	2,09	-2,38	0,0	-0,27	-3,72	0,0	0,0278	-0,0949	0,0
0,64		АПР	2,24	-1,84	0,0	3,10	1,44	0,0	0,0271	-0,0939	0,0
		ОПР	2,24	-1,84	0,0	3,10	1,44	0,0	0,0271	-0,0939	0,0
0,64		АПР	2,24	-1,84	0,0	0,86	1,46	0,0	0,0271	-0,0939	0,0
		ОПР	2,24	-1,84	0,0	0,86	1,46	0,0	0,0271	-0,0939	0,0
0,58		АПР	1,11	-0,72	0,0	0,74	1,59	0,0	0,0285	-0,0822	0,0
		ОПР	1,11	-0,72	0,0	0,74	1,59	0,0	0,0285	-0,0822	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,68	1,76	0,0	0,0306	-0,0778	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,68	1,76	0,0	0,0306	-0,0778	0,0

Таблиця 3.9

Розподіл параметрів термосилового напруженого стану за товщиною двошарової із шаром кераміко-металевого ФГМ товстостінної циліндричної оболонки при дії температури та зовнішнього розподіленого навантаження $q_0=10\text{МПа}$

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			$\frac{\sigma_{rr} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{rz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{r\theta} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{zz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$\frac{\tau_{z\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$u_r \cdot 10^{-3}$ м	$u_z \cdot 10^{-3}$ м	$u_\theta \cdot 10^{-4}$ м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	-10,00	0,0	0,0	-37,23	-49,05	0,0	-0,3064	0,0002	0,0
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-37,23	-49,05	0,0	-0,3064	0,0002	0,0
0,65		АПР	-5,44	-5,25	0,0	-9,05	-17,50	0,0	-0,3153	-0,0077	0,0
		ОПР	-5,44	-5,25	0,0	-9,05	-17,50	0,0	-0,3153	-0,0077	0,0
0,64		АПР	-3,66	-6,51	0,0	-1,43	-5,81	0,0	-0,3186	-0,0149	0,0
		ОПР	-3,66	-6,51	0,0	-1,43	-5,81	0,0	-0,3186	-0,0149	0,0
0,64		АПР	-3,66	-6,51	0,0	0,60	-1,62	0,0	-0,3186	-0,0149	0,0
		ОПР	-3,66	-6,51	0,0	0,60	-1,62	0,0	-0,3186	-0,0149	0,0
0,58		АПР	-1,40	-4,21	0,0	3,14	-1,66	0,0	-0,3206	-0,0489	0,0
		ОПР	-1,40	-4,21	0,0	3,14	-1,66	0,0	-0,3206	-0,0489	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	5,31	-1,71	0,0	-0,3236	-0,0783	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	5,31	-1,71	0,0	-0,3236	-0,0783	0,0
0,66	30	АПР	-10,00	0,0	0,0	-31,14	-53,63	-0,95	-0,4325	-0,0866	-0,1426
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-32,31	-52,85	0,0	-0,4104	-0,0702	0,0
0,65		АПР	-4,88	-3,88	0,42	-4,81	-20,47	-0,62	-0,4413	-0,0977	-0,1407
		ОПР	-4,97	-4,14	0,0	-5,62	-19,97	0,0	-0,4192	-0,0808	0,0
0,64		АПР	-2,80	-4,27	0,67	0,79	-7,22	-0,30	-0,4445	-0,1086	-0,1395
		ОПР	-2,94	-4,70	0,0	0,37	-6,98	0,0	-0,4224	-0,0911	0,0

Продовження таблиці 3.9

0,64	60	АПР	-2,80	-4,27	0,67	0,67	-1,77	-0,22	-0,4445	-0,1086	-0,1395
		ОПР	-2,94	-4,70	0,0	0,32	-1,79	0,0	-0,4224	-0,0911	0,0
0,58		АПР	-0,89	-3,01	0,80	2,88	-1,23	0,25	-0,4468	-0,1655	-0,1273
		ОПР	-0,96	-3,07	0,0	2,30	-1,31	0,0	-0,4248	-0,1430	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	4,51	-0,85	0,59	-0,4491	-0,2089	-0,1221
		ОПР	0,0	0,0	0,0	3,82	-0,96	0,0	-0,4275	-0,1836	0,0
0,66		АПР	-10,00	0,0	0,0	-22,74	-41,38	1,18	-0,2189	-0,1526	0,1768
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-21,30	-41,14	0,0	-0,2210	-0,1692	0,0
0,65		АПР	-6,51	-2,03	-0,52	0,80	-11,96	0,76	-0,2259	-0,1582	0,1744
		ОПР	-6,55	-1,71	0,0	1,79	-11,76	0,0	-0,2278	-0,1751	0,0
0,64		АПР	-5,53	-1,28	-0,83	3,53	-2,88	0,37	-0,2270	-0,1639	0,1730
		ОПР	-5,60	-0,76	0,0	4,04	-2,76	0,0	-0,2288	-0,1808	0,0
0,64	АПР	-5,53	-1,28	-0,83	-0,05	-3,54	-0,23	-0,2270	-0,1639	0,1730	
	ОПР	-5,60	-0,76	0,0	0,03	-3,66	0,0	-0,2288	-0,1808	0,0	
0,58	АПР	-2,37	-0,70	-0,36	0,27	-3,38	-0,17	-0,2188	-0,1930	0,1869	
	ОПР	-2,41	-0,49	0,0	0,38	-3,46	0,0	-0,2198	-0,2126	0,0	
0,54	АПР	0,0	0,0	0,0	0,46	-3,40	-0,20	-0,2162	-0,2144	0,1808	
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,59	-3,45	0,0	-0,2166	-0,2345	0,0	
0,66	90	АПР	-10,00	0,0	0,0	-24,48	-35,65	0,0	-0,0905	-0,1149	0,0
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-24,48	-35,65	0,0	-0,0905	-0,1149	0,0
0,65		АПР	-7,24	-2,43	0,0	-0,47	-8,11	0,0	-0,0972	-0,1171	0,0
		ОПР	-7,24	-2,43	0,0	-0,47	-8,11	0,0	-0,0972	-0,1171	0,0
0,64		АПР	-6,71	-1,95	0,0	2,83	-0,98	0,0	-0,0980	-0,1194	0,0
		ОПР	-6,71	-1,95	0,0	2,83	-0,98	0,0	-0,0980	-0,1194	0,0
0,64		АПР	-6,71	-1,95	0,0	0,68	-4,28	0,0	-0,0980	-0,1194	0,0
		ОПР	-6,71	-1,95	0,0	0,68	-4,28	0,0	-0,0980	-0,1194	0,0
0,58		АПР	-2,86	-0,91	0,0	0,84	-4,07	0,0	-0,0872	-0,1255	0,0
		ОПР	-2,86	-0,91	0,0	0,84	-4,07	0,0	-0,0872	-0,1255	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,96	-4,11	0,0	-0,0839	-0,1327	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,96	-4,11	0,0	-0,0839	-0,1327	0,0

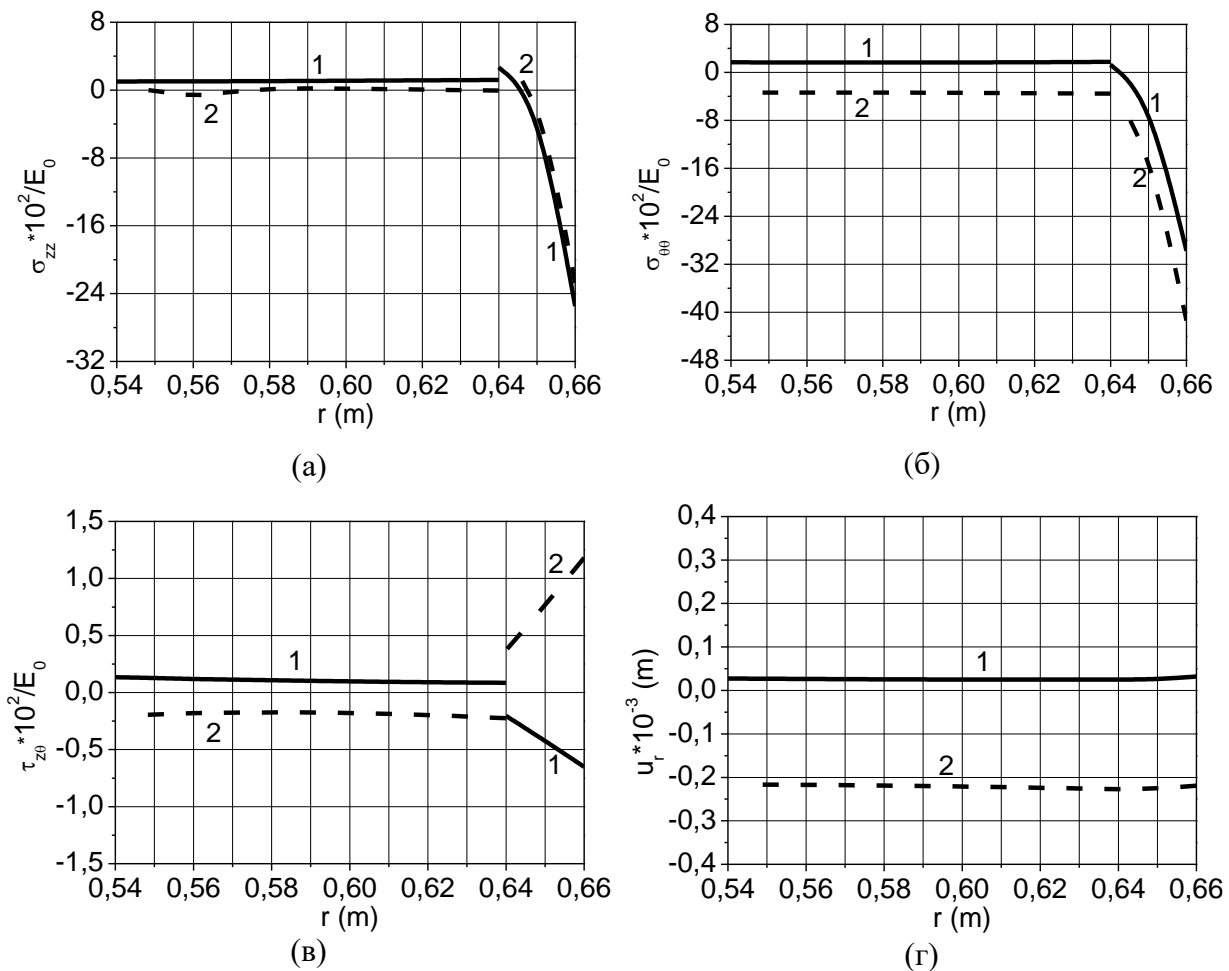


Рис. 3.3. Розподіл компонент температурного та термосилового напружено-деформованого стану а) σ_{zz} ; б) $\sigma_{\theta\theta}$; в) $\tau_{z\theta}$; г) u_r за товщиною оболонки із зовнішнім шаром кераміко-металевого ФГМ (1 – під температурним, 2 – під термосиловим впливом)

Аналізуючи результати представлені на рис. 3.3 та в табл. 3.8–3.9, вкажемо на таке. У випадку додавання до температурної дії розподіленого за зовнішньою бічною поверхнею навантаження в якості силового впливу напружено-деформований стан конструкції змінюється. Так нормальні напруження σ_{zz} (рис. 3.3 (а)), в цьому випадку, залежно від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ змінюють свої абсолютні значення у порівнянні із лише температурною дією. При цьому розбіжності між максимальними значеннями напружень σ_{zz} з та без силового впливу знаходяться в межах 29%. Подібна ситуація має місце при порівнянні температурного та термосилового впливу на нормальні напруження $\sigma_{\theta\theta}$ (рис. 3.3 (б)), лише в цьому випадку розходження між максимальними величинами

$\sigma_{\theta\theta}$ не перевищують 55%. Додатковий силовий вплив на оболонку призвело до того, що дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ змінили знаки своїх величин за товщиною захисного шару кераміко-металевого ФГМ на протилежні у порівнянні із лише температурною дією. Розходження між абсолютними значеннями максимальних величин $\tau_{z\theta}$ з та без силового впливу знаходяться в межах 45%. Переміщення в радіальному напрямку u_r у випадку, коли до температурного впливу додається силова дія, змінюють свої знаки, стають від'ємними та збільшуються за абсолютними значеннями. Різниця між максимумами абсолютних величин u_r досягає 92%. Переміщення в осьовому напрямку u_z також стають більшими (табл. 3.8–3.9). Розходження між максимальними значеннями переміщень складає 65%. Змінюють свої знаки на протилежні та стають більшими за абсолютними величинами також переміщення u_θ (табл. 3.8–3.9). Різниця між абсолютними значеннями максимальних переміщень в цих двох станах знаходиться в межах 54%.

3.5.2. Дослідження температурного та термосилового напруженого стану анізотропних циліндричних оболонок із боропластику, захищених шаром нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу

Проведемо аналіз розподілу компонент напружено-деформованого стану викликаних температурним та термосиловим впливом на оболонку з волокнистого композиту боропластику, захищену з боку вищих температур шаром нанокерамічного ФГМ. Температурне поле прийнято змінним лише за товщиною шару нанокерамічного ФГМ. Загальна товщина стінки оболонки, товщини шарів, її радіус, довжина та умови на торцях ідентичні розглядуванім підпункті 3.5.1. В якості нанокерамічного ФГМ вибрано керамічну складову – нітрид силікону, що армована вуглецевими нанотрубками, підпункт 3.1.2.

Механічні характеристики нанотрубок такі [4]: $E_{zz}=5,6466$ ТПа; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=7,08$ ТПа; $G_{z\theta}=G_{rz}=1,9445$ ТПа; $G_{r\theta}=2,3334$ ТПа; $\nu_{\theta z}=0,175$. Коефіцієнти

лінійного температурного розширення $\alpha_z = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}(\text{C}^{-1})$; $\alpha_\theta = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}(\text{C}^{-1})$; $\alpha_r = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}(\text{C}^{-1})$ [5]. Об'ємний вміст нанотрубок $V_{CNT} = 0,12$.

У табл. 3.10 приведено дані, що характеризують випадок лише температурного впливу, коли вища температура діє зовні оболонки та шар нанокерамічного ФГМ має координати за товщиною $r_{02} = 0,64\text{м}$, $r_2 = 0,66\text{м}$. Тип армування – FG-Λ (підпункт 3.1.2). Температурне поле змінюється лише за товщиною шару ФГМ оболонки. Від $T = 293^0\text{К}$ (20^0C) на внутрішній поверхні шару при $r_{02} = 0,64\text{м}$ до $T = 393^0\text{К}$ (120^0C) на зовнішній при $r_2 = 0,66\text{м}$, згідно залежності (3.3). Шар волокнистого композиту боропластика має координати за товщиною $r_1 = 0,54\text{м}$ і $r_{11} = 0,64\text{м}$ та знаходиться в умовах незмінної температури вихідного недеформованого стану $T = 293^0\text{К}$ (20^0C). Структура та наповнення табл. 3.10 відповідають табл. 3.8.

У табл. 3.11 приведені результати розподілу компонентів НДС за товщиною такої ж циліндричної оболонки одним з шарів якої є волокнистий композит боропластик, а іншим нанокерамічний функціонально-градієнтний матеріал. Однак, оболонка, розрахована від дії змінного за товщиною температурного поля, додатково завантажується зовнішнім розподіленням за бічною поверхнею тиском $q = -q_0 \sin(\pi z/L)$, де $q_0 = 10\text{МПа}$. При цьому, табл. 3.10. та табл. 3.11 характеризують описані два типи напружено-деформованого стану анізотропної оболонкової конструкції в залежності від однакового кута ψ розбіжності між головними напрямками пружності матеріалів: волокнистого композиту боропластика та нанокерамічного ФГМ і твірною оболонки. Структура та наповнення табл. 3.11 аналогічні табл. 3.8.

Таблиця 3.10

Розподіл параметрів термонапруженого стану за товщиною двошарової із шаром нанокерамічного ФГМ товстостінної циліндричної оболонки

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			$\frac{\sigma_{rr} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{rz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{r\theta} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{zz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$\frac{\tau_{z\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$u_r \cdot 10^{-3}$ м	$u_z \cdot 10^{-3}$ м	$u_\theta \cdot 10^{-4}$ м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	0,0	0,0	0,0	-24,01	-20,86	0,0	0,1912	-0,0592	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-24,01	-20,86	0,0	0,1912	-0,0592	0,0
0,65		АПР	1,96	-4,30	0,0	-8,25	-3,66	0,0	0,1838	-0,0540	0,0
		ОПР	1,96	-4,30	0,0	-8,25	-3,66	0,0	0,1838	-0,0540	0,0
0,64		АПР	1,30	-4,32	0,0	8,73	14,18	0,0	0,1825	-0,0488	0,0
		ОПР	1,30	-4,32	0,0	8,73	14,18	0,0	0,1825	-0,0488	0,0
0,64		АПР	1,30	-4,32	0,0	3,87	1,02	0,0	0,1825	-0,0488	0,0
		ОПР	1,30	-4,32	0,0	3,87	1,02	0,0	0,1825	-0,0488	0,0
0,58		АПР	0,72	-0,57	0,0	1,29	1,05	0,0	0,1868	-0,0138	0,0
		ОПР	0,72	-0,57	0,0	1,29	1,05	0,0	0,1868	-0,0138	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	-0,18	1,09	0,0	0,1900	0,0062	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-0,18	1,09	0,0	0,1900	0,0062	0,0
0,66	30	АПР	0,0	0,0	0,0	-24,29	-22,43	-1,02	0,1648	-0,0583	-0,1064
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-24,98	-22,09	0,0	0,1798	-0,0465	0,0
0,65		АПР	2,24	-4,36	0,45	-8,22	-5,67	-0,86	0,1572	-0,0538	-0,1050
		ОПР	2,18	-4,52	0,0	-9,04	-5,28	0,0	0,1722	-0,0417	0,0
0,64		АПР	1,92	-4,43	0,98	8,79	11,93	-0,98	0,1558	-0,0493	-0,1040
		ОПР	1,81	-4,77	0,0	7,83	12,36	0,0	0,1707	-0,0367	0,0
0,64		АПР	1,92	-4,43	0,98	3,44	1,83	0,41	0,1558	-0,0493	-0,1040
		ОПР	1,81	-4,77	0,0	3,19	1,81	0,0	0,1707	-0,0367	0,0

Продовження таблиці 3.10

0,58		АПР	0,88	-1,26	0,22	2,09	1,46	0,17	0,1589	-0,0156	-0,0931
		ОПР	0,83	-1,30	0,0	1,67	1,39	0,0	0,1737	0,0004	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	1,40	1,29	0,05	0,1617	0,0024	-0,0856
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,91	1,21	0,0	0,1763	0,0201	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-22,81	-26,41	-1,03	0,0533	-0,1005	-0,1002
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-23,25	-26,53	0,0	0,0529	-0,0958	0,0
0,65		АПР	2,92	-3,77	0,46	-5,93	-10,53	-0,90	0,0456	-0,0990	-0,0989
		ОПР	2,94	-3,93	0,0	-6,40	-10,68	0,0	0,0451	-0,0943	0,0
0,64		АПР	3,39	-3,06	1,02	11,60	6,53	-1,01	0,0439	-0,0975	-0,0980
		ОПР	3,44	-3,40	0,0	11,04	6,38	0,0	0,0434	-0,0928	0,0
0,64	60	АПР	3,39	-3,06	1,02	1,59	2,52	0,23	0,0439	-0,0975	-0,0980
		ОПР	3,44	-3,40	0,0	1,59	2,62	0,0	0,0434	-0,0928	0,0
0,58		АПР	1,58	-1,20	0,46	1,39	2,37	0,22	0,0444	-0,0808	-0,0926
		ОПР	1,60	-1,33	0,0	1,36	2,42	0,0	0,0437	-0,0743	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	1,32	2,41	0,25	0,0466	-0,0742	-0,0876
		ОПР	0,0	0,0	0,0	1,28	2,43	0,0	0,0457	-0,0674	0,0
0,66		АПР	0,0	0,0	0,0	-21,39	-26,54	0,0	0,0532	-0,1117	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	-21,39	-26,54	0,0	0,0532	-0,1117	0,0
0,65		АПР	2,97	-3,37	0,0	-4,05	-11,01	0,0	0,0455	-0,1102	0,0
		ОПР	2,97	-3,37	0,0	-4,05	-11,01	0,0	0,0455	-0,1102	0,0
0,64		АПР	3,50	-2,17	0,0	13,64	6,11	0,0	0,0440	-0,1087	0,0
		ОПР	3,50	-2,17	0,0	13,64	6,11	0,0	0,0440	-0,1087	0,0
0,64	90	АПР	3,50	-2,17	0,0	1,03	2,27	0,0	0,0440	-0,1087	0,0
		ОПР	3,50	-2,17	0,0	1,03	2,27	0,0	0,0440	-0,1087	0,0
0,58		АПР	1,69	-0,83	0,0	0,87	2,42	0,0	0,0447	-0,0933	0,0
		ОПР	1,69	-0,83	0,0	0,87	2,42	0,0	0,0447	-0,0933	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	0,78	2,64	0,0	0,0471	-0,0869	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	0,78	2,64	0,0	0,0471	-0,0869	0,0

Таблиця 3.11

Розподіл параметрів термосилового напруженого стану за товщиною двошарової із шаром нанокерамічного ФГМ товстостінної циліндричної оболонки при дії температури та зовнішнього розподіленого навантаження $q_0=10\text{МПа}$

r , (м)	ψ , град	Підхід до розв'язку	Параметри напружено-деформованого стану								
			$\frac{\sigma_{rr} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{rz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\tau_{r\theta} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{zz} \cdot 10^3}{E_0}$	$\frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$\frac{\tau_{z\theta} \cdot 10^2}{E_0}$	$u_r \cdot 10^{-3}$ м	$u_z \cdot 10^{-3}$ м	$u_\theta \cdot 10^{-4}$ м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,66	0	АПР	-10,00	0,0	0,0	-30,93	-39,65	0,0	-0,1456	-0,0337	0,0
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-30,93	-39,65	0,0	-0,1456	-0,0337	0,0
0,65		АПР	-5,11	-6,10	0,0	-14,99	-24,78	0,0	-0,1547	-0,0373	0,0
		ОПР	-5,11	-6,10	0,0	-14,99	-24,78	0,0	-0,1547	-0,0373	0,0
0,64		АПР	-2,27	-7,90	0,0	2,27	-10,09	0,0	-0,1577	-0,0407	0,0
		ОПР	-2,27	-7,90	0,0	2,27	-10,09	0,0	-0,1577	-0,0407	0,0
0,64		АПР	-2,27	-7,90	0,0	2,74	-0,74	0,0	-0,1577	-0,0407	0,0
		ОПР	-2,27	-7,90	0,0	2,74	-0,74	0,0	-0,1577	-0,0407	0,0
0,58		АПР	-0,74	-3,81	0,0	3,35	-0,76	0,0	-0,1569	-0,0485	0,0
		ОПР	-0,74	-3,81	0,0	3,35	-0,76	0,0	-0,1569	-0,0485	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	4,29	-0,79	0,0	-0,1576	-0,0612	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	4,29	-0,79	0,0	-0,1576	-0,0612	0,0
0,66	30	АПР	-10,00	0,0	0,0	-28,02	-42,64	-1,05	-0,2769	-0,1089	-0,2064
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-29,32	-41,99	0,0	-0,2481	-0,0864	0,0
0,65		АПР	-4,62	-5,29	0,46	-11,27	-28,28	-0,87	-0,2860	-0,1160	-0,2034
		ОПР	-4,72	-5,60	0,0	-12,83	-27,54	0,0	-0,2572	-0,0927	0,0
0,64		АПР	-1,24	-6,10	0,99	6,64	-13,84	-0,91	-0,2890	-0,1230	-0,2010
		ОПР	-1,45	-6,77	0,0	4,80	-13,01	0,0	-0,2603	-0,0989	0,0
0,64		АПР	-1,24	-6,10	0,99	2,60	-0,44	-0,006	-0,2890	-0,1230	-0,2010
		ОПР	-1,45	-6,77	0,0	2,13	-0,47	0,0	-0,2603	-0,0989	0,0

Продовження таблиці 3.11

0,58	60	АПР	-0,23	-3,28	0,75	3,71	-0,19	0,28	-0,2891	-0,1521	-0,1780
		ОПР	-0,33	-3,36	0,0	2,93	-0,30	0,0	-0,2606	-0,1213	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	4,72	0,04	0,51	-0,2895	-0,1785	-0,1674
		ОПР	0,0	0,0	0,0	3,79	-0,12	0,0	-0,2614	-0,1445	0,0
0,66		АПР	-10,00	0,0	0,0	-21,60	-35,58	0,09	-0,1733	-0,1663	0,1314
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-20,90	-35,38	0,0	-0,1728	-0,1738	0,0
0,65		АПР	-5,73	-3,44	-0,16	-3,99	-20,94	0,31	-0,1813	-0,1707	0,1295
		ОПР	-5,77	-3,21	0,0	-3,21	-20,74	0,0	-0,1808	-0,1783	0,0
0,64		АПР	-3,68	-2,17	-0,29	14,52	-5,28	0,32	-0,1833	-0,1752	0,1277
		ОПР	-3,76	-1,68	0,0	15,41	-5,03	0,0	-0,1828	-0,1828	0,0
0,64		АПР	-3,68	-2,17	-0,29	0,49	-2,23	-0,09	-0,1833	-0,1752	0,1277
		ОПР	-3,76	-1,68	0,0	0,51	-2,34	0,0	-0,1828	-0,1828	0,0
0,58	АПР	-1,54	-1,02	-0,12	0,70	-2,15	-0,06	-0,1760	-0,1950	0,1388	
	ОПР	-1,58	-0,82	0,0	0,74	-2,23	0,0	-0,1749	-0,2045	0,0	
0,54	АПР	0,0	0,0	0,0	0,84	-2,16	-0,08	-0,1730	-0,2115	0,1343	
	ОПР	0,0	0,0	0,0	0,89	-2,22	0,0	-0,1716	-0,2212	0,0	
0,66	90	АПР	-10,00	0,0	0,0	-21,84	-32,46	0,0	-0,0604	-0,1262	0,0
		ОПР	-10,00	0,0	0,0	-21,84	-32,46	0,0	-0,0604	-0,1262	0,0
0,65		АПР	-6,20	-3,44	0,0	-4,15	-17,87	0,0	-0,0683	-0,1277	0,0
		ОПР	-6,20	-3,44	0,0	-4,15	-17,87	0,0	-0,0683	-0,1277	0,0
0,64		АПР	-4,67	-2,22	0,0	13,98	-1,70	0,0	-0,0701	-0,1292	0,0
		ОПР	-4,67	-2,22	0,0	13,98	-1,70	0,0	-0,0701	-0,1292	0,0
0,64		АПР	-4,67	-2,22	0,0	0,85	-2,97	0,0	-0,0701	-0,1292	0,0
		ОПР	-4,67	-2,22	0,0	0,85	-2,97	0,0	-0,0701	-0,1292	0,0
0,58		АПР	-1,94	-0,98	0,0	0,93	-2,76	0,0	-0,0609	-0,1302	0,0
		ОПР	-1,94	-0,98	0,0	0,93	-2,76	0,0	-0,0609	-0,1302	0,0
0,54		АПР	0,0	0,0	0,0	1,02	-2,73	0,0	-0,0575	-0,1344	0,0
		ОПР	0,0	0,0	0,0	1,02	-2,73	0,0	-0,0575	-0,1344	0,0

Рис. 3.4 представляє напружено-деформований стан анізотропної оболонкової конструкції для випадку, коли розбіжність між головними напрямками пружності матеріалу боропластикового шару, а також осями ортотропії нанокерамічного ФГМ та твірною оболонки однакові і складають $\psi = 60^\circ$.

Позначення кривих на рис. 3.4 таке: крива 1 представляє компоненти НДС для двошарової оболонки із зовнішнім шаром нанокерамічного ФГМ від дії лише температури (табл. 3.10). Крива 2 – це параметри НДС для тих же оболонок, але від спільної дії температури та розподіленого за зовнішньою бічною поверхнею оболонки тиску q (табл. 3.11). Всі представлені на рис. 3.4 результати отримані згідно підходу «АПР».

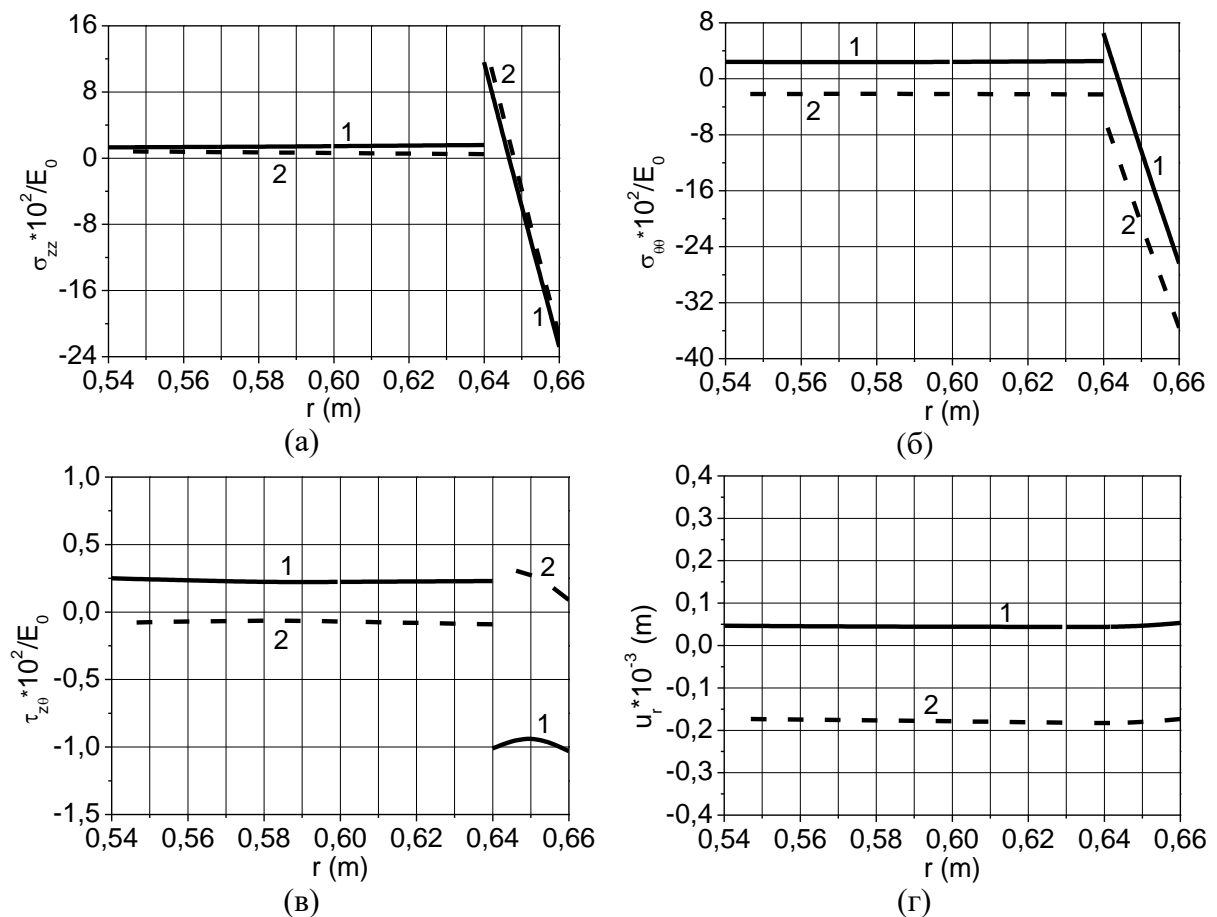


Рис. 3.4. Розподіл компонент температурного та термосилового напружено-деформованого стану а) σ_{zz} ; б) $\sigma_{\theta\theta}$; в) $\tau_{z\theta}$; г) u_r за товщиною оболонки із зовнішнім шаром нанокерамічного ФГМ (1 – під температурним, 2 – під термосиловим впливом)

З аналізу представлених в табл. 3.10–3.11 та на рис. 3.4 даних можемо зробити такі висновки. Розподілений боковий тиск разом з температурним полем, приводить до перерозподілу компонент напружено-деформованого стану таких конструкцій. Нормальні напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ в залежності від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу при додаванні до температурного впливу силового фактору можуть як збільшувати за абсолютними значеннями свої величини, так і зменшувати. Водночас в захисному шарі із нанокерамічного ФГМ напруження σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$ залишаються більшими ніж в шарі боропластику, максимальні розбіжності знаходяться в межах 98%. Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ у випадку лише температурної дії розподілялись в межах захисного шару практично рівномірно (рис. 3.10, (в), крива 1). При спільній дії температури та навантаження вони зростають за абсолютними значеннями у напрямку від поверхні, що знаходиться під впливом температурного поля вищої інтенсивності (рис. 3.11, (в), крива 2). Розбіжність між абсолютними значеннями максимальних величин $\tau_{z\theta}$ від температурної та термосилової дій складає 69%. Переміщення в радіальному напрямку u_r , при спільній силі та температурі, змінюють свої знаки з додатних на від'ємні. Розходження між максимумами u_r за модулем, в цих двох станах, складають 71%. При сумісному впливі температурного поля та зовнішнього силового фактору переміщення в коловому напрямку u_θ при куті $\psi = 60^\circ$ змінюють свій знак у порівнянні із лише впливом температури та за абсолютними значеннями стають більшими. Розбіжність між абсолютними значеннями u_θ в цих двох станах досягає 49%.

3.6. Висновки до розділу 3

В розділі 3, використовуючи тривимірну систему неоднорідних диференціальних рівнянь лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що введена при використанні

модифікованого варіаційного принцип Ху – Васідзу. Представлено підхід до розв’язку задачі про напружено-деформований стан від дії змінного за товщиною температурного впливу, а також силової дії для циліндричних товстостінних шаруватих оболонок з анізотропного матеріалу та з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) з вмістом нанотрубок. Пружні характеристики матеріалу знаходяться в одній площині, що є паралельною серединній поверхні оболонки. При розв’язку тривимірної задачі, для зменшення її розмірності, була використана процедура методу Бубнова – Гальоркіна. Чисельна реалізація отриманої одновимірної задачі проводилась при використанні методу дискретної ортогоналізації.

В розділі представлено результати дослідження напружено-деформованого стану анізотропних оболонок від впливу змінного за їх товщиною температурного поля, а також від сумісної силової дії та вказаного температурного впливу в залежності від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу. В якості захисту композитного матеріалу боропластику, з боку вищих температур, використовувався шар кераміко-металевого ФГМ або нанокерамічного ФГМ.

Розглянуто випадки лише температурного впливу та сумісної силової дії та температурного впливу змінного за товщиною шару ФГМ для двошарової оболонки. В якості зовнішнього навантаження вибрано розподілений боковий тиску. Показано, що розбіжності між напруженнями σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та $\tau_{z\theta}$ в температурному та термосиловому станах досягають 69%. Причому дотичні напруження $\tau_{z\theta}$, які можливо визначити лише при використанні представленого підходу, у випадку сумісності силового впливу та температури змінюють свої знаки на протилежні. Переміщення u_r та u_θ при такій дії також змінюють свої знаки на протилежні, при цьому їх величини зростають. Розбіжності між абсолютними величинами максимальних переміщень в порівнюваних станах досягають 92% для переміщення u_r та 54% для u_θ .

Таким чином, представлений підхід дозволяє проводити дослідження напружено-деформованого стану анізотропних оболонкових конструкцій від впливу температурних полів та сумісної силової дії і температури в просторовій постановці, коли найповніше враховуються зміни у структурі функціонально-градієнтних матеріалів за товщиною оболонки. Проведено тривимірний розв'язок задачі, коли матеріалом оболонки є ФГМ, а особливо нанокераміка, яка може проявляти анізотропні властивості відносно осей циліндричної оболонки. Вперше проаналізовано вплив вказаних факторів на компоненти напружено-деформованого стану товстостінних оболонок в просторовій постановці.

РОЗДІЛ 4

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ТОВСТОСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

4.1. Постановка задачі про вільні коливання товстостінних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Загально відомо, що динамічні розрахунки також й оболонкових конструкцій залежать від встановлення параметрів їх вільних коливань. Це пов'язано з вимогами практичних потреб різноманітних галузей машинобудування, приладобудування, авіа- та ракетобудування, будівництва тощо. Використання класичних та уточнених теорій в дослідженнях оболонок дозволило отримати наближені розв'язки таких проблем. В роботі [82] представлено методи розв'язку задач розрахунку власних частот та відповідних їм форм коливань пружних оболонок при використанні ізотропної, ортотропної та з однією площиною пружної симетрії моделей матеріалу. Показана ефективність точної редукції двомірної задачі на власні значення до послідовності окремих одновимірних задач з наступним їх інтегруванням методом дискретної ортогоналізації. В першій главі [145] при використанні теоретичних засад [82] приведені розрахунки стосовно встановлення параметрів власних коливань анізотропних плит і тонкої анізотропної циліндричної оболонки. Показано, що семишарову оболонку з достатньою точністю можна розраховувати як ортотропну. В четвертій главі цієї ж роботи та в [72] розглянуті осесиметричні коливання циліндричних оболонок з однією поверхнею симетрії пружних властивостей в просторовій постановці. В [88] приведені підходи до розв'язку лінійних і нелінійних задач механіки оболонок на основі дискретно-континуальних методів у класичній, уточненій і просторовій моделі для ізотропних і ортотропних неоднорідних оболонок зі змінними геометричними та механічними параметрами. Приведені результати

досліджень динамічних характеристик оболонок різноманітної форми та закріплення торців. В роботі [157] представлено два підходи до розрахунку замкнутих товстостінних шаруватих циліндричних оболонок, які ґрунтуються на розділенні циліндричної оболонки за товщиною на ряд складових циліндричних оболонок. Задовольнивши умови контакту на поверхнях між складовими оболонками, автори визначають власні частоти згинальних коливань вихідної оболонки. У першому підході розподіл функцій за товщиною встановлюється на основі аналітичного розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. У другому визначається апроксимацією поліноміальними функціями. У роботі [279] для визначення частот вільних коливань автори використовують теоретичні засади [157], а для їх реалізації застосовують напіваналітичний метод скінченних елементів у комбінації з методом послідовного звуження інтервалу пошуку. Проведено аналіз поведінки оболонок при вільних і вимушених коливаннях. В [244] запропоновано підхід до визначення частот і форм вільних коливань систем складених з оболонок обертання різної геометрії і відносної товщини, неперервно і (або) дискретно неоднорідних за товщиною, з ізотропних, ортотропних та анізотропних матеріалів з однією площиною пружної симетрії. Підхід включає створення математичної моделі коливань на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява, уточненої теорії типу Тимошенка, просторової теорії пружності (частинний випадок). Побудовано чисельно-аналітичний підхід до розв'язання відповідних двовимірних (тривимірних) задач на основі зниження їх розмірності і використанні методів послідовних наближень і покрокового пошуку в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

Використання сучасних композитних матеріалів і конструктивних рішень призводить до зростання вимог стосовно побудови математичних моделей коливань, які за своєю точністю цілком задовольняли б практичне використання. Відомо, що розробка таких моделей щодо розв'язку, наприклад, динамічних задач товстостінних анізотропних циліндричних оболонок (рис. 4.1), можлива лише в рамках просторової теорії пружності.

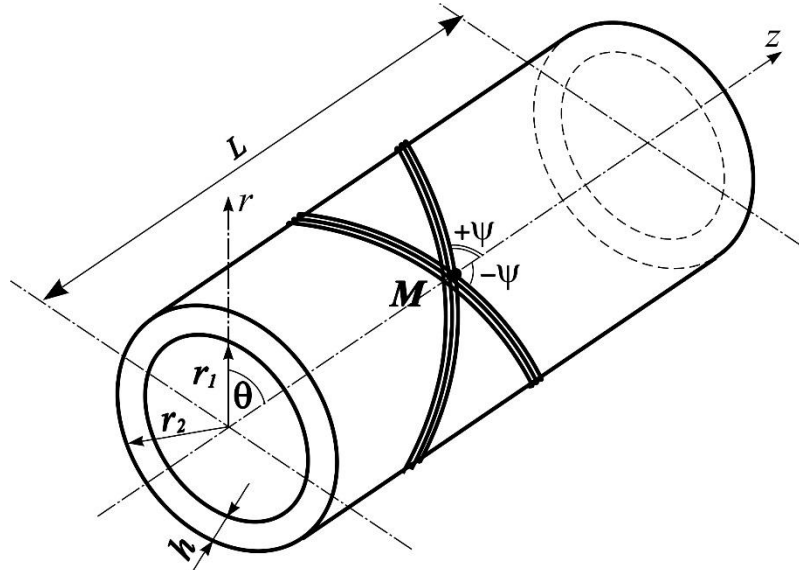


Рис. 4.1. Товстостінна анізотропна циліндрична оболонка

Вільні коливання товстостінних циліндрів розглядатимуться в рамках теорії малих незатухаючих коливань пружних неоднорідних анізотропних тіл. У випадку не врахування розсіювання енергії, рівняння руху елементарного об'єму, що належить i -му шару запишемо у вигляді (1.47):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_r^i; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\ & + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \rho^i \omega^2 u_z^i; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = & \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\ & + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_\theta^i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Розв'язок системи (4.1) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0;$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \tag{4.2}$$

Умовам на торцях при $z = 0$, $z = L$ (рис. 1.1) (2.7÷2.10) та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

де i – номер шару оболонки.

4.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови розв'язку задачі про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Розв'язок системи (4.1) здійснимо при використанні граничних умов на торцях циліндричної оболонки (2.7 – 2.10).

В першому випадку на торцях оболонки, при $z = 0$, $z = L$ прийmemo такі граничні умови:

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0. \quad (4.4)$$

З їх урахуванням для приведення тривимірної задачі (4.1) до одновимірної використаємо процедуру методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо все функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної z так, що б вони задовольняли граничним умовам (4.4), а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою θ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $y_{i, pk}$, $y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – коефіцієнти розкладання; k , p , m – хвильові числа в рядах Фур'є, $l_m = m\pi/L$, L – довжина твірної циліндра.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (4.1) за допомогою співвідношень (4.5), отримуємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, що описують вільні коливання, в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = \left(T(r) - \omega^2 C(r) \right) \bar{y}, \quad T(r) = t_{n,l}(r), \quad C(r) = c_{n,l}(r), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad (4.6)$$

де $\bar{y} = \{ y_{1, pk}; y_{2, pk}; y_{3, pk}; y_{4, pk}; y_{5, pk}; y_{6, pk}; y'_{1, mk}; y'_{2, mk}; y'_{3, mk}; y'_{4, mk}; y'_{5, mk}; \}$

$y_{6,mk}^T$ – розв’язуюча вектор-функція, $T(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r , $C(r)$ – матриця, що характеризує інерційні властивості оболонки.

До системи рівнянь (4.6) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_1; \quad (4.7)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_2, \quad (4.8)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (4.2).

Ненульові елементи матриці $T(r)$ мають вигляд:

$$t_{1,1} = -\frac{c_{23} + 1}{r}, \quad t_{1,2} = l_p, \quad t_{1,3} = -\frac{k}{r}, \quad t_{1,4} = \frac{c_{22}}{r^2}, \quad t_{1,5} = -l_p \frac{c_{12}}{r},$$

$$t_{1,6} = k \frac{c_{22}}{r^2}, \quad t_{1,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{26}}{r^2}, \quad t_{1,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m,$$

$$t_{2,1} = c_{13} l_p, \quad t_{2,2} = -\frac{1}{r}, \quad t_{2,4} = -\frac{c_{12}}{r} l_p, \quad t_{2,5} = c_{11} l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2},$$

$$t_{2,6} = -\frac{c_{12} + c_{66}}{r} k l_p, \quad t_{2,7} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{36}}{r}, \quad t_{2,10} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{26}}{r^2},$$

$$t_{2,11} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) 2 \frac{c_{16}}{r} k l_m, \quad t_{2,12} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) c_{16} l_m^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{c_{26}}{r^2} k^2,$$

$$t_{3,1} = -\frac{c_{23}}{r} k, \quad t_{3,3} = -\frac{2}{r}, \quad t_{3,4} = \frac{c_{22}}{r^2} k, \quad t_{3,5} = -\frac{c_{12} + c_{66}}{r} k l_p,$$

$$t_{3,6} = c_{66} l_p^2 + \frac{c_{22}}{r^2} k^2, \quad t_{3,7} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, \quad t_{3,10} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m,$$

$$t_{3,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(c_{16} l_m^2 + \frac{c_{26}}{r^2} k^2 \right), \quad t_{3,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{c_{26}}{r} k l_m,$$

$$t_{4,1} = c_{33}, \quad t_{4,4} = \frac{c_{23}}{r}, \quad t_{4,5} = -c_{13} l_p, \quad t_{4,6} = k \frac{c_{23}}{r},$$

$$\begin{aligned}
t_{4,11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{36}}{r}, & t_{4,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, \\
t_{5,2} &= a_{55}, & t_{5,4} &= -l_p, & t_{5,9} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \\
t_{6,3} &= a_{44}, & t_{6,4} &= \frac{k}{r}, & t_{6,6} &= \frac{1}{r}, & t_{6,8} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \\
t_{7,5} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{26}}{r^2}, & t_{7,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m, & t_{7,7} &= -\frac{c_{23} + 1}{r}, \\
t_{7,8} &= l_p, & t_{7,9} &= \frac{k}{r}, & t_{7,10} &= \frac{c_{22}}{r^2}, & t_{7,11} &= -l_p \frac{c_{12}}{r}, & t_{7,12} &= -k \frac{c_{22}}{r^2}, \\
t_{8,1} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{36}}{r}, & t_{8,4} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{26}}{r^2}, \\
t_{8,5} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) 2 \frac{c_{16}}{r} k l_m, & t_{8,6} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) c_{16} l_m^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{c_{26}}{r^2} k^2, \\
t_{8,7} &= c_{13} l_p, & t_{8,8} &= -\frac{1}{r}, & t_{8,10} &= -\frac{c_{12}}{r} l_p, \\
t_{8,11} &= c_{11} l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2}, & t_{8,12} &= \frac{c_{12} + c_{66}}{r} k l_p, \\
t_{9,1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, & t_{9,4} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m, \\
t_{9,5} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(c_{16} l_m^2 + \frac{c_{26}}{r^2} k^2 \right), & t_{9,6} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{c_{26}}{r} k l_m, \\
t_{9,7} &= \frac{c_{23}}{r} k, & t_{9,9} &= -\frac{2}{r}, & t_{9,10} &= -\frac{c_{22}}{r^2} k, & t_{9,11} &= \frac{c_{12} + c_{66}}{r} k l_p, \\
t_{9,12} &= c_{66} l_p^2 + \frac{c_{22}}{r^2} k^2, & t_{10,5} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{36}}{r}, & t_{10,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, \\
t_{10,7} &= c_{33}, & t_{10,10} &= \frac{c_{23}}{r}, & t_{10,11} &= -c_{13} l_p, & t_{10,12} &= -k \frac{c_{23}}{r}, \\
t_{11,3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, & t_{11,8} &= a_{55}, & t_{11,10} &= -l_p,
\end{aligned}$$

$$t_{12,2} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) a_{45}, \quad t_{12,9} = a_{44}, \quad t_{12,10} = -\frac{k}{r}, \quad t_{12,12} = \frac{1}{r}. \quad (4.9)$$

Тут $l_m = \frac{m\pi}{L}$; $l_p = \frac{p\pi}{L}$; L – довжина твірної; k, p, m – хвильові числа в рядах Фур'є (4.5).

Функції $\varphi(p, m)$ та $\varphi(m, p)$ залежать від цілих числових параметрів p та m і визначаються формулами:

$$\varphi(p, m) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{p-m} + \frac{1}{p+m} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне число,} \end{cases}$$

$$\varphi(m, p) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } p + m \text{ – парне число,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{m-p} + \frac{1}{m+p} \right) & \text{якщо } p + m \text{ – непарне число.} \end{cases}$$

Ненульові елементи матриці $C(r)$ мають вигляд:

$$c_{1,4} = \rho, \quad c_{2,5} = \rho, \quad c_{3,6} = \rho, \quad c_{7,10} = \rho, \quad c_{8,11} = \rho, \quad c_{9,12} = \rho. \quad (4.10)$$

Для другого випадку граничних умов на торцях оболонки, при $z = 0$, $z = L$ приймемо:

$$\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0, \quad (4.11)$$

З їх урахуванням для перетворення тривимірної задачі (4.1) до одновимірної використаємо процедуру методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної z так, що б вони задовольняли граничним умовам (4.11), а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою θ :

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z;$$

$$\tau_{rz}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y'_{2,mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z;$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3,pk}(r) \sin k\theta + y'_{3,mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=1k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\
u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

де $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – коефіцієнти розкладання; p, m – хвильові числа в рядах Фур'є, $l_m = m\pi/L$, L – довжина твірної циліндра.

Для граничних умов (4.11) отримаємо нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, що описують вільні коливання, в нормальній формі Коші виду (4.6), але з видозміненими у відповідності до (4.12) ненульовими елементами матриці $T(r)$. До цієї системи необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування (4.7) та (4.8).

Ненульові елементи матриці $T(r)$ для граничних умов (4.11) мають вигляд:

$$t_{1,1} = -\frac{c_{23} + 1}{r}, \quad t_{1,2} = -l_p, \quad t_{1,4} = \frac{c_{22}}{r^2}, \quad t_{1,5} = l_p \frac{c_{12}}{r}, \quad t_{1,12} = \frac{c_{26}}{r} l_p,$$

$$t_{1,15} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{k}{r}, \quad t_{1,18} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{22}}{r^2}, \quad t_{1,23} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{26}}{r},$$

$$t_{2,i} = t_{1,i+6}, \quad (i = \overline{1, 6}); \quad t_{2,i} = t_{1,i-6}, \quad (i = \overline{7, 12}); \quad t_{2,i} = t_{1,i+6}, \quad (i = \overline{13, 18});$$

$$t_{2,i} = t_{1,i-6}, \quad (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»};$$

$$t_{3,i} = t_{1,i+12}, \quad (i = \overline{1, 6}); \quad t_{3,i} = t_{1,i+12}, \quad (i = \overline{7, 12}); \quad t_{3,i} = t_{1,i-12}, \quad (i = \overline{13, 18});$$

$$t_{3,i} = t_{1,i-12}, \quad (i = \overline{19, 24});$$

$$t_{4,i} = t_{1,i+18}, \quad (i = \overline{1, 6}); \quad t_{4,i} = t_{1,i+6}, \quad (i = \overline{7, 12}); \quad t_{4,i} = t_{1,i-6}, \quad (i = \overline{13, 18});$$

$$t_{4,i} = t_{1,i-18}, \quad (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»};$$

$$\begin{aligned}
t_{5,1} &= -c_{13}l_p, & t_{5,2} &= -\frac{1}{r}, & t_{5,4} &= \frac{c_{12}}{r}l_p, & t_{5,5} &= c_{11}l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2}, \\
t_{5,12} &= c_{16}l_p^2 + k^2 \frac{c_{26}}{r^2}, & t_{5,18} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) \frac{c_{12} + c_{66}}{r} kl_m, \\
t_{5,19} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) k \frac{c_{36}}{r}, & t_{5,22} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) k \frac{c_{26}}{r^2}, & t_{5,11} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) 2 \frac{c_{16}}{r} kl_m, \\
t_{6,i} &= t_{5,i+6}, (i = \overline{1, 6}); & t_{6,i} &= t_{5,i-6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{6,i} &= t_{5,i+6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{6,i} &= t_{5,i-6}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»}; \\
t_{7,i} &= t_{5,i+12}, (i = \overline{1, 6}); & t_{7,i} &= t_{5,i+12}, (i = \overline{7, 12}); & t_{7,i} &= t_{5,i-12}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{7,i} &= t_{5,i-12}, (i = \overline{19, 24}); \\
t_{8,i} &= t_{5,i+18}, (i = \overline{1, 6}); & t_{8,i} &= t_{5,i+6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{8,i} &= t_{5,i-6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{8,i} &= t_{5,i-18}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»}; \\
t_{9,6} &= c_{66}l_p^2 + \frac{c_{22}}{r^2}k^2, & t_{9,7} &= -c_{36}l_p, & t_{9,10} &= \frac{c_{26}}{r}l_p, \\
t_{9,11} &= c_{16}l_p^2 + \frac{c_{26}}{r^2}k^2, & t_{9,13} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) k \frac{c_{23}}{r}, & t_{9,16} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) k \frac{c_{22}}{r^2}, \\
t_{9,17} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) k \frac{c_{12} + c_{66}}{r} l_m, & t_{9,24} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p,m) 2k \frac{c_{26}}{r} l_m, \\
t_{10,i} &= t_{9,i+6}, (i = \overline{1, 6}); & t_{10,i} &= t_{9,i-6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{10,i} &= t_{9,i+6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{10,i} &= t_{9,i-6}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»}; \\
t_{11,i} &= t_{9,i+12}, (i = \overline{1, 6}); & t_{11,i} &= t_{9,i+12}, (i = \overline{7, 12}); & t_{11,i} &= t_{9,i-12}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{11,i} &= t_{9,i-12}, (i = \overline{19, 24}); \\
t_{12,i} &= t_{9,i+18}, (i = \overline{1, 6}); & t_{12,i} &= t_{9,i+6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{12,i} &= t_{9,i-6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{12,i} &= t_{9,i-18}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною «}k\text{» на «} -k\text{»}; \\
t_{13,1} &= c_{33}, & t_{13,4} &= -\frac{c_{23}}{r}, & t_{13,5} &= -c_{13}l_p, & t_{13,12} &= c_{36}l_p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{13,18} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{23}}{r}, & t_{13,11} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{36}}{r}, \\
t_{14,i} &= t_{13,i+6}, (i = \overline{1, 6}); & t_{14,i} &= t_{13,i-6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{14,i} &= t_{13,i+6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{14,i} &= t_{13,i-6}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle; \\
t_{15,i} &= t_{13,i+12}, (i = \overline{1, 6}); & t_{15,i} &= t_{13,i+12}, (i = \overline{7, 12}); & t_{15,i} &= t_{13,i-12}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{15,i} &= t_{13,i-12}, (i = \overline{19, 24}); \\
t_{16,i} &= t_{13,i+18}, (i = \overline{1, 6}); & t_{16,i} &= t_{13,i+6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{16,i} &= t_{13,i-6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{16,i} &= t_{13,i-18}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle; \\
t_{17,2} &= a_{55}, & t_{17,4} &= l_p, & t_{17,9} &= a_{45}, \\
t_{18,i} &= t_{17,i+6}, (i = \overline{1, 6}); & t_{18,i} &= t_{17,i-6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{18,i} &= t_{17,i+6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{18,i} &= t_{17,i-6}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle; \\
t_{19,i} &= t_{17,i+12}, (i = \overline{1, 6}); & t_{19,i} &= t_{17,i+12}, (i = \overline{7, 12}); & t_{19,i} &= t_{17,i-12}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{19,i} &= t_{17,i-12}, (i = \overline{19, 24}); \\
t_{20,i} &= t_{17,i+18}, (i = \overline{1, 6}); & t_{20,i} &= t_{17,i+6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{20,i} &= t_{17,i-6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{20,i} &= t_{17,i-18}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle; \\
t_{21,3} &= a_{44}, & t_{21,6} &= \frac{1}{r}, & t_{21,8} &= a_{45}, & t_{21,16} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{k}{r}, \\
t_{22,i} &= t_{21,i+6}, (i = \overline{1, 6}); & t_{22,i} &= t_{21,i-6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{22,i} &= t_{21,i+6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{22,i} &= t_{21,i-6}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle; \\
t_{23,i} &= t_{21,i+12}, (i = \overline{1, 6}); & t_{23,i} &= t_{21,i+12}, (i = \overline{7, 12}); & t_{23,i} &= t_{21,i-12}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{23,i} &= t_{21,i-12}, (i = \overline{19, 24}); \\
t_{24,i} &= t_{21,i+18}, (i = \overline{1, 6}); & t_{24,i} &= t_{21,i+6}, (i = \overline{7, 12}); & t_{24,i} &= t_{21,i-6}, (i = \overline{13, 18}); \\
t_{24,i} &= t_{21,i-18}, (i = \overline{19, 24}) \text{ із заміною } \langle k \rangle \text{ на } \langle -k \rangle.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

У випадку, коли для циліндричної оболонки при $z = 0$ мають місце умови

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0, \quad (4.14)$$

а при $z = L$ - умови

$$\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0, \quad (4.15)$$

то розв'язок представляється у вигляді (4.5), де $l_m = m\pi/2L$.

Подібним чином отримуємо розв'язок системи (4.1) якщо при $z = 0$ мають місце умови

$$\tau_{rz} = u_z = u_\theta = 0, \quad (4.16)$$

а при $z = L$ - умови

$$\sigma_{zz} = \tau_{z\theta} = u_r = 0. \quad (4.17)$$

Тут розв'язок представимо у вигляді (4.12) з урахуванням, що $l_m = m\pi/2L$.

4.3. Методика розв'язку задачі про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Розв'язок крайової задачі (4.6–4.8) полягає у знаходженні власних частот вільних коливань ω . В матриці T розкладання шуканих векторів в ряди Фур'є за коловою координатою враховується параметром $k=0, 1, 2, \dots$ колового хвилеутворення оболонки. Внаслідок чого задача (4.6–4.8) приводиться до розв'язку послідовності одновимірних крайових задач на власні значення виду:

$$\frac{d\bar{y}_k}{dr_1} = (T_k(r_1) - \omega_k^2 C(r_1))\bar{y}_k, \quad (4.18)$$

$$B_1 \bar{y}_k(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_1; \quad (4.19)$$

$$B_2 \bar{y}_k(r, \omega^2) = 0; \quad r = r_2. \quad (4.20)$$

Алгоритм розв'язку однорідної крайової задачі співпадає з описаним в пункті 2.4 алгоритмом розв'язку неоднорідної крайової задачі тільки при прямому ході. Тому виконавши попередньо всі чисельні операції вказаного алгоритму, отримаємо в кінцевій точці інтегрування $r_1 = r_2$ рівняння, які задовольняють граничні умови на зовнішній поверхні оболонки. Представимо аналогічно (2.46) розв'язок однорідних крайових задач в точці:

$$y(r_2, \lambda) = X(r, \lambda)c^n(r, \lambda), \quad (4.21)$$

де $\lambda = \omega^2$.

Підставляючи (4.21) в (4.20), отримаємо:

$$B_2(r_2, \lambda)X(r_2, \lambda)c^n(r_2, \lambda) = 0. \quad (4.22)$$

Для знаходження нетривіального розв'язку, наприклад, задачі (4.18 ÷ 4.20) необхідно, щоб виконувалась умова:

$$\det = |B_2(r_2, \lambda)X(r_2, \lambda)| = 0. \quad (4.23)$$

Таким чином, визначення власних значень поставленої задачі відбувається методом покрокового пошуку, шляхом підбору величин $\lambda = \omega^2$ при яких задача має нетривіальний розв'язок $y \neq 0$. Це відповідає виконанню умови $\det D = 0$, де D – матриця однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що задовольняє граничним умовам (4.20). Для кожного заданого значення λ методом дискретної ортогоналізації розв'язується крайова задача і визначається $\det D$ до тих пір, доки не знаходиться його мінімальне $|\det D|$, найближче до нуля значення, у відповідності до заданої точності розв'язку поставленої задачі.

При розв'язку крайової задачі (4.6–4.8) кількість членів рядів (4.5) та (4.12) за напрямком твірної z визначається шляхом порівняння результатів отриманих при послідовному збільшенні цих членів. Якщо різниця між розв'язками стає меншою заданої точності $\varepsilon = 0,1\%$, то процес збільшення кількості членів рядів припиняється.

4.4. Достовірність розв’язку задач про вільні коливання пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Проведемо порівняння тривимірних розв’язків ряду задач, що дозволять перевірити дієвість підходу з визначення частот вільних коливань циліндричних оболонок у просторовій постановці.

Тестування результатів розв’язку задач визначення частот вільних коливань циліндричних оболонок з ізотропного та ортотропного матеріалів, проведено на основі порівнянь отриманих результатів з даними [82] для:

1. Одношарова оболонка з ізотропного матеріалу з такими геометричними та механічними характеристиками: радіус серединної поверхні $r=1,0\text{м}$; довжина $L=2,0\text{м}$; товщина $h=0,01\text{м}$; $E=E_0$; $\nu=0,3$; $\rho=\rho_0$.
2. Одношарова оболонка з ортотропного матеріалу з геометричними та механічними характеристиками: радіус серединної поверхні $R=1,0\text{м}$; довжина $L=3,0\text{м}$; товщина $h=0,01\text{м}$; $E_{11}=176E_0$; $E_{22}=176E_0$; $E_{33}=7E_0$; $G_{12}=3,5E_0$; $G_{13}=G_{23}=1,4E_0$; $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0,25$; $\rho=2\rho_0$.

В табл. 4.1 приведені значення $\bar{\omega} = \omega^2 \rho_0 / E_0 \cdot 10^7$, що відповідають мінімальним частотам власних коливань для описаних вище циліндрів та параметри хвилеутворення k в коловому напрямку.

Таблиця 4.1

Порівняння результатів дослідження вільних коливань циліндричної оболонки

Номер варіанту оболонки	Результати [82]		Пропонований підхід		Розходження Δ , %
	$\bar{\omega}$	k	$\bar{\omega}$	k	
1	13,8	5	13,8	5	0,0
2	214,0	3	214,0	3	0,0

З аналізу співставлення результатів власних коливань і відповідних їм форм, що приведені в табл. 4.1, спостерігається співпадіння порівнюваних параметрів.

Також було проведене порівняння можливостей запропонованого підходу із результатами просторового розрахунку представлено в [244]. Розглядалась циліндрична оболонка довжиною $L=0,6\text{м}$, радіусом внутрішньої поверхні $r_1=0,26\text{м}$ шаруватої структури з геометричними та механічними характеристиками шарів, що представлені в табл. 4.2. Причому шари 2 та 3 являють собою армовані гумокорди укладені таким чином, що головні напрями пружності цих шарів розташовані під кутами $\psi = \pm 65^\circ$ до твірної циліндра. Визначалась мінімальна частота власних коливань анізотропного циліндра та розглядався випадок вісесиметричних власних коливань, коли $k=0$. Порівняння результатів підходу [244] із пропонованим приведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.2

Геометричні та механічні характеристики анізотропної циліндричної оболонки

№ шару	$h \cdot 10^3$, м	E_{11} , МПа	E_{22} , МПа	ν_{12}	G_{12} , МПа	$G_{13}=G_{23}$, МПа	$\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м ³
1	0,75	$5,81 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10$	0,42	4,33	3,01	1,00
2	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
3	1,40	$1,84 \cdot 10^3$	7,36	0,47	2,08	1,88	1,54
4	5,86	5,00	5,00	0,49	1,68	1,68	1,00

Таблиця 4.3

Результати порівняння частот вільних коливань та параметрів хвилеутворення

Параметр хвилеутворення в коловому напрямку, k	За [244] $\omega / 2\pi$	Пропонованим підходом $\omega / 2\pi$	Δ , %
0	5,208	5,203	0,1
4	0,693	0,681	1,7

Порівняння результатів представлених в табл. 4.3 вказує на співпадіння частот власних коливань отриманих за пропонованим підходом у порівнянні з даними приведеними в роботі [244], їх максимальна розбіжність не перевищує 2%.

Проведено порівняння тривимірних розв'язків задач із визначення вісесиметричних частот вільних коливань для циліндричних оболонок у просторовій постановці у випадку, коли їх матеріалом є функціонально-градієнтний матеріал (ФГМ). Отримані згідно запропонованого підходу результати порівнювались із приведеними в [69]. Розглядалися циліндричні оболонки з такими геометричними параметрами: товщина $h=2l_0$; радіус серединної поверхні $R=4l_0$; довжина $L=5l_0$; $l_0=0,1$ м. Конфігурація складових ФГМ така: всередині циліндра нікель, зовні – нержавіюча сталь. Фізико-механічні характеристики обох матеріалів залежать від температури і визначаються згідно формул (3.1) за використанням даних табл. 3.1÷3.4. Спільні характеристики ФГМ визначаються згідно залежностей (3.2) взятих з [253]. Оболонкові конструкції знаходяться в умовах сталих температур $T=300^{\circ}\text{K}$. Змінною характеристикою є N – об'ємний показник фракції змішуваних матеріалів [300]. Спирання торців відповідає умовам (4.4). Визначались приведені частоти $\bar{\omega} = \omega l_0 \sqrt{\rho_0 / G_0}$, $\rho_0=1\text{кг/м}^3$; $G_0=10^9$ Па. Результати порівняння приведені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Порівняння результатів дослідження вільних коливань оболонки з ФГМ

$T(^{\circ}\text{K})$		Об'ємний показник фракції змішуваних матеріалів, N			
		$N=0$	$N=0,5$	$N=1$	$N=10$
300	$\bar{\omega}$, [69]	0,045949	0,046686	0,047061	0,048024
	$\bar{\omega}$, пропонований підхід	0,045955	0,046685	0,047056	0,048021
	Δ , %	0,01	0,002	0,01	0,006

Аналіз результатів, для оболонок з ФГМ, представлених в табл. 4.4 вказує на співпадіння величин частот вільних коливань отриманих за пропонованим підходом порівняно із результатами приведеними в роботі [69], максимальна розбіжність не перевищує 0,01%.

4.5. Вільні коливання анізотропних циліндричних оболонок

4.5.1. Вплив товщини на мінімальні частоти вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок

4.5.1.1. Одношарова оболонка

У табл. 4.5 наведені значення мінімальних частот вільних коливань, для циліндричної оболонки з матеріалу боропластик з механічними характеристиками матеріалу: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000\text{МПа}$, $\rho=2118\text{кг/м}^3$ [123]. Геометричні розміри оболонки такі: довжина вздовж твірної $L=1,2\text{м}$; радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$; з різним відношенням товщини оболонки h до її радіусу серединної поверхні r (1/10; 1/5). Граничні умови на торцях відповідають умовам (4.4). Результати отримані при використанні двох підходів. В першому рядку приведені результати розрахунку на вільні коливання (безрозмірні частоти $\bar{\omega} = \omega \cdot 1,81 \cdot L \cdot 10^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_0}}$), що базуються на пропонованому підході до розв'язку системи (4.6) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) «АПР». Другим рядком приведені безрозмірні значення мінімальних частот $\bar{\omega}$ здобуті у припущенні, що в залежностях (2.3) $c_{16}=c_{26}=c_{36}=a_{45}=0$ – підхід «ОПР». Величини мінімальних частот вільних коливань знаходились при урахуванні в коловому напрямку параметра хвилеутворення k , який приведений в дужках. Окрім цього, в таблиці, у відсотках, дано похибку $\Delta(\%)$ для величин мінімальних частот вільних коливань, що вираховані за підходом «ОПР» по відношенню до «АПР».

Згідно з табл. 4.5 на рис. 4.2 в осях $\bar{\omega} - \psi$ представлені графічні залежності, що ілюструють вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ на величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$. Крива 1 – відображає

мінімальні частоти, здобуті за пропонованим підходом «АПР». Графік 2 отриманий за розрахунковим підходом «ОПР», що відрізняється від пропонованого лише тим, що механічні характеристики закону Гука у формі (2.3) $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$. При цьому рис. 4.2 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що представляється відношенням $1/10$, рис. 4.2 (б) – $h/r=1/5$.

Таблиця 4.5

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ одношарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	95,75 (3)	114,76 (3)	125,42 (3)	124,53 (3)	120,58 (2)	107,17 (2)	94,43 (2)	85,22 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	2,3	3,9	3,6	0,3	0,3	0,6	8,7	6,7	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	125,10 (2)	148,31 (2)	167,76 (2)	160,64 (2)	147,58 (2)	134,59 (2)	121,05 (2)	111,41 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	3,6	7,4	9,0	7,8	1,0	0,0	4,6	4,1	0,0

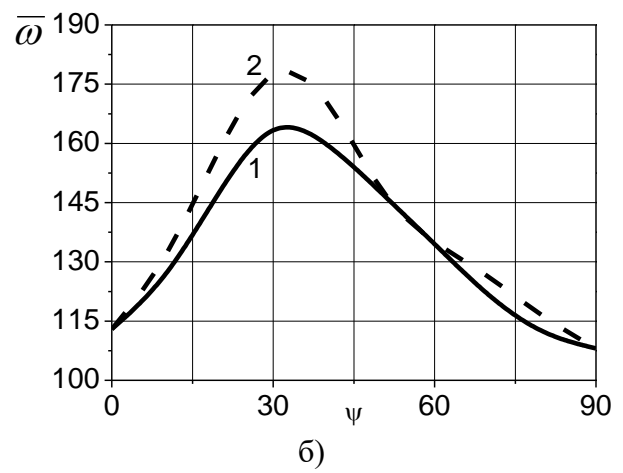
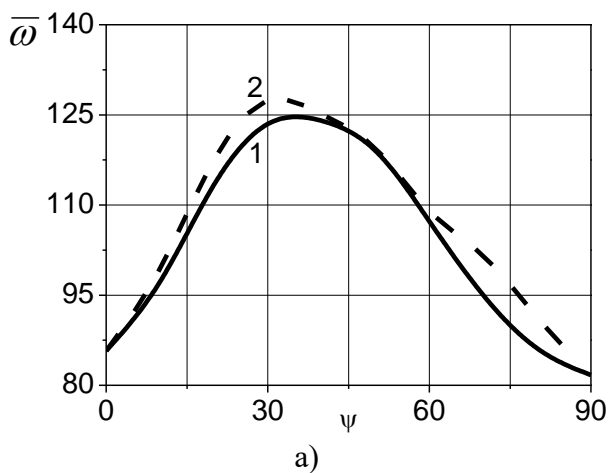


Рис. 4.2. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для одношарової оболонки при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз результатів визначення мінімальних частот вільних коливань та відповідних їм параметрів хвилеутворення в коловому напрямку дозволяє зробити такі висновки. Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ залежать від зміни кута повороту ψ головних напрямів пружності матеріалу. При цьому, незалежно від товщини оболонки, найбільші значення $\bar{\omega}$ для розглянутих умов закріплення мають місце для $30^0 \leq \psi \leq 40^0$ як для випадку урахування всіх компонентів закону Гука для даного виду анізотропії підхід «АПР» (крива 1), так і для ортотропного розрахунку підхід «ОПР» (крива 2). Розбіжність між максимальними величинами $\bar{\omega}$ та визначеними при $\psi = 0^0$ змінюється від 46,3% для $h/r=1/10$ до 48,5% для $h/r=1/5$. Також зауважимо, що практично на всьому діапазоні зміни кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ здобуті згідно підходу «АПР» є меншими за визначені відповідно до «ОПР». Максимальні розбіжності мають місце в діапазоні зміни $20^0 \leq \psi \leq 40^0$ і досягають 9% для випадку $h/r=1/5$.

4.5.1.2. Двошарова оболонка

Таблиця 4.6 представляє результати визначення мінімальних частот вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок, що мають геометричні та механічні характеристики такі ж як і приведені в підпункті 4.5.1.1. Умови закріплення торців також не змінилися. Різниця полягає у кількості шарів. Розглядається оболонка з двома шарами симетрично розташованими відносно її серединної поверхні, при цьому головні напрями пружності шарів орієнтовані під кутами $\pm \psi$ до твірної циліндра. Структура табл. 4.6 відповідає табл. 4.5.

Використовуючи результати приведені в табл. 4.6 побудовано графіки (рис. 4.3) залежностей мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ від кута повороту ψ . Рис. 4.3 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/10$, рис. 4.3 (б) – $h/r=1/5$. Позначення та орієнтування кривих рис. 4.3 відповідає приведеному на рис. 4.2. Вкажемо на те, що кривою

1 описано мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ визначені за підходом «АПР». Графіком 2 зображено величини $\bar{\omega}$ для ортотропної оболонки, підхід «ОПР».

Таблиця 4.6

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ двошарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	95,06 (3)	114,09 (3)	121,78 (3)	112,29 (3)	108,85 (3)	104,45 (2)	99,99 (2)	95,06 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	3,0	4,5	6,7	11,3	11,1	3,1	2,7	4,3	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	123,14 (2)	148,09 (2)	166,84 (2)	155,93 (2)	137,18 (2)	127,34 (2)	120,55 (2)	123,14 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	5,2	7,6	11,6	11,1	6,5	5,6	5,1	5,8	0,0

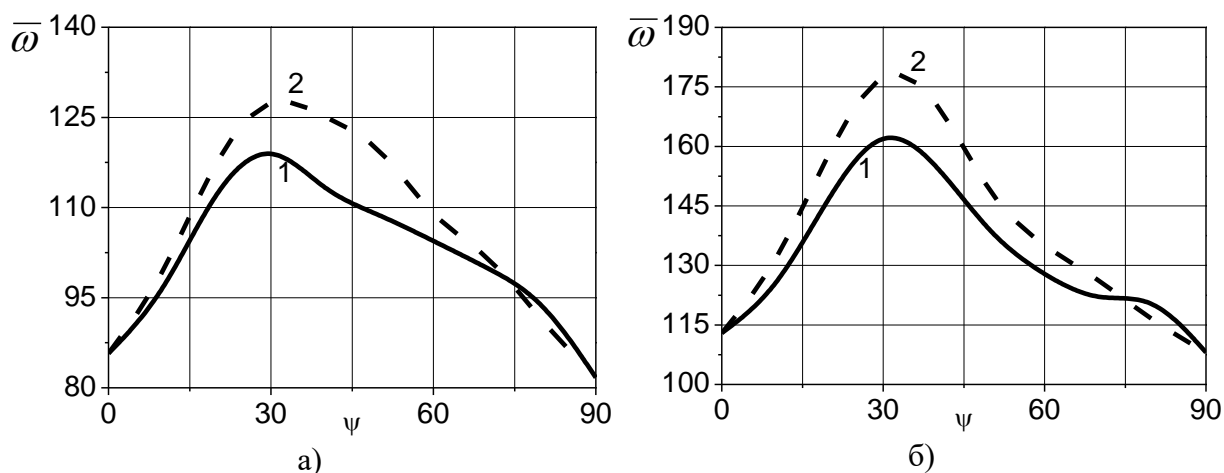


Рис. 4.3. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для двошарової оболонки при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу приведених на рис. 4.3 графіків зауважимо, що криві 2, які відповідають ортотропному підходу до розрахунку двошарових анізотропних циліндричних оболонок «ОПР», відповідають кривим 2 на рис. 4.2, що отримані

для одношарових. Відмітимо, що мінімальні частоти вільних коливань двошарових циліндрів, отримані згідно підходу «АПР» (крива 1), переважно залишаються меншими від визначених за «ОПР» максимальні розходження змінюються в межах від 11,3% для відношення $h/r=1/10$ до 11,6% для $h/r=1/5$. Але для розглядуваних відношень товщини до серединної поверхні оболонок $h/r=1/10$ (рис. 4.3 (а)); $1/5$ (рис. 4.3(б)) при $\psi = 80^\circ$ відмічено перевищення результатів отриманих за підходом «АПР» (крива 1) у порівнянні з «ОПР» (крива 2), яка складає 5,8%.

4.5.1.3. Тришарова оболонка

В табл. 4.7 та на рис. 4.4 представлені результати визначення мінімальних частот вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок з геометричними і механічними параметрами, а також умовами закріплення торців приведеними в підпункті 4.5.1.1. Різниця полягає в тому, що розглядувана оболонка має несиметричний відносно серединної поверхні структурний тришаровий пакет. Шари мають однакову товщину та орієнтовані під кутами $\pm\psi$ до напрямку твірної оболонок, внутрішній шар повернутий на кут « $+\psi$ ». Структура заповнення табл. 4.7 відповідає табл. 4.5, а будова і позначення рис. 4.4 і рис. 4.2 однакові. Рис. 4.4 (а) представляє розрахунок анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/10$, рис. 4.4 (б) – $h/r=1/5$.

Аналізуючи графіки приведені на рис. 4.4 та дані табл. 4.7 вкажемо на те, що значення мінімальних частот, а отже і відповідні їм криві здобуті згідно підходу «ОПР» не відрізняються від отриманих для одно- та двошарових циліндричних оболонок рис. 4.2, 4.3 відповідно. Також відмітимо, що отримані за підходом «АПР» величини мінімальних частот для тришарового структурного пакету переважно більші ніж для випадку двох шарів, розбіжність знаходиться в межах 8%. Також зауважимо, що значення $\bar{\omega}$, визначені згідно «АПР» (крива 1) при трьох шарах, наблизились до результатів «ОПР» (крива 2)

порівняно із, попередньо розглядуваними, одно- та двошаровими циліндрами. Максимальне неспівпадіння змінюється від 3,5% для оболонок з відношенням $h/r=1/10$ до 3,7% для $h/r=1/5$.

Таблиця 4.7

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ тришарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	96,96 (3)	116,97 (3)	127,38 (3)	121,91 (3)	116,78 (3)	107,90 (2)	102,24 (2)	90,38 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	1,0	1,9	2,0	2,5	3,5	0,2	0,4	0,6	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	127,53 (2)	154,41 (2)	176,36 (2)	170,32 (2)	144,80 (2)	133,04 (2)	124,85 (2)	114,73 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	1,6	3,2	3,7	1,7	0,9	1,1	1,5	1,1	0,0

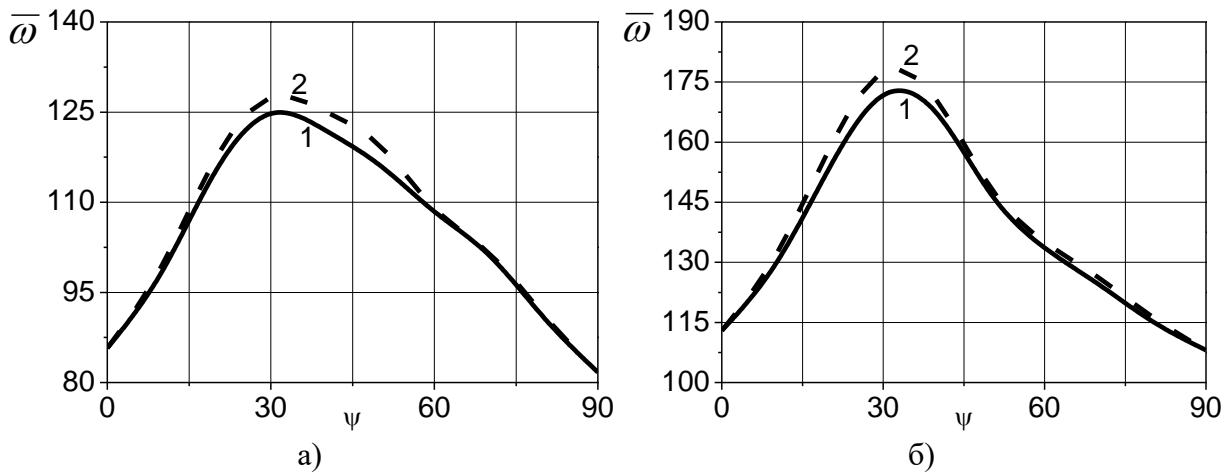


Рис. 4.4. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для тришарової оболонки при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

4.5.1.4. Чотиришарова оболонка

Рис. 4.5 та табл. 4.8 характеризують результати розв'язку задачі з визначення мінімальних частот вільних коливань ω та відповідних їм параметрів хвилеутворення за коловим напрямком циліндричних анізотропних оболонок. Геометричні та механічні параметри, розглядуваних конструкцій, аналогічні приведеним в підпунктах 4.5.1.1-4.5.1.3. Умови закріплення торців такі самі. При цьому оболонки складено з чотирьох симетричних відносно їх серединної поверхні, перехресно-розташованих під кутами $\pm\psi$ шарів однакової товщини. Рис. 4.7 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/10$, рис. 4.7 (б) – $h/r=1/5$. Структура і позначення табл. 4.8 і рис. 4.5 збережені відповідними приведеним в підпункті 4.5.1.1.

Таблиця 4.8

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ чотиришарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	97,21 (3)	117,79 (3)	127,72 (3)	121,53 (3)	117,57 (3)	106,79 (2)	101,95 (2)	90,50 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	0,7	1,2	1,8	2,8	2,9	0,8	0,7	0,5	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	127,76 (2)	155,01 (2)	179,17 (2)	169,59 (2)	143,00 (2)	132,12 (2)	124,82 (2)	114,92 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	1,4	2,8	3,0	2,1	2,1	1,8	1,5	0,9	0,0

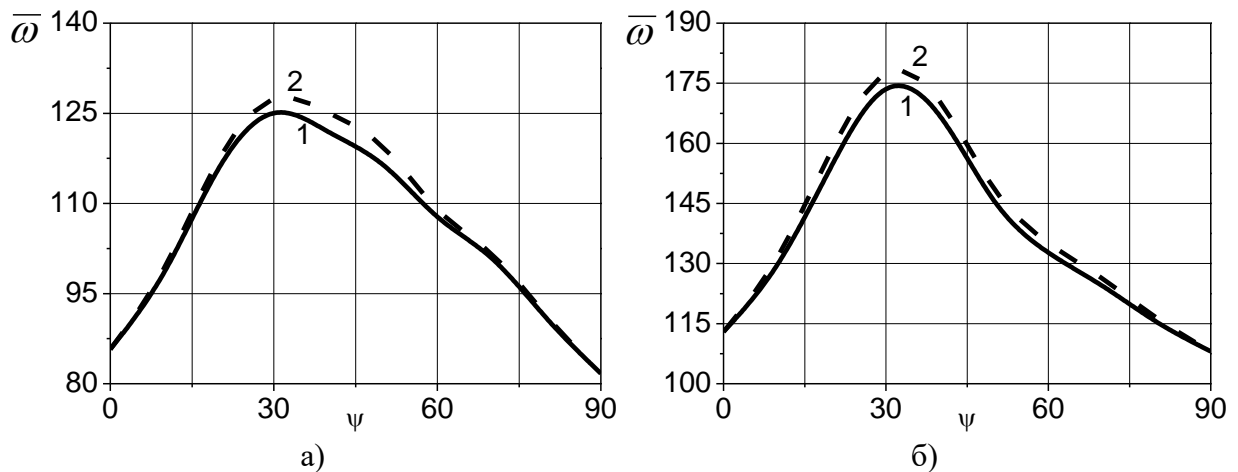


Рис. 4.5. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для чотиришарової оболонки при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу величин мінімальних частот вільних коливань чотиришарових циліндричних оболонок (табл. 4.8 та рис. 4.5) видно. Криві 2, що характеризують ортотропний підхід «ОПР» до розрахунку анізотропних оболонок, не змінили свою конфігурацію і залишились тотожними кривим 2 одно-, дво- та тришарових циліндрів на рис. 4.2-4.4.

Значення мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ (крива 1), що характеризують підхід «АПР» до розрахунку симетричного пакету чотиришарової анізотропної оболонки є більшими за визначені для двошарового симетричного пакету (рис. 4.3) та близькими до тришарового несиметричного (рис. 4.4). Розходження між мінімальними частотами ω , визначеними на основі підходів «АПР» та «ОПР», при чотирьох шарах незалежно від відношення h/r не перевищує 3,0%.

4.5.1.5. П'яти-, семи- та восьмишарові оболонки

Визначення мінімальних частот вільних коливань ω та відповідних їм параметрів хвилеутворення k приведені для випадку п'ятишарового пакету циліндричних оболонок в табл. 4.9, для семишарового в табл. 4.10 і для восьмишарового в табл. 4.11. Геометричні та механічні характеристики конструкцій, а також умови закріплення торців не відрізняються від

приведених в підпункті 4.5.1.1. Оболонки утворено відповідною кількістю шарів, причому п'яти та семишарові пакети утворюють несиметричну відносно серединної поверхні оболонки структуру, а восьмишарові – симетричну. Внутрішній шар для всіх структурних пакетів повернуто на кут «+ ψ ». Структура та позначення табл. 4.9-4.11 відповідають приведеним в підпункті 4.5.1.1.

Таблиця 4.9

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ п'ятишарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	97,52 (3)	118,24 (3)	128,83 (3)	123,58 (3)	119,09 (3)	107,77 (2)	102,49 (2)	90,73 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	0,4	0,8	0,9	1,1	1,5	0,1	0,2	0,2	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	128,67 (2)	156,82 (2)	180,09 (2)	171,90 (2)	145,43 (2)	133,80 (2)	125,86 (2)	115,45 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	0,7	1,6	1,6	0,8	0,4	0,5	0,7	0,4	0,0

Таблиця 4.10

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ семишарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	97,71 (3)	118,68 (3)	129,37 (3)	124,25 (3)	119,91 (3)	107,74 (2)	102,55 (2)	90,82 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	0,1	0,1	0,1	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	129,05 (2)	158,05 (2)	181,36 (2)	172,47 (2)	145,65 (2)	134,11 (2)	126,21 (2)	115,64 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	0,4	0,8	0,9	0,4	0,3	0,3	0,4	0,3	0,0

Таблиця 4.11

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ восьмишарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$h/r=1/10$										
АПР	85,73 (3)	97,78 (3)	118,81 (3)	129,27 (3)	123,90 (3)	119,95 (3)	107,45 (2)	102,49 (2)	90,85 (2)	81,71 (2)
ОПР	85,73 (3)	97,94 (3)	119,19 (3)	129,97 (3)	124,94 (3)	120,93 (3)	107,68 (2)	102,65 (2)	90,95 (2)	81,71 (2)
Δ , %	0,0	0,2	0,3	0,5	0,8	0,8	0,2	0,2	0,1	0,0
$h/r=1/5$										
АПР	112,96 (2)	129,12 (2)	158,08 (2)	181,33 (2)	172,09 (2)	145,09 (2)	133,80 (2)	126,21 (2)	115,71 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	0,4	0,8	0,9	0,7	0,7	0,5	0,4	0,2	0,0

Результати отримані для восьмишарового пакету, що приведені в табл. 4.11 представимо у вигляді графічних залежностей між мінімальними частотами вільних коливань $\bar{\omega}$ та кутом повороту головних напрямів пружності матеріалу шарів ψ відносно твірної циліндричної оболонки. Рис. 4.6 (а) характеризує восьмишарову конструкцію з відношенням товщини до радіусу $h/r=1/10$, рис. 4.6 (б) – $h/r=1/5$. Позначення та структура рис. 4.6 відповідають наведеним в підпункті 4.5.1.1.

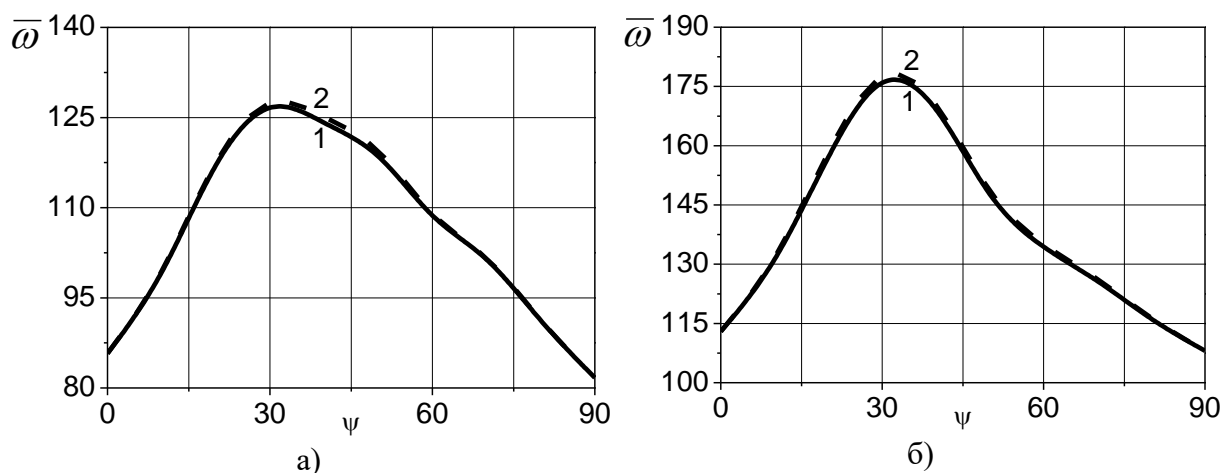


Рис. 4.6. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для восьмишарової оболонки при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу результатів розрахунку мінімальних частот вільних коливань шаруватих анізотропних оболонок табл. 4.9-4.11 та рис. 4.6 можливо зробити такі висновки. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$, отримані з використанням підходу «ОПР» у випадках п'яти-, семи- та восьмишарових циліндричних анізотропних оболонок, не відрізняються від таких для структурних пакетів із меншою кількістю шарів за цим же підходом (див. табл. 4.5-4.8 та рис. 4.2-4.5). Також приведені в табл. 4.9-4.11 та рис. 4.6 дані вказують на те, що із збільшенням кількості шарів від п'яти до восьми мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ знайдені згідно підходу «АПР» зростають і наближаються до результатів отриманих за підходом «ОПР».

З табл. 4.11 та рис. 4.6 видно, що збільшення кількості шарів з перехресним армуванням $\pm \psi_i$ до восьми призводить до того, що мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ визначені з урахуванням анізотропних механічних характеристик матеріалу (крива 1 – підхід «АПР») хоча і залишаються меншими, але практично співпадають з величинами ω , здобутими при використанні підходу «ОПР» (крива 2). Відповідно до даних приведених в табл. 4.11 максимальна розбіжність між ними не перевищує 0,9%.

Факт зменшення розбіжності між результатами здобутими згідно підходів «АПР» та «ОПР» підтверджується у випадку визначення мінімальних частот вільних коливань в роботі [145] і при розв'язку задач стійкості оболонкових конструкцій в [31]. Відповідно, для циліндричних оболонок з розглядуваним типом анізотропії збільшення кількості шарів пакету з перехресним армуванням до 7-8 та більше, призводить до можливості розрахунку таких оболонок за «ОПР» підходом.

4.5.2. Порівняння мінімальних частот вільних коливань для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості шарів

На рис. 4.7, на основі даних табл. 4.5-4.11, представлено результати дослідження мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для анізотропних циліндричних оболонок в залежності від кількості перехресно армованих шарів та кута повороту головних напрямків пружності їх матеріалу $\pm\psi$ до твірної оболонки при відношенні довжини до радіуса $L/R=2$. Закріплення торців конструкцій відповідає розглянутому в попередніх підрозділах. Рис. 4.7 (а) описує анізотропну оболонку з відношенням товщини до радіуса $h/r=1/10$, рис. 4.7 (б) – $h/r=1/5$.

Крива 1 характеризує мінімальні частоти $\bar{\omega}$ одношарової оболонки. Графік 2 описує результати дослідження ω двошарової конструкції $\pm\psi$, крива 3 – тришарової, 4 – чотиришарової, 5 – п'ятишарової та 8 – восьмишарової. Всі ці результати отримані згідно підходу «АПР». Крива 1' представляє результати визначення мінімальних частот $\bar{\omega}$ для анізотропної оболонки за підходом «ОПР». На рис. 4.7, задля уникнення нагромаджень, не відображено результати розрахунку семишарових оболонок у зв'язку із їх близькістю до величин мінімальних частот для восьмишарового пакету та для здобутих згідно підходу «ОПР».

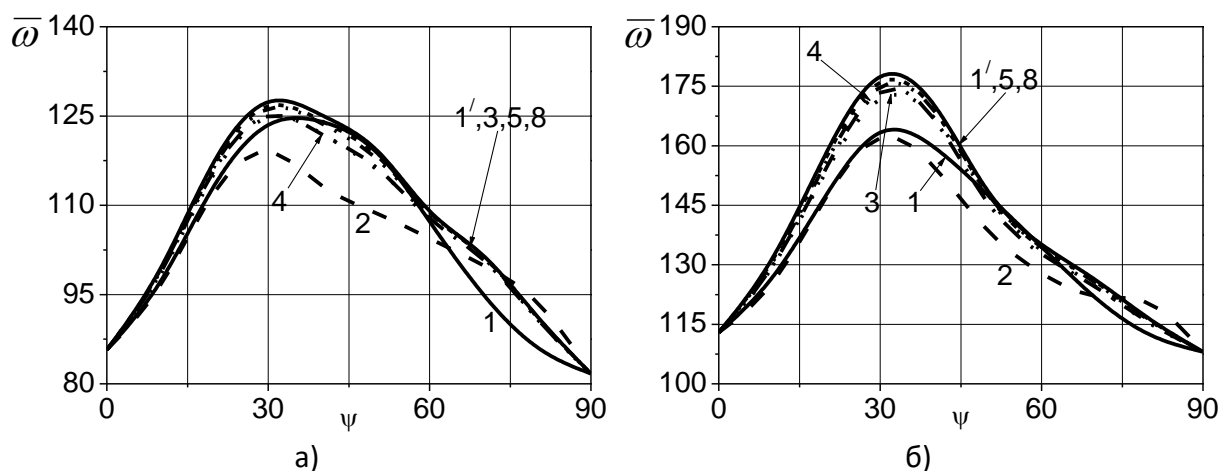


Рис. 4.7. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для одно- (1), дво- (2), три- (3,) чотири- (4), п'яти- (5) восьмишарової (8) оболонки та результати отримані на основі підходу «ОПР» (1') при $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б)

Аналізуючи результати приведені на рис. 4.7 можливо зробити такі висновки. Незалежно від відношення товщини до радіусу серединної поверхні криві 1 та 2, що характеризують результати визначення мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для відповідно одношарових та двошарових циліндричних оболонок вказують на те, що такі структурні пакети конструкцій характеризуються переважно найменшими величинами мінімальних частот у порівнянні до оболонок з більшою кількістю шарів із перехресним армуванням. Для циліндричних конструкцій з кількістю шарів чотири (крива 4), три (крива 3) та п'ять (крива 5) значення мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ наближаються до отриманих згідно підходу «ОПР» (крива 1') і для структурного пакету складеного з восьми шарів результати здобуті за підходом «АПР» (крива 8) максимально близькі до отриманих згідно ортотропного підходу «ОПР» (крива 1'). Це є підтвердженням описаного в [31, 145] ефекту, що при збільшенні кількості перехресно розташованих шарів однакової товщини до 7-8 та більше, анізотропні оболонкові конструкції можливо, з певною точністю, розраховувати нехтуючи анізотропними константами матеріалу.

4.5.3. Порівняння мінімальних частот вільних коливань для шаруватих анізотропних циліндричних оболонок при зміні їх довжини

В табл. 4.12 та на рис. 4.8 приведено графічні залежності, отримані для одно-, дво-, три- та чотиришарових анізотропних, а також ортотропних циліндричних оболонок, що побудовані для відношень довжини до радіуса серединної поверхні $L/r=2; 4; 10$. Радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$ – незмінний, відношення товщини оболонки h до її радіусу серединної поверхні r дорівнює $1/5$. Умови закріплення торців відповідають (4.4). Безрозмірні

величини мінімальних частот вільних коливань визначаються

$$\bar{\omega} = \omega \cdot 1,81 \cdot L_0 \cdot 10^2 \sqrt{\rho/E_0}, \text{ де } L_0=1,2\text{м.}$$

Таблиця 4.12

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для шаруватої оболонки залежно від відношення L/r

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
$L/r=2$										
Одношарова оболонка										
АПР	112,96 (2)	125,10 (2)	148,31 (2)	167,76 (2)	160,64 (2)	147,58 (2)	134,59 (2)	121,05 (2)	111,41 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	3,6	7,4	9,0	7,8	1,0	0,0	4,6	4,1	0,0
Двошарова оболонка										
АПР	112,96 (2)	123,14 (2)	148,09 (2)	166,84 (2)	155,93 (2)	137,18 (2)	127,34 (2)	120,55 (2)	123,14 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	5,2	7,6	11,6	11,1	6,5	5,6	5,1	5,8	0,0
Тришарова оболонка										
АПР	112,96 (2)	127,53 (2)	154,41 (2)	176,36 (2)	170,32 (2)	144,80 (2)	133,04 (2)	124,85 (2)	114,73 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	1,6	3,2	3,7	1,7	0,9	1,1	1,5	1,1	0,0
Чотиришарова оболонка										
АПР	112,96 (2)	127,76 (2)	155,01 (2)	179,17 (2)	169,59 (2)	143,00 (2)	132,12 (2)	124,82 (2)	114,92 (2)	108,09 (2)
ОПР	112,96 (2)	129,59 (2)	159,28 (2)	182,94 (2)	173,23 (2)	146,03 (2)	134,52 (2)	126,68 (2)	115,96 (2)	108,09 (2)
Δ , %	0,0	1,4	2,8	3,0	2,1	2,1	1,8	1,5	0,9	0,0
$L/r=4$										
Одношарова оболонка										
АПР	54,66 (2)	61,25 (2)	69,89 (2)	71,11 (2)	70,96 (2)	71,98 (1)	65,89 (1)	60,78 (1)	55,10 (1)	51,82 (1)
ОПР	54,66 (2)	62,13 (2)	72,37 (2)	73,23 (2)	70,78 (2)	74,12 (2)	71,71 (1)	67,13 (1)	59,42 (1)	51,82 (1)
Δ , %	0,0	1,4	3,5	3,0	-0,3	3,0	8,8	10,4	7,8	0,0
Двошарова оболонка										
АПР	54,66 (2)	61,28 (2)	70,92 (2)	70,59 (2)	67,58 (2)	70,80 (2)	71,83 (1)	66,99 (1)	59,20 (1)	51,82 (1)
ОПР	54,66 (2)	62,13 (2)	72,37 (2)	73,23 (2)	70,78 (2)	74,12 (2)	71,71 (1)	67,13 (1)	59,42 (1)	51,82 (1)

$\Delta, \%$	0,0	1,4	2,0	3,7	4,7	4,7	-0,2	0,2	0,4	0,0
Тришарова оболонка										
АПР	54,66 (2)	61,94 (2)	72,00 (2)	72,64 (2)	69,72 (2)	72,06 (2)	71,32 (1)	66,64 (1)	58,98 (1)	51,82 (1)
ОПР	54,66 (2)	62,13 (2)	72,37 (2)	73,23 (2)	70,78 (2)	74,12 (2)	71,71 (1)	67,13 (1)	59,42 (1)	51,82 (1)
$\Delta, \%$	0,0	0,3	0,5	0,8	1,5	2,9	0,5	0,7	0,7	0,0
Чотиришарова оболонка										
АПР	54,66 (2)	61,91 (2)	71,95 (2)	72,43 (2)	69,75 (2)	73,01 (2)	71,74 (1)	67,09 (1)	59,37 (1)	51,82 (1)
ОПР	54,66 (2)	62,13 (2)	72,37 (2)	73,23 (2)	70,78 (2)	74,12 (2)	71,71 (1)	67,13 (1)	59,42 (1)	51,82 (1)
$\Delta, \%$	0,0	0,4	0,6	1,1	1,5	1,5	0,0	0,1	0,1	0,0
$L/r=10$										
Одношарова оболонка										
АПР	22,39 (1)	23,89 (1)	22,73 (1)	18,42 (1)	14,60 (1)	13,07 (1)	12,75 (1)	12,69 (1)	12,48 (1)	12,29 (1)
ОПР	22,39 (1)	26,40 (1)	29,12 (1)	24,60 (1)	17,69 (1)	13,94 (1)	13,00 (1)	12,98 (1)	12,78 (1)	12,29 (1)
$\Delta, \%$	0,0	10,5	28,1	33,6	21,2	6,7	2,0	2,3	2,4	0,0
Двошарова оболонка										
АПР	22,39 (1)	26,33 (1)	29,04 (1)	24,51 (1)	17,65 (1)	13,94 (1)	13,01 (1)	12,98 (1)	12,76 (1)	12,29 (1)
ОПР	22,39 (1)	26,40 (1)	29,12 (1)	24,60 (1)	17,69 (1)	13,94 (1)	13,00 (1)	12,98 (1)	12,78 (1)	12,29 (1)
$\Delta, \%$	0,0	0,3	0,3	0,4	0,2	0,0	-0,1	0,0	0,2	0,0
Тришарова оболонка										
АПР	22,39 (1)	26,14 (1)	28,51 (1)	24,01 (1)	17,39 (1)	13,86 (1)	12,99 (1)	12,96 (1)	12,75 (1)	12,29 (1)
ОПР	22,39 (1)	26,40 (1)	29,12 (1)	24,60 (1)	17,69 (1)	13,94 (1)	13,00 (1)	12,98 (1)	12,78 (1)	12,29 (1)
$\Delta, \%$	0,0	1,0	2,1	2,5	1,7	0,6	0,1	0,2	0,2	0,0
Чотиришарова оболонка										
АПР	22,39 (1)	26,38 (1)	29,10 (1)	24,57 (1)	17,68 (1)	13,94 (1)	13,00 (1)	12,98 (1)	12,77 (1)	12,29 (1)
ОПР	22,39 (1)	26,40 (1)	29,12 (1)	24,60 (1)	17,69 (1)	13,94 (1)	13,00 (1)	12,98 (1)	12,78 (1)	12,29 (1)
$\Delta, \%$	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0

На рис. 4.8 криві 1 описують величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для одношарових циліндричних оболонок. Графіки 2 характеризують результати дослідження двошарових конструкцій $\pm\psi$, криві 3 – тришарових, а 4 – чотиришарових. Ці графіки побудовано за величинами, що отримані згідно запропонованого підходу «АПР». Криві 1' характеризують

результати визначення мінімальних частот для таких оболонок згідно підходу «ОПР». На рис. 4.8 суміщено результати розрахунків для оболонок з відношеннями довжини до радіуса середньої поверхні $L/r=2, 4, 10$.

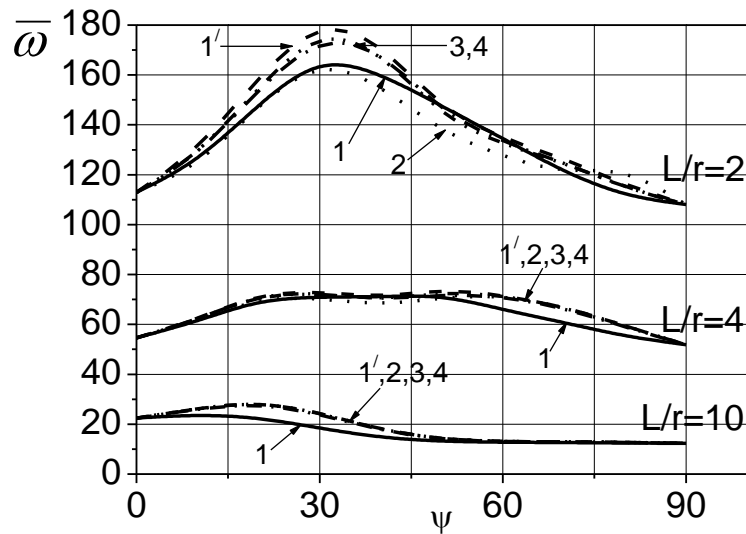


Рис. 4.8. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для оболонок з відношенням довжини до радіусу $L/r=2, 4, 10$ з позначенням: 1 – одношарова, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова, 1' – результати отримані на основі підходу «ОПР»

Аналізуючи результати приведені в табл. 4.12 та на рис. 4.8 відмітимо таке. Відносно короткі анізотропні циліндри з відношенням довжини до радіусу $L/r=2$ для кожного окремого випадку структурної будови стінки оболонки (одно-, дво-, три-, чотиришарового) уздовж всієї числової осі ψ мають найбільші значення мінімальних частот вільних коливань порівняно із відношеннями $L/r=4$ та $L/r=10$. У випадку оболонок при $L/r=4$ значення мінімальних частот знаходяться між такими ж, що отримані для циліндрів з відношеннями $L/r=2$ та $L/r=10$.

4.5.4. Вплив граничних умов на частоти вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок

В даному підрозділі за використанням приведеного в роботі підходу до розрахунку анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці «АПР» досліджено вплив умов закріплення торців оболонкових конструкцій та кута ψ на величини мінімальних частот вільних коливань. Розглянуто такі типи

закріплення: 31 – на обох торцях виконуються умови ($\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$); 32 – на одному торці мають місце умови ($\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0$), а на іншому ($\tau_{rz} = \tau_{z\theta} = u_z = 0$). Досліджено циліндричні оболонки, що виготовлені із боропластику механічні характеристики якого приведені в підпункті 4.5.1.1, з такими геометричними характеристиками: довжина вздовж твірної $L=1,2\text{м}$; радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$; відношення товщини оболонки h до її радіусу серединної поверхні r дорівнює $1/5$.

У табл. 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 приведені результати досліджень із визначення величин мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ згідно підходу «АПР» відповідно одно-, дво-, три- та чотиришарових циліндричних оболонок в залежності від різних умов закріплення торців (31-32) та кута ψ армування їх матеріалу. В кожному рядку для мінімальних частот вільних коливань, в дужках приведені числа, що описують параметр хвилеутворення за коловим напрямком k .

Таблиця 4.13

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ одношарової оболонки

Тип граничних умов	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)									
31	112,96 (2)	125,10 (2)	148,31 (2)	167,76 (2)	160,64 (2)	147,58 (2)	134,59 (2)	121,05 (2)	111,41 (2)	108,09 (2)
32	53,17 (2)	59,58 (2)	67,99 (2)	69,17 (2)	69,03 (2)	70,02 (1)	64,10 (1)	59,12 (1)	53,60 (1)	50,41 (1)

Таблиця 4.14

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ двошарової оболонки

Тип граничних умов	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)									
31	112,96 (2)	123,14 (2)	148,09 (2)	166,84 (2)	155,93 (2)	137,18 (2)	127,34 (2)	120,55 (2)	123,14 (2)	108,09 (2)
32	53,17 (2)	59,61 (2)	68,99 (2)	68,67 (2)	65,74 (2)	68,87 (2)	69,87 (1)	65,17 (1)	57,59 (1)	50,41 (1)

Таблиця 4.15

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$
тришарової оболонки

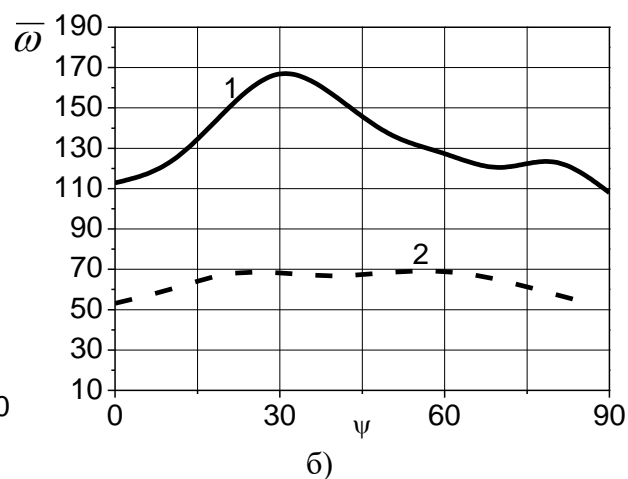
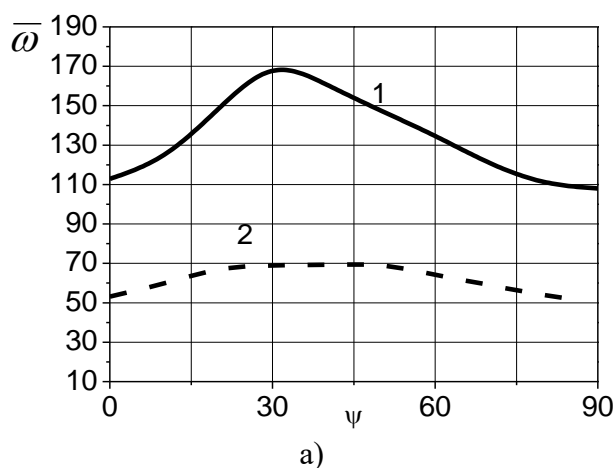
Тип гранич- них умов	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)									
31	112,96 (2)	127,53 (2)	154,41 (2)	176,36 (2)	170,32 (2)	144,80 (2)	133,04 (2)	124,85 (2)	114,73 (2)	108,09 (2)
32	53,17 (2)	60,25 (2)	70,04 (2)	70,66 (2)	67,82 (2)	70,10 (2)	69,38 (1)	64,82 (1)	57,37 (1)	50,41 (1)

Таблиця 4.16

Величини безрозмірних значень мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$
чотиришарової оболонки

Тип гранич- них умов	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)									
31	112,96 (2)	127,76 (2)	155,01 (2)	179,17 (2)	169,59 (2)	143,00 (2)	132,12 (2)	124,82 (2)	114,92 (2)	108,09 (2)
32	53,17 (2)	60,22 (2)	69,99 (2)	70,46 (2)	67,85 (2)	71,02 (2)	69,79 (1)	65,26 (1)	57,75 (1)	50,41 (1)

Згідно даних табл. 4.13-4.16 на рис. 4.9 приведені графіки в осях мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ – кут ψ армування композитного матеріалу, де рис. 4.9 (а) відповідає одношаровій оболонці, рис. 4.9 (б) – двошаровій, рис. 4.9 (в) – тришаровій і рис. 4.9 (г) – характеризує чотиришарову циліндричну оболонку. Тут кривою 1 проілюстровано величини мінімальних частот вільних коливань при закріпленні торців оболонки типу 31. Графік 2 представляє мінімальні частоти для закріплення типу 32.



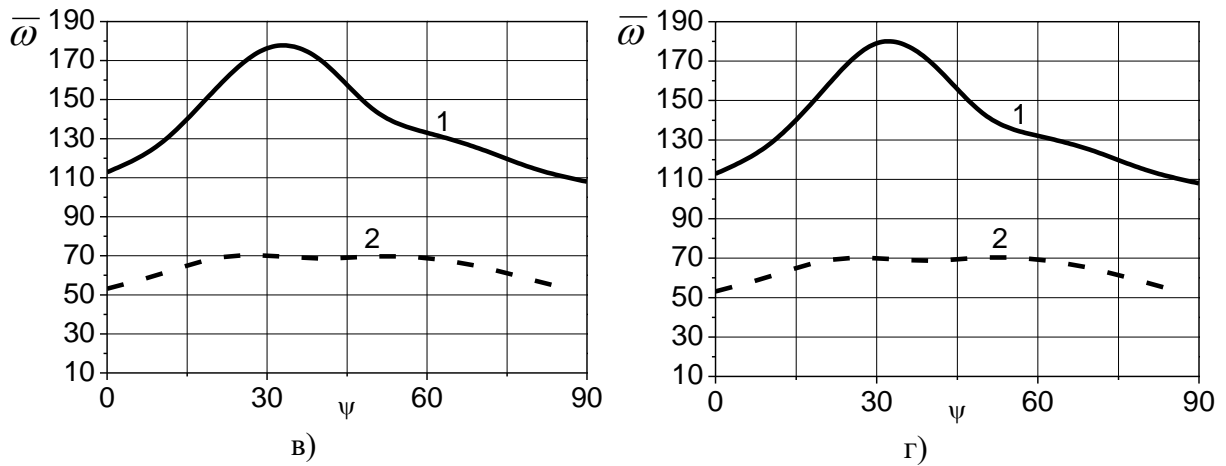


Рис. 4.9. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для одношарових (а), двошарових (б), тришарових (в), чотиришарових (г) циліндричних оболонок залежно від умов закріплення торців: 1 – 31, 2 – 32

Аналіз результатів табл. 4.13-4.16 та рис. 4.9 дозволяє зробити такі кількісні та якісні висновки. Видно, що різні умови на торцях циліндричних оболонкових конструкцій суттєво впливають на значення мінімальних частот вільних коливань. Величини мінімальних частот отриманих при закріпленні торців типу 32 (крива 2) є меншими для порівнюваних випадків граничних умов та кількості шарів на усьому діапазоні зміни кута армування ψ . Максимальна розбіжність порівняно із спіранням 31 (крива 1) має місце для чотиришарового циліндра при $\psi = 30^\circ$ і знаходиться в межах 61%.

4.5.5. Дослідження частот вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок

На рис. 4.10 спираючись на результати, що приведені в табл. 4.17, представлено дані стосовно дослідження спектра частот вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок. Проаналізовано вплив параметру хвилеутворення в коловому напрямку k , з різним відношенням товщини до радіуса серединної поверхні h/r та різною кількістю шарів з перехресним армуванням матеріалу для кута повороту головних напрямів пружності $\psi = 30^\circ$. Геометричні розміри оболонки такі: довжина вздовж твірної $L=1,2$ м; радіус

серединної поверхні $r=0,6m$; відношення товщини оболонки h до радіусу її серединної поверхні r (1/10; 1/5). Граничні умови на торцях відповідають умовам (4.4). Матеріал оболонки – боропластик з характеристиками приведеними в підпункті 4.5.1.1. В табл. 4.17 при куті армування $\psi=30^{\circ}$ окремими рядками приведені результати визначення частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для одно-, дво-, три-, чотири- та восьмишарових оболонок згідно підходу «АПР», а також для цих же конструкцій, але за підходом «ОПР» залежно від параметру хвилеутворення в коловому напрямку k , що змінюється в межах від 1 до 10.

Таблиця 4.17

Безрозмірні значення мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ шаруватих оболонок при повороті головних напрямів пружності матеріалу $\psi=30^{\circ}$

Параметр хвилеутворення k за коловим напрямком										
$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$										
h/r=1/10										
Одношарова оболонка										
181,67	193,51	145,07	125,42	149,55	191,25	246,76	313,08	388,31	471,08	560,31
Двошарова оболонка										
187,87	191,04	158,16	121,78	144,78	197,42	263,00	337,55	419,94	509,25	604,55
Тришарова оболонка										
188,57	195,56	160,91	127,38	146,50	191,79	251,25	321,23	399,92	485,94	578,17
Чотиришарова оболонка										
188,63	193,79	160,63	127,72	151,89	204,27	270,20	345,48	428,50	518,32	613,91
Восьмишарова оболонка										
188,87	194,25	161,28	129,27	153,95	206,49	272,68	348,29	431,69	521,80	617,72
Підхід «ОПР»										
188,90	194,46	161,60	129,97	154,84	207,44	273,73	349,46	432,99	523,24	619,32
h/r=1/5										
Одношарова оболонка										
187,50	217,91	167,76	180,82	237,98	315,15	406,29	506,81	614,07	726,32	842,34
Двошарова оболонка										
190,60	196,83	166,84	172,47	242,77	333,08	433,28	540,49	653,27	770,24	890,26
Тришарова оболонка										
193,07	202,55	176,36	178,15	238,41	322,12	418,94	524,63	636,59	752,97	872,45
Чотиришарова оболонка										
193,04	202,38	179,17	184,36	249,62	337,56	436,50	542,93	654,95	771,12	890,29
Восьмишарова оболонка										
193,93	203,93	181,33	187,79	253,34	341,04	439,89	546,28	658,27	774,41	893,54
Підхід «ОПР»										
194,17	204,44	182,94	189,83	255,18	342,86	441,75	548,22	660,32	776,58	895,86

Результати дослідження частот вільних коливань, приведені в табл. 4.17, представлено у вигляді графіків на рис. 4.10 в осях: частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ – параметр хвилеутворення k . Рис. 4.10 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/10$, рис. 4.10 (б) – $h/r=1/5$. Позначення кривих вказане на рисунках відповідає 1 – одношаровій, 2 – двошаровій, 3 – тришаровій, 4 – чотиришаровій, 8 – восьмишаровій циліндричній оболонці. Позначення OPR відповідає результатам отриманим згідно ортотропного підходу до розрахунку анізотропної оболонки «ОПР».

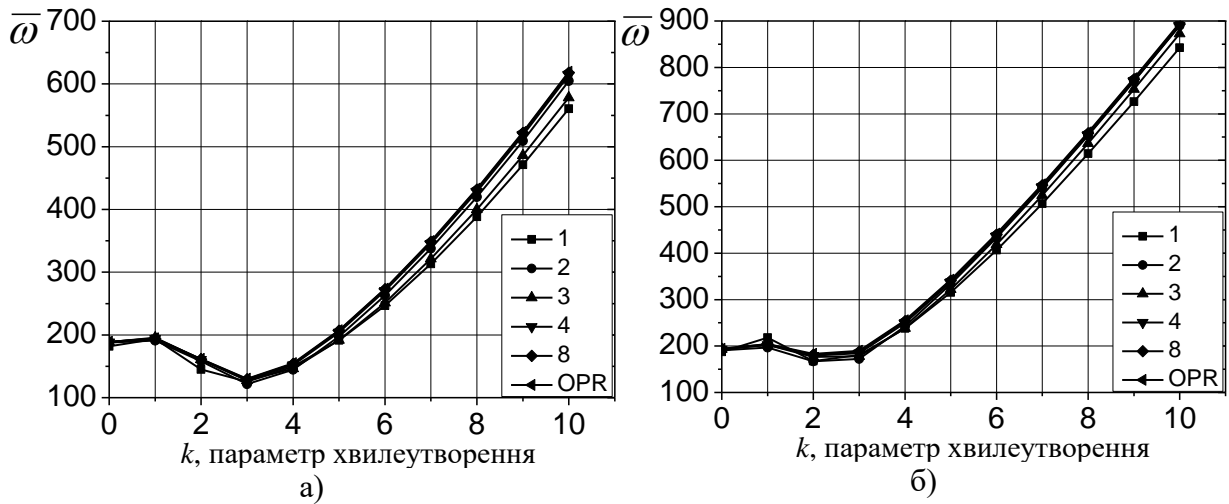


Рис. 4.10. Залежність частот вільних коливань $\bar{\omega}$ від параметру хвилеутворення k в коловому напрямку циліндричних оболонок для $h/r=1/10$ (а), $h/r=1/5$ (б) з позначенням: 1 – одношарова, 2 – двошарова, 3 – тришарова, 4 – чотиришарова, 8 – восьмишарова, OPR – результати отримані на основі підходу «ОПР»

Аналізуючи результати представлені в табл. 4.17 та на рис. 4.10 зробимо такі висновки. Значення частот вільних коливань $\bar{\omega}$ залежать від величини параметра хвилеутворення в коловому напрямку k , причому ця залежність змінюється із зміною відношення товщини циліндричної оболонки до радіуса її середньої поверхні h/r . Вкажемо на те, що у випадку одношарових оболонок для $h/r=1/10$ мінімальні частоти вільних коливань є меншими від отриманих при $k=0$ (осесиметричні коливання) на близько 41%. Із збільшенням товщини ця різниця зменшується і при $h/r=1/5$ складає 11%. Також зауважимо, що на початковому етапі збільшення параметра хвилеутворення від $k=0$ до k , яке

відповідає мінімальній частоті вільних коливань має місце локальний максимум вищих частоти при $k=1$ незалежно від відношення h/r . Розбіжність між частотами $\bar{\omega}$ при $k=0$ та $k=1$ змінюється від 6,5% для $h/r=1/10$ до 16,2% для $h/r=1/5$. Подальше зростання параметра хвилеутворення k після його величини, що відповідає мінімальній частоті вільних коливань веде до поступового збільшення вищих частот вільних коливань в розглядуваному діапазоні зміни k незалежно від товщини оболонки. Також вкажемо на те, що збільшення кількості шарів з перехресним армуванням $\psi = 30^\circ$ матеріалу веде до того, що і вищі частоти вільних коливань отримані згідно підходу «АПР» наближаються до визначених за «ОПР», як це відбувається з мінімальними частотами, що було показано в підпунктах 4.5.1. - 4.5.3. Видно, що при восьмишаровому структурному пакеті розбіжності між підходами «АПР» та «ОПР» не перевищують 1%.

4.5.6. Дослідження частот вільних коливань шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів

Рис. 4.11 графічно представляє результати (табл. 4.18) дослідження мінімальних частот вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок з волокнистого композиту боропластика з зовнішнім шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). В якості ФГМ вибрано два склади матеріалів: перший – метало-керамічний з характеристиками матеріалу описаними в пп. 3.5.2, другий – нанокерамічний ФГМ, представлений в пп. 3.5.3.

Для обох типів оболонок прийнято, що циліндр складено з двох шарів: внутрішнього з координатами поверхонь $r_1=0,54\text{м}$, $r_{11}=0,64\text{м}$ – з боропластика та зовнішнього шару з координатами за товщиною $r_{02}=0,64\text{м}$, $r_2=0,66\text{м}$ – з ФГМ. Довжина оболонки уздовж твірної: $L=1,2\text{м}$, радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$, відношення товщини h до радіусу серединної поверхні $h/r=1/5$. Температурне

поле прийнято незмінним для всієї оболонкової конструкції і має значення 293⁰К (20⁰С).

Граничні умови на торцях відповідають умовам (4.4). Результати отримано при використанні двох підходів. В першому рядку приведені результати розрахунку на вільні коливання (безрозмірні частоти $\bar{\omega} = \omega \cdot 1,81 \cdot L \cdot 10^2 \sqrt{\rho/E_0}$), що базуються на пропонованому підході до розв'язку системи (4.6) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) «АПР». Другим рядком приведені безрозмірні значення мінімальних частот $\bar{\omega}$ здобуті у припущенні, що в залежностях (2.3) $c_{16}=c_{26}=c_{36}=a_{45}=0$ – підхід «ОПР». Структура таблиці 4.18 аналогічна табл. 4.5.

Таблиця 4.18

Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ оболонки з шарами ФГМ

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ (параметр хвилеутворення k)										
<i>Анізотропна оболонка із шаром метало-керамічного ФГМ</i>										
АПР	131,68 (2)	143,12 (2)	169,35 (2)	188,59 (2)	191,06 (2)	182,51 (2)	170,11 (2)	155,76 (2)	141,60 (2)	137,06 (2)
ОПР	131,68 (2)	147,34 (2)	175,40 (2)	193,83 (2)	194,18 (2)	185,35 (2)	177,74 (2)	166,66 (2)	148,74 (2)	137,06 (2)
Δ , %	0,0	2,9	3,6	2,8	1,6	1,6	4,5	7,0	5,0	0,0
<i>Анізотропна оболонка із шаром нанокерамічного ФГМ</i>										
АПР	148,40 (2)	156,28 (3)	177,47 (2)	195,27 (2)	201,51 (2)	196,41 (2)	184,43 (2)	169,45 (2)	155,59 (2)	151,70 (2)
ОПР	148,40 (2)	159,82 (2)	182,25 (2)	199,43 (2)	204,94 (2)	200,63 (2)	191,00 (2)	177,22 (2)	160,62 (2)	151,70 (2)
Δ , %	0,0	2,3	2,7	2,1	1,7	2,1	3,6	4,6	3,2	0,0

Згідно з табл. 4.18 на рис. 4.11 в осях $\bar{\omega}$ - ψ представлені графічні залежності, що демонструють вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ на величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$, отримані згідно підходу «АПР» Крива 1 – відображає мінімальні частоти отримані для випадку суцільної одношарової боропластикової оболонки з відношенням $h/r=1/5$ згідно результатів табл. 4.5. Графіки 2 та 3 ілюструють

результати мінімальних частот для оболонок з боропластику із шаром відповідно метало-керамічного та нанокерамічного ФГМ.

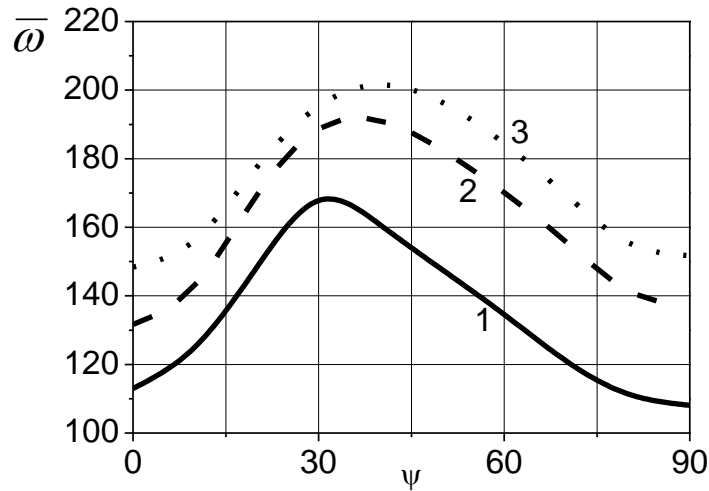


Рис. 4.11. Величини мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для боропластикової (1), боропластикової з шаром метало-керамічного ФГМ (2), боропластикової з шаром нанокерамічного ФГМ (3) оболонки

Аналіз результатів визначення мінімальних частот вільних коливань та відповідних їм параметрів хвилеутворення в коловому напрямку дозволяє зробити висновки. Мінімальні частоти вільних коливань $\bar{\omega}$ як для суцільних боропластикових, так і для боропластикових із шарами ФГМ залежать від зміни кута повороту ψ головних напрямів пружності матеріалу. При цьому, незалежно від структури за товщиною оболонки, найбільші значення $\bar{\omega}$ для розглянутих умов закріплення мають місце для $30^{\circ} \leq \psi \leq 40^{\circ}$.

При цьому оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ уздовж всієї числової осі ψ мають найбільші значення мінімальних частот вільних коливань порівняно із іншими двома типами конструкцій, а найменші мають місце для суцільної боропластикової конструкції. Розбіжність між максимальними величинами мінімальних частот вільних коливань $\bar{\omega}$ для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із суцільною боропластиковою досягає 16,7% і порівняно із боропластиковою із шаром метало-керамічного ФГМ складає 5,2%.

4.6. Висновки до розділу 4

В розділі представлено тривимірну систему однорідних диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, що отримана на основі модифікованого варіаційного принцип Ху – Васідзу. На її основі запропоновано підхід до розв’язку задачі про вільні коливання шаруватих товстостінних циліндричних оболонок з анізотропного матеріалу, пружні характеристики якого знаходяться в одній площині, що є дотичною серединній поверхні. Для приведення тривимірної системи до одновимірної застосовано аналітичний метод Бубнова – Гальоркіна. Отримана таким чином одновимірна задача реалізована чисельним методом дискретної ортогоналізації.

В розділі приведені результати розрахунку частот вільних коливань циліндричних оболонок з композитів, утворених косоперехресним укладанням шарів армованого матеріалу, на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Проаналізовано вплив різних схем армування, структурної конфігурації пакету шарів, товщини та довжини, умов закріплення торців на частоти вільних коливань циліндричних оболонкових конструкцій, що виготовлені з волокнистих композитних матеріалів при врахуванні механічних характеристик закону Гука (підхід «АПР») в просторовій постановці. Отримані результати порівняно із частотами вільних коливань здобутими на основі ортотропного підходу «ОПР» до розрахунку анізотропних оболонок, що також спирається на тривимірні рівняння теорії пружності.

З аналізу результатів видно, що використання запропонованого підходу «АПР» до визначення частот вільних коливань переважно веде до отримання менших значень мінімальних частот у порівнянні із ортотропним підходом «ОПР» до розрахунку конструкцій з анізотропних матеріалів.

Найбільші розбіжності між порівнюваними величинами для анізотропних циліндричних оболонок, за пропонованим підходом та ортотропною моделлю,

мають місце у випадках одношарових та двошарових пакетів та знаходяться в межах від 9% до 12% відповідно.

Зростання кількості шарів із перехресним армуванням призводить до зменшення цієї розбіжності і вже при семи-восьми шарах результати отримані за пропонуваним підходом «АПР», залишаючись меншими, впритул наближаються до мінімальних частот вільних коливань отриманих згідно ортотропного підходу «ОПР» до розрахунку анізотропних оболонок. Різниця між порівнюваними частотами не перевищує 1%. Це є підтвердженням описаного в [145] ефекту, що при збільшенні кількості перехресно розташованих шарів однакової товщини до 7-8 та більше, анізотропні оболонкові конструкції можливо, з певною точністю, розраховувати нехтуючи анізотропними константами матеріалу.

Відмітимо, що зміна відношення довжини уздовж твірної L шаруватої анізотропної циліндричної оболонки до радіусу її серединної поверхні r , від $L/r=2$ до $L/r=10$ не суттєво впливає на окреслення кривих, що характеризують значення мінімальних частот вільних коливань. Для всіх розглянутих випадків зміни довжини до радіусу серединної поверхні збільшення кількості шарів з перехресним армуванням призводить до наближення мінімальних частот вільних коливань, отриманих згідно підходів «АПР» та «ОПР».

Проведено порівняння величин мінімальних частот вільних коливань в залежності від умов закріплення торців шаруватих циліндричних оболонок. Встановлено, що мінімальні частоти вільних коливань суттєво залежать від умов на торцях конструкцій. Розходження між порівнюваними результатами досягає 61%.

Проведений аналіз залежності частот вільних коливань від параметру хвилеутворення в коловому напрямку вказує на те, що збільшення кількості шарів з перехресним армуванням ψ веде до того, що і вищі частоти вільних коливань отримані згідно підходу «АПР» наближаються до визначених за «ОПР», як це відбувається з мінімальними частотами. Так для випадку восьмишарового структурного пакету розбіжності між вищими частотами

вільних коливань здобутими за підходами «АПР» та «ОПР» не перевищують 1%. Це підтверджує описаний в [145] ефект, що при збільшенні кількості перехресно розташованих шарів однакової товщини до семи-восьми та більше, вільні коливання анізотропних оболонкових конструкції можливо, з певною точністю, розраховувати нехтуючи анізотропними константами матеріалу.

Представлено результати дослідження мінімальних частот вільних коливань неоднорідних за товщиною циліндрів з шарами із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) пружні властивості яких неперервно-змінні у радіальному напрямку. Розглянуто випадки, коли складовими ФГМ є комбінації металу і кераміки та вуглецевих нанотрубок і кераміки. Механічні характеристики складових ФГМ були визначені для температури $T=293^0\text{K}$ (20^0C). Проведено порівняння отриманих результатів з мінімальними частотами для випадку суцільної циліндричної боропластикової оболонки. Встановлено, що оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ мають найбільші значення мінімальних частот вільних коливань порівняно із іншими типами конструкцій, а найменші мають місце для суцільної боропластикової конструкції. Розбіжність між величинами мінімальних частот вільних коливань для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із однорідною боропластиковою досягає 16,7% і порівняно із боропластиковою із шаром метало-керамічного ФГМ складає 5,2%.

РОЗДІЛ 5

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ХУ – ВАСІДЗУ ТА ПОБУДОВА РІВНЯНЬ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ АНІЗОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

5.1. Модифікований змішаний варіаційний принцип Ху – Васідзу та виведення системи рівнянь стійкості

Запишемо пружний потенціал (1.36) у вигляді:

$$W_1 = -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (5.1)$$

В (5.1) використані позначення (1.36). Скористаємось такими розкладами [153]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тут параметри напружено-деформованого стану з нуликом – докритичні значення деформацій і напружень; з індексами (1) – збурені; з індексами (2) – теж, лише у квадраті; α - нескінченно мала стала, що незалежна від координат.

Підставимо (5.2) до (5.1) та здійснимо перетворення

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{1}{2} (\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)})^T B_{11}^{-1} (\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)}) - \\ &- \frac{1}{2} (\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)})^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) (\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}) + \\ &+ \left[(\varepsilon_1^0 + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)})^T + (\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)})^T B_{12}^T B_{11}^{-1} \right] (\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)}) + \\ &+ (\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)})^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) (\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Розглянемо перший доданок виразу (5.3), привівши його до виду:

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^{0T} B_{11}^{-1}\sigma_1^0; \quad (5.3a)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T} B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)}; \quad (5.3б)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T} B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)}. \quad (5.3в)$$

Перетворення виразу (5.3a) аналогічні приведеним у підпункті 1.2.

Введемо позначення

$$B_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix},$$

де стала c_{33} – це характеристика матеріалу, що визначається за допомогою механічних констант a_{kl} ($k, l = 1, 2, 3, 6$) матеріалу оболонки (1.48).

Після підстановки у (5.3б) залежності (1.8), отримаємо

$$-\frac{1}{2}\left(\alpha \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} & \tau_{r\theta}^{(1)} & \tau_{rz}^{(1)} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \tau_{r\theta}^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\alpha^2 \left(\sigma_{rr}^{(1)2} c_{33} + \tau_{r\theta}^{(1)2} a_{44} + \right. \\ \left. + 2\tau_{rz}^{(1)}\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45} + \tau_{rz}^{(1)2} a_{55} \right). \quad (5.4)$$

Розглянемо (5.3в) та після подібних до (5.4) перетворень матимемо

$$-\frac{1}{2}\alpha^4 \left(\sigma_{rr}^{(2)2} c_{33} + \tau_{r\theta}^{(2)2} a_{44} + 2\tau_{rz}^{(2)}\tau_{r\theta}^{(2)} a_{45} + \tau_{rz}^{(2)2} a_{55} \right). \quad (5.5)$$

В подальшому проваріюємо вирази (5.4) та (5.5) за напруженнями.

Перепишемо третій доданок (5.3) так:

$$\left(\varepsilon_1^{0T} + \varepsilon_2^{0T} B_{12}^T B_{11}^{-1} \right) \sigma_1^0; \quad (5.6a)$$

$$\left(\alpha\varepsilon_1^{(1)T} + \alpha\varepsilon_2^{(1)T} B_{12}^T B_{11}^{-1} \right) \alpha\sigma_1^{(1)}; \quad (5.6б)$$

$$\left(\alpha^2\varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2\varepsilon_2^{(2)T} B_{12}^T B_{11}^{-1} \right) \alpha^2\sigma_1^{(2)}. \quad (5.6в)$$

Введемо позначення

$$A = B_{12}^T B_{11}^{-1} = - \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \\ c_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Перетворення виразу (5.6а) аналогічні приведеним у підпункті 1.2.

З урахуванням (5.2) та (5.7) залежність (5.6б) прийме вид

$$\left\{ \alpha \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} & \varepsilon_{r\theta}^{(1)} & \varepsilon_{rz}^{(1)} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(1)} & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} & \varepsilon_{z\theta}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_{23} & 0 & 0 \\ -c_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \alpha \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \tau_{r\theta}^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{bmatrix} = \\ = \alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.8)$$

Вираз (5.6в) перепишеться

$$\alpha^4 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^{(2)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \quad (5.9)$$

В подальшому вирази (5.8) та (5.9) проваріюємо за напруженнями і переміщеннями, замінивши деформації залежностями Коші (2.2).

Проваріюємо вираз (5.4) за напруженнями

$$\delta \left[-\frac{1}{2} \alpha^2 \left(\sigma_{rr}^{(1)2} c_{33} + \tau_{r\theta}^{(1)2} a_{44} + 2\tau_{rz}^{(1)} \tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)2} a_{55} \right) \right] = \\ = -\alpha^2 \left\{ \left[c_{33} \sigma_{rr}^{(1)} \right] \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left(a_{44} \tau_{r\theta}^{(1)} + a_{45} \tau_{rz}^{(1)} \right) \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \left(a_{45} \tau_{r\theta}^{(1)} + a_{55} \tau_{rz}^{(1)} \right) \delta \sigma_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.10)$$

За аналогією з (5.10) після варіювання (5.5) отримує вид

$$-\alpha^4 \left\{ \left[c_{33} \sigma_{rr}^{(2)} \right] \delta \sigma_{rr}^{(2)} + \left(a_{44} \tau_{r\theta}^{(2)} + a_{45} \tau_{rz}^{(2)} \right) \delta \tau_{r\theta}^{(2)} + \left(a_{45} \tau_{r\theta}^{(2)} + a_{55} \tau_{rz}^{(2)} \right) \delta \sigma_{rz}^{(2)} \right\}. \quad (5.11)$$

Проваріюємо вираз (5.8) за напруженнями

$$\alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \delta \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.12)$$

Варіація виразу (5.9) за напруженнями – така

$$\alpha^4 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(2)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \delta \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \delta \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \quad (5.13)$$

Відповідно до залежності (5.3) необхідно врахувати такі доданки:

$$-\frac{1}{2} \sigma_1^{0T} B_{11}^{-1} \alpha \sigma_1^{(1)}; \quad (5.14)$$

$$-\frac{1}{2} \sigma_1^{0T} B_{11}^{-1} \alpha^2 \sigma_1^{(2)}; \quad (5.15)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\sigma_1^0; \quad (5.16)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)}; \quad (5.17)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)}; \quad (5.18)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^0; \quad (5.19)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)}; \quad (5.20)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)}; \quad (5.21)$$

Здійснимо перетворення над виразом (5.14):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma_1^{0T}B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^0 & \tau_{r\theta}^0 & \tau_{rz}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \tau_{r\theta}^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{2}\alpha \left[(\sigma_{rr}^0 c_{33}) \sigma_{rr}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^0 a_{44} + \tau_{rz}^0 a_{45}) \tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^0 a_{45} + \tau_{rz}^0 a_{55}) \tau_{rz}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Аналогічні операції проведемо над виразами (5.15 ÷ 5.21).

Вираз (5.15):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma_1^{0T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)} &= -\frac{1}{2}\alpha^2 \left[(\sigma_{rr}^0 c_{33}) \sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\ &\left. + (\tau_{r\theta}^0 a_{44} + \tau_{rz}^0 a_{45}) \tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^0 a_{45} + \tau_{rz}^0 a_{55}) \tau_{rz}^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Вираз (5.16):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\sigma_1^0 &= -\frac{1}{2}\alpha \left[(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33}) \sigma_{rr}^0 + \right. \\ &\left. + (\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45}) \tau_{r\theta}^0 + (\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55}) \tau_{rz}^0 \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Вираз (5.17):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}\alpha^2 \left[(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33}) \sigma_{rr}^{(1)} + \right. \\ &\left. + (\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45}) \tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55}) \tau_{rz}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Вираз (5.18):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha\sigma_1^{(1)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\alpha^3\left[(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33})\sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\
& \left. + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44} + \tau_{rz}^{(1)}a_{45})\tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45} + \tau_{rz}^{(1)}a_{55})\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Вираз (5.19):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^0 = -\frac{1}{2}\alpha^2\left[(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33})\sigma_{rr}^0 + \right. \\
& \left. + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44} + \tau_{rz}^{(2)}a_{45})\tau_{r\theta}^0 + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45} + \tau_{rz}^{(2)}a_{55})\tau_{rz}^0\right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Вираз (5.20):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha\sigma_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha^3\left[(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33})\sigma_{rr}^{(1)} + \right. \\
& \left. + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44} + \tau_{rz}^{(2)}a_{45})\tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45} + \tau_{rz}^{(2)}a_{55})\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Вираз (5.21):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_1^{(2)T}B_{11}^{-1}\alpha^2\sigma_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\alpha^4\left[(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33})\sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\
& \left. + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44} + \tau_{rz}^{(2)}a_{45})\tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45} + \tau_{rz}^{(2)}a_{55})\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Проварюємо вирази (5.22 ÷ 5.29) за напруженнями.

Вираз (5.22):

$$-\frac{1}{2}\alpha\left[(\sigma_{rr}^0c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^0a_{44} + \tau_{rz}^0a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^0a_{45} + \tau_{rz}^0a_{55})\delta\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.30)$$

Вираз (5.23):

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\left[(\sigma_{rr}^0c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^0a_{44} + \tau_{rz}^0a_{45})\tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^0a_{45} + \tau_{rz}^0a_{55})\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.31)$$

Вираз (5.24):

$$-\frac{1}{2}\alpha\left[(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44} + \tau_{rz}^{(1)}a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45} + \tau_{rz}^{(1)}a_{55})\delta\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.32)$$

Вираз (5.25):

$$-\alpha^2\left[(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44} + \tau_{rz}^{(1)}a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45} + \tau_{rz}^{(1)}a_{55})\delta\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.33)$$

Вираз (5.26):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\alpha^3\left\{[(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44} + \tau_{rz}^{(1)}a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45} + \tau_{rz}^{(1)}a_{55})\delta\tau_{rz}^{(2)}] + \right. \\
& \left. + [(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44} + \tau_{rz}^{(2)}a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(1)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45} + \tau_{rz}^{(2)}a_{55})\delta\tau_{rz}^{(1)}]\right\}. \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Вираз (5.27):

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\left[(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33})\delta\sigma_{rr}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44} + \tau_{rz}^{(2)}a_{45})\delta\tau_{r\theta}^{(2)} + (\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45} + \tau_{rz}^{(2)}a_{55})\delta\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.35)$$

Вираз (5.28):

$$-\frac{1}{2}\alpha^3\left\{\left(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44}+\tau_{rz}^{(2)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45}+\tau_{rz}^{(2)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(1)}\right\}+ \\ +\left\{\left(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44}+\tau_{rz}^{(1)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45}+\tau_{rz}^{(1)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(2)}\right\}. \quad (5.36)$$

Вираз (5.29):

$$-\alpha^4\left[\left(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44}+\tau_{rz}^{(2)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45}+\tau_{rz}^{(2)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.37)$$

Вирази (5.10) та (5.13) аналогічні залежностям (5.33) та (5.37) відповідно.

Вираз (5.3а) при варіюванні за напруженнями дорівнює нулю.

Аналіз залежностей (5.30 ÷ 5.37) дозволяє записати їх у вигляді.

Вирази (5.30) та (5.32):

$$-\alpha\left[\left(\sigma_{rr}^0c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^0a_{44}+\tau_{rz}^0a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^0a_{45}+\tau_{rz}^0a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.38)$$

Вирази (5.31) та (5.35):

$$-\alpha^2\left[\left(\sigma_{rr}^0c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^0a_{44}+\tau_{rz}^0a_{45}\right)\tau_{r\theta}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^0a_{45}+\tau_{rz}^0a_{55}\right)\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.39)$$

Вирази (5.34) та (5.36):

$$-\alpha^3\left\{\left(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44}+\tau_{rz}^{(1)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45}+\tau_{rz}^{(1)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(2)}\right\}+ \\ +\left\{\left(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44}+\tau_{rz}^{(2)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45}+\tau_{rz}^{(2)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(1)}\right\}. \quad (5.40)$$

Вираз (5.33):

$$-\alpha^2\left[\left(\sigma_{rr}^{(1)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{44}+\tau_{rz}^{(1)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(1)}+\left(\tau_{r\theta}^{(1)}a_{45}+\tau_{rz}^{(1)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(1)}\right]. \quad (5.41)$$

Вираз (5.37):

$$-\alpha^4\left[\left(\sigma_{rr}^{(2)}c_{33}\right)\delta\sigma_{rr}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{44}+\tau_{rz}^{(2)}a_{45}\right)\delta\tau_{r\theta}^{(2)}+\left(\tau_{r\theta}^{(2)}a_{45}+\tau_{rz}^{(2)}a_{55}\right)\delta\tau_{rz}^{(2)}\right]. \quad (5.42)$$

Розпишемо третій доданок виразу (5.3), використавши при цьому позначення (5.7):

$$\left[\left(\varepsilon_1^0+\alpha\varepsilon_1^{(1)}+\alpha^2\varepsilon_1^{(2)}\right)^T+\left(\varepsilon_2^0+\alpha\varepsilon_2^{(1)}+\alpha^2\varepsilon_2^{(2)}\right)^T A\right]\left(\sigma_1^0+\alpha\sigma_1^{(1)}+\alpha^2\sigma_1^{(2)}\right)= \\ =\left[\left(\varepsilon_1^{0T}+\varepsilon_2^{0T} A\right)+\left(\alpha\varepsilon_1^{(1)T}+\alpha\varepsilon_2^{(1)T} A\right)+\left(\alpha^2\varepsilon_1^{(2)T}+\alpha^2\varepsilon_2^{(2)T} A\right)\right]\times \\ \times\left(\sigma_1^0+\alpha\sigma_1^{(1)}+\alpha^2\sigma_1^{(2)}\right). \quad (5.43)$$

Розпишемо залежність (5.43) по доданках:

$$\left(\varepsilon_1^{0T}+\varepsilon_2^{0T} A\right)\sigma_1^0; \quad (5.44a)$$

$$\left(\varepsilon_1^{0T}+\varepsilon_2^{0T} A\right)\alpha\sigma_1^{(1)}; \quad (5.44b)$$

$$\left(\varepsilon_1^{0T} + \varepsilon_2^{0T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)}; \quad (5.44\text{в})$$

$$\left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \sigma_1^0; \quad (5.45\text{а})$$

$$\left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \alpha \sigma_1^{(1)}; \quad (5.45\text{б})$$

$$\left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)}; \quad (5.45\text{в})$$

$$\left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \sigma_1^0; \quad (5.46\text{а})$$

$$\left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \alpha \sigma_1^{(1)}; \quad (5.46\text{б})$$

$$\left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)}. \quad (5.46\text{в})$$

З урахуванням (1.8) вираз (5.44а) запишеться:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^0, \varepsilon_{r\theta}^0, \varepsilon_{rz}^0 \right] + \left[\varepsilon_{zz}^0, \varepsilon_{\theta\theta}^0, \varepsilon_{z\theta}^0 \right] \begin{bmatrix} -c_{13} & 0 & 0 \\ -c_{23} & 0 & 0 \\ -c_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^0 \\ \tau_{r\theta}^0 \\ \tau_{rz}^0 \end{bmatrix} = \\ & = \left[\varepsilon_{rr}^0 - (\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36}) \right] \sigma_{rr}^0 + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \tau_{r\theta}^0 + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \tau_{rz}^0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

За аналогією вираз (5.44б):

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_1^{0T} + \varepsilon_2^{0T} A \right) \alpha \sigma_1^{(1)} = \alpha \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^0 - (\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36}) \right] \sigma_{rr}^{(1)} + \right. \\ & \left. + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Вираз (5.44в):

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_1^{0T} + \varepsilon_2^{0T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)} = \alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^0 - (\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36}) \right] \sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Вираз (5.45а):

$$\begin{aligned} & \left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \sigma_1^0 = \alpha \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - (\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36}) \right] \sigma_{rr}^0 + \right. \\ & \left. + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \tau_{r\theta}^0 + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \tau_{rz}^0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Вираз (5.45б):

$$\left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \alpha \sigma_1^{(1)} = \alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - (\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36}) \right] \sigma_{rr}^{(1)} + \right.$$

$$+ \left\{ \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.51)$$

Вираз (5.45в):

$$\begin{aligned} \left(\alpha \varepsilon_1^{(1)T} + \alpha \varepsilon_2^{(1)T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)} &= \alpha^3 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\ &+ \left. \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Вираз (5.46а):

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \sigma_1^0 &= \alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^0 + \right. \\ &+ \left. \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \tau_{r\theta}^0 + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \tau_{rz}^0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Вираз (5.46б):

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \alpha \sigma_1^{(1)} &= \alpha^3 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^{(1)} + \right. \\ &+ \left. \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Вираз (5.46в):

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 \varepsilon_1^{(2)T} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)T} A \right) \alpha^2 \sigma_1^{(2)} &= \alpha^4 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^{(2)} + \right. \\ &+ \left. \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Проваріюємо вирази (5.47 ÷ 5.55) за напруженнями.

Вираз (5.47) при варіюванні дорівнює нулю.

Вираз (5.48):

$$\alpha \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^0 - \left(\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \delta \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.56)$$

Вираз (5.49):

$$\alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^0 - \left(\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(2)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \delta \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \delta \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \quad (5.57)$$

Вираз (5.50) при варіюванні дорівнює нулю.

Вираз (5.51):

$$\alpha^2 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \delta \tau_{rz}^{(1)} \right\}. \quad (5.58)$$

Вираз (5.52):

$$\alpha^3 \left\{ \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \delta \sigma_{rr}^{(2)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \delta \tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \delta \tau_{rz}^{(2)} \right\}. \quad (5.59)$$

Вираз (5.53) при варіюванні дорівнює нулю.

Вираз (5.54):

$$\alpha^3 \left\{ \varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right\} \delta\sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \delta\tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \delta\tau_{rz}^{(1)}. \quad (5.60)$$

Вираз (5.55):

$$\alpha^4 \left\{ \varepsilon_{rr}^{(2)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36} \right) \right\} \delta\sigma_{rr}^{(2)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \delta\tau_{r\theta}^{(2)} + \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \delta\tau_{rz}^{(2)}. \quad (5.61)$$

Використаємо залежності (5.38, 5.41, 5.56, 5.58). Перепишемо їх враховуючи, що згідно (1.1) вони знаходяться під знаком інтеграла

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ -\alpha \left[\left(\sigma_{rr}^0 c_{33} \right) \delta\sigma_{rr}^{(1)} + \left(\tau_{r\theta}^0 a_{44} + \tau_{rz}^0 a_{45} \right) \delta\tau_{r\theta}^{(1)} + \left(\tau_{r\theta}^0 a_{45} + \tau_{rz}^0 a_{55} \right) \delta\tau_{rz}^{(1)} \right] - \right. \\ & - \alpha^2 \left[\left(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33} \right) \delta\sigma_{rr}^{(1)} + \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45} \right) \delta\tau_{r\theta}^{(1)} + \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55} \right) \delta\tau_{rz}^{(1)} \right] + \\ & + \alpha \left\{ \varepsilon_{rr}^0 - \left(\varepsilon_{zz}^0 c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^0 c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^0 c_{36} \right) \right\} \delta\sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^0 \right] \delta\tau_{r\theta}^{(1)} + \left[\varepsilon_{rz}^0 \right] \delta\tau_{rz}^{(1)} \left. \right\} + \\ & + \alpha^2 \left\{ \varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right\} \delta\sigma_{rr}^{(1)} + \left[\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \right] \delta\tau_{r\theta}^{(1)} + \\ & + \left[\varepsilon_{rz}^{(1)} \right] \delta\tau_{rz}^{(1)} \left. \right\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Проваріюємо вирази (5.47÷5.55) за переміщеннями. Для цього скористаємось такими геометричними співвідношеннями [153]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} u_\theta + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} u_r; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} u_r + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} u_z; \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial z} u_z + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} u_\theta; \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_1} u_z \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H_2} u_\theta \right); \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H_3} u_r \right) + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{H_1} u_z \right); \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{H_2} u_\theta \right) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_3} u_r \right); \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$2\omega_z = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (H_3 u_r) - \frac{\partial}{\partial r} (H_2 u_\theta) \right];$$

$$\begin{aligned}
2\omega_\theta &= \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial r} (H_1 u_z) - \frac{\partial}{\partial z} (H_3 u_r) \right]; \\
2\omega_r &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial z} (H_2 u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (H_1 u_z) \right].
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Вираз (5.47) після підстановки в нього співвідношень (5.63) з урахуванням докритичного стану перетворюється на нуль. Те саме відбувається з виразами (5.48) та (5.49).

Розглянемо вираз (5.50). Виділимо перший доданок та підставимо в нього геометричні співвідношення (5.63)

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha \left[\varepsilon_{rr}^{(1)} - \left(\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{36} \right) \right] \sigma_{rr}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = \\
& = \iiint_V \alpha \left\{ \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial z} u_z^{(1)} + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} u_\theta^{(1)} \right) - \right. \\
& - \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} u_r^{(1)} \right) c_{13} - \\
& - \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} u_r^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} u_z^{(1)} \right) c_{23} - \\
& \left. - \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{H_1} u_z^{(1)} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H_2} u_\theta^{(1)} \right) \right) c_{36} \right\} \sigma_{rr}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \tag{5.65}
\end{aligned}$$

При варіюванні врахуємо, що маємо справу з інтегральними виразами та після варіювання за переміщеннями отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha \left\{ \left(-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial r} \delta u_r^{(1)} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial z} \sigma_{rr}^0 \delta u_z^{(1)} + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 \delta u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_3} \sigma_{rr}^0 \delta u_r^{(1)} \right) - \right. \\
& - \left(-\frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial z} \delta u_z^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 \delta u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \sigma_{rr}^0 \delta u_r^{(1)} \right) c_{13} - \\
& - \left(-\frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial \theta} \delta u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \sigma_{rr}^0 \delta u_r^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^0 \delta u_z^{(1)} \right) c_{23} + \\
& \left. + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial z} \delta u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^0 \delta u_\theta^{(1)} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial \theta} \delta u_z^{(1)} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 \delta u_z^{(1)} \Big) c_{36} \Big\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \quad (5.66)$$

Другий доданок виразу (5.50) проваріюємо аналогічно першому

$$\iiint_V \alpha \left\{ \left(-\frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial \theta} \delta u_r^{(1)} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \tau_{r\theta}^0 \delta u_r^{(1)} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} \delta u_\theta^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \tau_{r\theta}^0 \delta u_\theta^{(1)} - \frac{1}{H_3} \tau_{r\theta}^0 \delta u_\theta^{(1)} \right) \right\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \quad (5.67)$$

Проваріюваний третій доданок (5.50) має вигляд

$$\iiint_V \alpha \left\{ \left(-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} \delta u_z^{(1)} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \tau_{rz}^0 \delta u_z^{(1)} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial z} \delta u_r^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial z} \tau_{rz}^0 \delta u_r^{(1)} - \frac{1}{H_3} \tau_{rz}^0 \delta u_z^{(1)} \right) \right\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \quad (5.68)$$

Зберемо доданки (5.66 ÷ 5.68) при однакових варіаціях:

$$\iiint_V \alpha \left\{ \left[\left[\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial z} \sigma_{rr}^0 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial z} c_{13} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^0 c_{23} + \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial \theta} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 \right) c_{36} \right] + \left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \tau_{rz}^0 - \frac{1}{H_3} \tau_{rz}^0 \right] \right\} \delta u_z^{(1)} + \\ + \alpha \left\{ \left[\left[\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^0 c_{13} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial \theta} c_{23} + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial z} + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^0 \right) c_{36} \right] + \left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \tau_{r\theta}^0 - \frac{1}{H_3} \tau_{r\theta}^0 \right] \right\} \delta u_\theta^{(1)} + \\ + \alpha \left\{ \left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \sigma_{rr}^0}{\partial r} - \frac{1}{H_3} \sigma_{rr}^0 - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \sigma_{rr}^0 c_{13} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \sigma_{rr}^0 c_{23} \right] + \right. \\ \left. + \left[-\frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial \theta} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \tau_{r\theta}^0 \right] + \right. \\ \left. + \left[-\frac{1}{H_1} \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial z} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial z} \tau_{rz}^0 \right] \right\} \delta u_r^{(1)} \Big\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \quad (5.69)$$

Згідно підходу, що використаний при варіюванні (5.50), проваріюємо за переміщеннями вираз (5.51)

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\left[\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial z} \sigma_{rr}^{(1)} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} c_{13} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^{(1)} c_{23} + \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^{(1)} \right) c_{36} \right] + \left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \tau_{rz}^{(1)} - \frac{1}{H_3} \tau_{rz}^{(1)} \right] \right\} \delta u_z^{(1)} + \\
& + \alpha^2 \left\{ \left[\left[\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \sigma_{rr}^{(1)} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \sigma_{rr}^{(1)} c_{13} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial z} \sigma_{rr}^{(1)} \right) c_{36} \right] + \left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \tau_{r\theta}^{(1)} - \frac{1}{H_3} \tau_{r\theta}^{(1)} \right] \right\} \delta u_\theta^{(1)} + \\
& + \alpha^2 \left\{ \left[\left[-\frac{1}{H_3} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{H_3} \sigma_{rr}^{(1)} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial r} \sigma_{rr}^{(1)} c_{13} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial r} \sigma_{rr}^{(1)} c_{23} \right] + \right. \\
& \left. + \left[-\frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \tau_{r\theta}^{(1)} \right] + \right. \\
& \left. + \left[-\frac{1}{H_1} \frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial z} \tau_{rz}^{(1)} \right] \right\} \delta u_r^{(1)} \Big\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \tag{5.70}
\end{aligned}$$

До виразу (5.53) у відповідності із [153] необхідно підставляти геометричні співвідношення, що залежать від похідних u_z , u_θ , u_r та містять лише квадратні члени:

$$\varepsilon_{rr}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{rr}^{(1)2} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} + \omega_\theta \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} - \omega_z \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{zz}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{zz}^{(1)2} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} + \omega_r \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} - \omega_\theta \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)2} + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} - \omega_r \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} + \omega_z \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{z\theta}^{(2)} = \varepsilon_{zz}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} - \omega_r \right) + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} + \omega_r \right) + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} - \omega_\theta \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} + \omega_z \right);$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rz}^{(2)} &= \varepsilon_{zz}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} + \omega_\theta \right) + \varepsilon_{rr}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} - \omega_\theta \right) + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} + \omega_r \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} - \omega_z \right); \\ \varepsilon_{r\theta}^{(2)} &= \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} - \omega_z \right) + \varepsilon_{rr}^{(1)} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{r\theta}^{(1)} + \omega_z \right) + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{z\theta}^{(1)} - \omega_r \right) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rz}^{(1)} + \omega_\theta \right).\end{aligned}\quad (5.71)$$

Деформації, що є складовими залежностей (5.71) приведено в (5.63) та (5.64).

Підставлення (5.63) та (5.64) в рівняння (5.71) дає громіздкі та складні залежності. Тому спростимо співвідношення (5.71). Для цього в (5.63) та (5.64) перейдемо до циліндричної системи координат для якої мають місце такі значення параметрів Ламе:

$$H_1 = H_3 = 1; \quad H_2 = f(r).$$

Тоді залежності (5.63) та (5.64) переписуться

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}^{(1)} &= \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}; & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(1)}; & \varepsilon_{rr}^{(1)} &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}; \\ \varepsilon_{z\theta}^{(1)} &= \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta}; & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}; \\ \varepsilon_{r\theta}^{(1)} &= \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta}; & 2\omega_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r}; \\ 2\omega_\theta &= \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z}; & 2\omega_r &= \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (5.72)$$

Запишемо рівняння (5.71) з урахуванням (5.72)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} &= \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{z\theta}^{(2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rz}^{(2)} &= \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r}; \\ \varepsilon_{r\theta}^{(2)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + u_r^{(1)} \right) \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right) \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}.\end{aligned}\quad (5.73)$$

Враховуючи (5.73) перепишемо перший доданок виразу (5.53), а також проваріюємо його за переміщеннями:

$$\begin{aligned}& \delta \iiint_V \alpha^2 \left[\varepsilon_{rr}^{(2)} - (\varepsilon_{zz}^{(2)} c_{13} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} c_{23} + \varepsilon_{z\theta}^{(2)} c_{36}) \right] \sigma_{rr}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = \\ &= \delta \iiint_V \alpha^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} \right)^2 \right] - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] c_{13} - \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right)^2 \right] c_{23} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right) \right] c_{36} \left. \right\} \sigma_{rr}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr.\end{aligned}\quad (5.74)$$

Проваріюємо вираз (5.74) по $\delta u_z^{(1)}$ та враховуючи, що $H_1 = H_3 = 1$; $H_2 = f(r)$ отримаємо:

$$\begin{aligned}& \iiint_V \alpha^2 \left(-r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 \delta u_z^{(1)} dz d\theta dr = 0.\end{aligned}\quad (5.75)$$

Проваріюємо (5.74) по $\delta u_\theta^{(1)}$

$$\begin{aligned}& \iiint_V \alpha^2 \left(-r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} c_{23} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 \delta u_\theta^{(1)} dz d\theta dr = 0.\end{aligned}\quad (5.76)$$

Проваріюємо (5.74) по $\delta u_r^{(1)}$

$$\begin{aligned} \iiint_V \alpha^2 \left(-r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} c_{23} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 \delta u_r^{(1)} dz d\theta dr = 0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

З урахуванням (5.73) перепишемо другий доданок виразу (5.53) та проваріюємо його за переміщеннями:

$$\begin{aligned} \delta \iiint_V \alpha^2 \left[\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \right] \tau_{r\theta}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = \delta \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + u_r^{(1)} \right) \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(1)} \right) \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right] \right\} \tau_{r\theta}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Проваріюємо вираз (5.78) по $\delta u_z^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0 \delta u_z^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.79)$$

Проваріюємо (5.78) по $\delta u_\theta^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 \delta u_\theta^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.80)$$

Проваріюємо (5.78) по $\delta u_r^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 \delta u_r^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.81)$$

З урахуванням (5.73) перепишемо третій доданок виразу (5.53) та проваріюємо його за переміщеннями:

$$\begin{aligned} \delta \iiint_V \alpha^2 \left[\varepsilon_{rz}^{(2)} \right] \tau_{rz}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = \delta \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} \right] \right\} \tau_{rz}^0 H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Проваріюємо вираз (5.82) по $\delta u_z^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \delta u_z^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.83)$$

Проваріюємо (5.82) по $\delta u_\theta^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \delta u_\theta^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.84)$$

Проваріюємо (5.82) по $\delta u_r^{(1)}$:

$$\iiint_V \alpha^2 \left(-2r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \delta u_r^{(1)} dz d\theta dr = 0. \quad (5.85)$$

В цілому проварійований вираз (5.73) отримує вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\left(-r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \right. \right. \\ & + \left. \left(-2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0 + \left(-2r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_z^{(1)} + \\ & + \left[\left(-r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} c_{23} + \right. \right. \\ & + \left. \left. 2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 + \right. \\ & + \left. \left(-2r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_\theta^{(1)} + \\ & + \left[\left(-r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} c_{23} + \right. \right. \\ & + \left. \left. 2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 + \right. \\ & + \left. \left(-2r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_r^{(1)} \} dz d\theta dr = 0. \quad (5.86) \end{aligned}$$

Перепишемо вираз (5.70) з урахуванням параметрів Ламе для циліндричної системи координат $H_1 = H_3 = 1$; $H_2 = f(r)$:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} c_{36} - \frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^{(1)} \right) \delta u_z^{(1)} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} c_{36} - \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^{(1)} \right) \delta u_\theta^{(1)} + \\
& \left. + \left(-\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(1)} c_{23} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(1)} \right) \delta u_r^{(1)} \right] dz d\theta dr. \quad (5.87)
\end{aligned}$$

В останню частину виразу (5.62), що містить α^2 підставимо геометричні співвідношення (5.72) і отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \right) c_{23} + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) c_{36} \right] \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \right. \\
& + \left[\left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} \right) \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \\
& \left. + \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right) \right] \delta \tau_{rz}^{(1)} \right\} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = 0. \quad (5.88)
\end{aligned}$$

До (5.88) приєднаємо інший доданок (5.62), що містить α^2

$$\begin{aligned}
& \iiint_V -\alpha^2 \left[\left(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33} \right) \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45} \right) \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55} \right) \delta \tau_{rz}^{(1)} \right] H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr = 0. \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Зберемо в (5.88) та (5.89) доданки при однакових варіаціях та врахуємо, що $H_1 = H_3 = 1$; $H_2 = f(r)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \right) c_{23} + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) c_{36} \right] - \right. \\
& - \left(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33} \right) \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} \right) - \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45} \right) \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \\
& \left. + \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right) - \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55} \right) \right] \tau_{rz}^{(1)} \right\} H_2 dz d\theta dr = 0. \quad (5.90)
\end{aligned}$$

Четвертий доданок функціоналу (5.3) запишеться у виді:

$$\varepsilon_2^{(1)T} (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2^{(1)}. \quad (a)$$

З урахуванням (1.8) та представивши вираз в дужках (а) у вигляді

$$B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (б)$$

перепишемо (а):

$$\iiint_V \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(1)} & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} & \varepsilon_{z\theta}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{z\theta}^{(1)} \end{bmatrix} H_1 H_2 H_3 dz d\theta dr. \quad (в)$$

Виконаємо під інтегральні перетворення:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(1)} & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} & \varepsilon_{z\theta}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{z\theta}^{(1)} \end{bmatrix} = (\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{11} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{12} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{16}) \varepsilon_{zz}^{(1)} + \\ + (\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{12} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{22} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{26}) \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + (\varepsilon_{zz}^{(1)} c_{16} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} c_{26} + \varepsilon_{z\theta}^{(1)} c_{66}) \varepsilon_{z\theta}^{(1)}. \quad (г)$$

Проваріюємо вираз (г) за переміщеннями, врахувавши при цьому (5.72) і після зібрання доданків з однаковими варіаціями, отримаємо:

$$\left(\frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}}{r^2} u_r + \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \delta u_r; \\ \left(-c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2c_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - c_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) \delta u_z; \\ \left(-\frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - c_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \right. \\ \left. - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} \right) \delta u_\theta. \quad (д)$$

Після об'єднання (5.86), (5.87), (5.90) та (д) отримаємо проваріюваний функціонал (5.1)

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \alpha^2 \left\{ \left[\left(-\frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} c_{36} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^{(1)} \right) + \left(-c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2c_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(-r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 \right. \\
& \left. + \left(-2 \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0 + \left(-2r \frac{\partial^2 u_z^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_z^{(1)} + \\
& + \left[\left(-\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} + \frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial z} c_{36} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^{(1)} \right) + \left(-\frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right. \right. \\
& \left. \left. - c_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - c_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} \right) + \right. \\
& \left. + \left(-r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} c_{23} + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 + \right. \\
& \left. + \left(-2r \frac{\partial^2 u_\theta^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_\theta^{(1)} + \\
& + \left[\left(-\frac{\partial \sigma_{rr}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(1)} c_{23} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{rz}^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(1)} \right) + \left(\frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}}{r^2} u_r + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \left(-r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z^2} c_{13} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \theta^2} c_{23} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r^{(1)} c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \right. \\
& \left. + \left(-2 \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} \right) \tau_{r\theta}^0 + \left(-2r \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 \right] \delta u_r^{(1)} \Big\} dz d\theta dr + \\
& + \alpha^2 \left\{ \left[\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + u_r^{(1)} \right) \right) c_{23} + \left(\frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta} \right) c_{36} \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\sigma_{rr}^{(1)} c_{33}\right) \delta \sigma_{rr}^{(1)} + \left[\left(\frac{\partial u_{\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta}^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta} \right) - \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{44} + \tau_{rz}^{(1)} a_{45} \right) \right] \delta \tau_{r\theta}^{(1)} + \\
& + \left[\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r} \right) - \left(\tau_{r\theta}^{(1)} a_{45} + \tau_{rz}^{(1)} a_{55} \right) \right] \tau_{rz}^{(1)} \Big\} H_2 dz d\theta dr = 0. \tag{5.91}
\end{aligned}$$

Прирівняємо в (5.91) коефіцієнти при варіаціях переміщень і напружень до нуля та отримуємо таку систему рівнянь стійкості для анізотропних нетонких циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{c_{23} + 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}}{r^2} u_r + \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \\
& + \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \left(-\frac{\partial u_z}{\partial z} c_{13} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) c_{23} - \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) c_{36} - \sigma_{rr} c_{33} + \right. \\
& + r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} c_{23} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} c_{36} \Big) \sigma_{rr}^0 + \\
& + \left(-2r \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) c_{23} + \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} \right) c_{36} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{33} \right) - \right. \\
& - \left. \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left(-2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) c_{23} + \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) c_{36} + \right. \\
& + \left. \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{33} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_{\theta} \Big) \tau_{r\theta}^0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{36} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2c_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \\
& - \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{16} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} - \\
& - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \tau_{r\theta} a_{45} - \tau_{rz} a_{55} + r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} c_{23} + \right. \\
& + \left. 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left(-2r \left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} a_{45} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} a_{55} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-2 \left(-\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} a_{45} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} a_{55} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} & = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{23} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{36} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\
& - c_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - c_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \\
& - \frac{2c_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \left(-\frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \tau_{r\theta} a_{44} - \tau_{rz} a_{45} + r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} c_{23} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \\
& + \left(-2r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} a_{44} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} a_{45} \right) - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \\
& + \left(-2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} a_{44} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} a_{45} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r \right) \tau_{r\theta}^0;
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_z}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) c_{23} + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) c_{36} + \sigma_{rr} c_{33};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \tau_{r\theta} a_{45} + \tau_{rz} a_{55};$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} a_{44} + \tau_{rz} a_{45}. \tag{5.92}$$

Тут σ_{rr}^0 , τ_{rz}^0 та $\tau_{r\theta}^0$ визначаються після розв'язку задачі про докритичний напружено-деформований стан (2.1) залежно від діючого на циліндричну оболонку навантаження.

Розв'язок системи (5.92) здійснимо при використанні граничних умов на бічних поверхнях при $r = r_1$:

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0;$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \quad (5.93)$$

на торцях циліндричної оболонки, при $z = 0$, $z = L$ прийmemo граничні умови (2.7)÷(2.10).

5.2. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельно-аналітичного розв'язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском в просторовій постановці

Для розв'язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском в просторовій постановці на торцях, при $z = 0$, $z = L$, прийmemo такі граничні умови:

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0. \quad (5.94)$$

При приведенні тривимірної задачі (5.92) до одновимірної використаємо процедуру методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної z так, що б вони задовольняли граничним умовам (2.7), а також врахуємо їх періодичність за коловою координатою θ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (5.92) за допомогою співвідношень (5.95), отримуємо нескінченну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (5.96)$$

де $\bar{y} = \left\{ y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk} \right\}^T$ – розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

До системи рівнянь (5.96) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_1; \quad (5.97)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_2, \quad (5.98)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (5.93).

Ненульові елементи матриці $T(r, \lambda)$, вони ж коефіцієнти при невідомих системи (5.96), приведені в додатку А.

5.3. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельного розв'язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці

Для розв'язку отриманої тривимірної задачі (5.92), у випадку осьового тиску, скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі розв'язуючі функції в подвійні тригонометричні ряди Фур'є за координатою вздовж твірної циліндра z так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (2.21). При цьому врахуємо періодичність функцій за коловою

координатою θ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\
 \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
 \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\
 u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\
 u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\
 u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z, \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

де $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – коефіцієнти розкладання; p, m – хвильові числа в рядах Фур'є, $l_m = m\pi/L$, L – довжина твірної циліндра.

5.3.1. Використання методу дискретних перетворень Фур'є для переходу від задачі визначення параметрів докритичного напружено-деформованого стану до розв'язку системи рівнянь стійкості пружних анізотропних оболонок в просторовій постановці

Щоб врахувати змінність напружень за довжиною оболонки скористаємося операцією дискретного перетворення Фур'є. Відповідно до неї представимо розподіл вздовж осі z докритичних значень $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0$ та $\tau_{r\theta}^0$, отриманих при використанні методу прямих (пункт 2.3.1), у вигляді рядів:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^0(z) &= \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z; \\
 \tau_{rz}^0(z) &= \frac{a_0^{\tau_{rz}^0}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z;
 \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta}^0(z) = \frac{a_0^{\tau_{r\theta}}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \cdot \cos \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \cdot \sin \frac{2\pi i}{N \cdot z_{od}} z, \quad (5.100)$$

де введено такі позначення: i – кількість членів ряду $i=1, n-1$; $n = \frac{(N+1)}{2}$; N – кількість рівновіддалених точок, якими розбивається оболонка вздовж твірної циліндра при розв'язку задачі про докритичний НДС; z_{od} – відстань між цими точками за координатою z в циліндричній системі координат, (рис. 1.1); $a_0^{\sigma_{rr}}$, $a_0^{\tau_{rz}}$, $a_0^{\tau_{r\theta}}$, $a_i^{\sigma_{rr}}$, $a_i^{\tau_{rz}}$, $a_i^{\tau_{r\theta}}$, $b_i^{\sigma_{rr}}$, $b_i^{\tau_{rz}}$, $b_i^{\tau_{r\theta}}$ – коефіцієнти тригонометричних рядів Фур'є, в які розкладаються відповідні компоненти напруженого стану $\sigma_{rr,j}^0$, $\tau_{rz,j}^0$, $\tau_{r\theta,j}^0$, $j=1 \div N$.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (5.92) з урахуванням (5.100) за допомогою співвідношень (5.99), отримаємо нескінченну систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda) \bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (5.101)$$

ТУТ $\bar{y} = \left\{ y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk} \right\}^T$ – розв'язуюча вектор-функція, T – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

До системи рівнянь (5.101) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_1; \quad (5.102)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_2, \quad (5.103)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (5.93).

Ненульові елементи матриці $T(r, \lambda)$, вони ж коефіцієнти при невідомих системи (5.101), приведені в додатку Б.

5.4. Застосування методу Бубнова – Гальоркіна для побудови чисельного розв'язку задачі стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок під дією крайового зсувного зусилля (крутного моменту) прикладеного до торця в просторовій постановці

Для розв'язку тривимірної задачі (5.92), у випадку крутного моменту, також скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі розв'язуючі функції в подвійні тригонометричні ряди Фур'є по координаті вздовж твірної циліндра z так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (2.34). При цьому врахуємо періодичність функцій за коловою координатою θ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \cos l_m z, \quad (5.104)\end{aligned}$$

де $y_{i, pk}, y'_{i, mk}$ ($i = \overline{1, 6}$) – коефіцієнти розкладання; p, m – хвильові числа в рядах Фур'є, $l_m = m\pi/L$, L – довжина твірної циліндра.

Аналогічно до попереднього, для врахування змінності докритичних напружень $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0$ та $\tau_{r\theta}^0$ за довжиною твірної оболонки скористаємося операцією дискретного перетворення Фур'є. Відповідно до неї представимо розподіл вздовж осі z докритичних значень $\sigma_{rr}^0, \tau_{rz}^0$ та $\tau_{r\theta}^0$, отриманих з використанням методу прямих (пункт 2.3.2), у вигляді рядів (5.100).

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (5.92) з урахуванням (5.100) за допомогою співвідношень (5.104), отримаємо нескінченну систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (5.105)$$

де $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}^T$ – розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

До системи рівнянь (5.105) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови на поверхнях оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_1; \quad (5.106)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_2. \quad (5.107)$$

Тут B_1, B_2 – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (5.93).

Ненульові елементи матриці $T(r, \lambda)$ отримуються з додатку Б (Б.1) шляхом заміни знаку перед l_p та l_m . При цьому функції $\varphi(p, m)$, $\varphi(m, p)$, $\varphi_2(p, m, i)$, $\varphi_3(p, m, i)$, $\varphi_4(p, m, i)$, $\varphi_5(p, m, i)$, $\varphi_6(p, m, i)$, $\varphi_7(p, m, i)$, $\varphi_8(p, m, i)$, $\varphi_9(p, m, i)$, що залежать від цілих чисельних параметрів p , m та i в (5.105) визначаються через залежності додатку А (А.2) та додатку Б (Б.2) так:

$$\begin{aligned} \varphi(p, m) &= \varphi(m, p); & \varphi(m, p) &= \varphi(p, m); \\ \varphi_2(p, m, i) &= \varphi_3(p, m, i); & \varphi_3(p, m, i) &= \varphi_2(p, m, i); & \varphi_4(p, m, i) &= \varphi_8(p, m, i); \\ \varphi_5(p, m, i) &= \varphi_7(p, m, i); & \varphi_6(p, m, i) &= \varphi_9(p, m, i); & \varphi_7(p, m, i) &= \varphi_5(p, m, i); \\ \varphi_8(p, m, i) &= \varphi_4(p, m, i); & \varphi_9(p, m, i) &= \varphi_6(p, m, i). \end{aligned} \quad (5.108)$$

5.5. Методика розв'язку систем рівнянь стійкості пружних анізотропних шаруватих циліндричних оболонок в просторовій постановці

Алгоритм розв'язку однорідної крайової задачі співпадає по виду з описаним в пункті 2.4 алгоритмом розв'язку неоднорідної крайової задачі тільки при прямому ході. Тому виконавши попередньо всі чисельні операції вказаного алгоритму, отримаємо в кінцевій точці інтегрування $r_i = r_2$ рівняння, які задовольняють граничні умови на зовнішній поверхні оболонки. Представимо аналогічно (2.46) розв'язок однорідних крайових задач в точці:

$$y(r_2, \lambda) = X(r, \lambda)c^n(r, \lambda). \quad (5.109)$$

Підставляючи (5.109) в, наприклад, (5.98), отримаємо:

$$B_2(r_2, \lambda)X(r_2, \lambda)c^n(r_2, \lambda) = 0. \quad (5.110)$$

Для знаходження нетривіального розв'язку, наприклад, задачі (5.96 ÷ 5.98) необхідно, щоб виконувалась умова:

$$\det = |B_2(r_2, \lambda)X(r_2, \lambda)| = 0, \quad (5.111)$$

яка дозволяє визначати власні числа задачі.

Таким чином, для однорідної крайової задачі, наприклад, (5.96 ÷ 5.98) необхідно знайти величину параметра стійкості λ , при якому задача має нетривіальний розв'язок $y \neq 0$. Для задач де кут повороту головних напрямів пружності матеріалу $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ це досягається шляхом зміни параметра λ . Нехай λ_1 – початкове значення критичного параметра навантаження, при якому умова (5.111) не виконується. Збільшуємо λ_1 на якусь наперед задану величину до тих пір, поки для двох наступних ітерацій λ визначник не буде змінювати знак. Тим самим знаходиться інтервал $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, в межах котрого методом пропорційного ділення відрізка уточнюється значення λ , яке є в цьому випадку критичним.

Для інших значень кута ψ , коли розглядається система диференціальних рівнянь стійкості з урахуванням анізотропних компонентів, визначник (5.111) є

знаконезмінною величиною $|\det|$. Тому методика, орієнтована на пошук нуля функції по ознаці зміни знака, повинна бути відповідним чином модифікована. Алгоритм пошуку критичного параметру λ такий самий, як при $\psi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, але збільшуємо λ_1 на якусь наперед задану малу величину до тих пір, поки для якоїсь ітерації λ визначник стрімко не зменшить власне значення на декілька порядків, а на наступній ітерації знову отримає значення визначника того ж порядку, який був до екстремального зменшення. Тим самим знаходиться інтервал $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, в межах котрого методом пропорційного ділення відрізка уточнюється значення λ , при якому визначник приймає найменше значення. Це значення $\lambda = \lambda_{cr}$ є в критичним.

При розв'язку крайових задач (5.96÷5.98), (5.101÷5.103) та (5.105÷5.107) кількість членів рядів відповідно (5.95), (5.99) та (5.104) за напрямком твірної z визначається шляхом порівняння результатів отриманих при послідовному збільшенні цих членів. Якщо різниця між розв'язками стає меншою заданої точності $\varepsilon = 0,1\%$, то процес збільшення кількості членів рядів припиняється.

5.6. Достовірність розв'язку задач стійкості пружних анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці

Обґрунтованість і достовірність отримуваних результатів забезпечується математичною коректністю постановки задач; застосуванням апробованих і обґрунтованих методів чисельного інтегрування при розв'язанні однорідних систем диференціальних рівнянь; збіжністю результатів при реалізації чисельного методу та контролем їх точності.

Для оцінки практичної збіжності чисельного методу визначення критичних навантажень для циліндричних оболонок були виконані співставлення результатів розрахунків з даними приведеними в дослідженнях інших авторів.

Тестування пропонованого підходу до розв'язку задач стійкості оболонок було проведено на прикладі розв'язку для циліндричної ортотропної оболонки [101], що знаходиться в умовах дії розподіленого бокового тиску отриманого на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Геометричні характеристики циліндра такі: $r = 0,6\text{м}$; $L = 1,2\text{м}$; $h = 0,024\text{м}$. Матеріал оболонки має такі фізико-механічні характеристики: $E_{zz}=1E_0$; $E_{\theta\theta}=1E_0$; $E_{rr}=0,5E_0$; $G_{z\theta}=0,1E_0$; $\nu_{z\theta} = 0,2$; $\nu_{r\theta}=0,3$; $\nu_{rz}=0,25$; $E_0=1000\text{МПа}$. Змінними параметрами приймалися модулі поперечного зсуву: $G_{r\theta}=G_{rz}=0,01E_0$; $G_{r\theta}=G_{rz}=0,02E_0$; $G_{r\theta}=G_{rz}=0,05E_0$; $G_{r\theta}=G_{rz}=0,2E_0$. Умови закріплення торців оболонки відповідають (5.94). Значення величин критичного тиску q_{cr} порівнюються в табл. 5.1.

Аналіз приведених в табл. 5.1 результатів, дає змогу констатувати співпадіння результатів розрахунку на стійкість ортотропної оболонки за двома підходами. Максимальна розбіжність між значеннями критичного тиску q_{cr} склала 2,8%.

Таблиця 5.1

Результати порівняння величин критичних навантажень q_{cr} розподіленого бокового тиску на циліндричну ортотропну оболонку

$G_{r\theta}=G_{rz}$	q_{cr} , МПа		Δ , %
	[101]	Пропонований підхід	
0,01 E_0	0,1212	0,1232	1,7
0,02 E_0	0,1316	0,1341	1,9
0,05 E_0	0,1381	0,1420	2,8
0,2 E_0	0,1428	0,1465	2,6

Результати визначення величин критичних навантажень розподіленого бокового тиску отриманих для анізотропних циліндричних оболонок згідно рівнянь просторової теорії пружності порівнювались із величинами отриманими згідно уточненої теорії [231]. Розглядалися оболонки: радіусом $R=0,6\text{м}$; довжиною $L=1,2\text{м}$; товщиною $h=0,03\text{м}$, фізико-механічними характеристиками матеріалу: $E_{zz}=19E_0$; $E_{\theta\theta}=12E_0$; $E_{rr}=4,5E_0$; $G_{z\theta}=3E_0$; $G_{r\theta}=G_{rz}=2,3E_0$; $\nu_{z\theta} = 0,15$; $\nu_{r\theta}=0,3$; $\nu_{rz}=0,07$; $E_0=100\text{МПа}$ під розподіленим

навантаженням $q = -q_0 \sin \frac{\pi z}{L}$. Умови закріплення торців оболонки відповідають (5.94). Результати для критичних навантажень та відповідної їм кількості хвиль в коловому напрямку для одношарових та двошарових оболонок, з перехресним укладанням шарів однакової товщини в залежності від кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ , представлені в табл. 5.2.

З аналізу результатів розрахунків, приведених в табл. 5.2, можливо зробити висновок про збіжність величин критичних навантажень бічного розподіленого тиску q_{cr} для анізотропної оболонки. Розходження між результатами не перевищує 5,8%.

Таблиця 5.2

Стійкість анізотропної циліндричної оболонки під розподіленим боковим тиском

ψ	Одношарова оболонка $h=0,03\text{м}$					Двошарова утворена перехресним укладанням шарів оболонка $h_1 = h_2 = h/2 = 0,015\text{м}$				
	Пропонований підхід		[231]		$\Delta, \%$	Пропонований підхід		[231]		$\Delta, \%$
	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}$	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}$		n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}$	n	$q_{cr} \cdot 10^{-4}, \text{МПа}$	
0	4	39,32	4	39,04	0,7	4	39,32	4	39,04	0,7
10	4	40,02	4	39,98	0,1	4	40,03	4	39,97	0,2
20	4	41,48	4	42,23	1,8	4	41,40	4	42,23	2,0
30	4	42,71	4	44,37	3,7	4	42,46	4	44,34	4,2
40	4	43,55	4	46,21	5,7	4	43,27	4	45,47	4,8
50	4	44,69	4	47,46	5,8	4	44,37	4	46,30	4,2
60	4	46,32	4	48,59	4,7	4	45,98	4	46,90	2,0
70	4	48,02	4	49,34	2,7	4	47,79	4	47,93	0,3
80	4	49,35	4	49,83	1,0	4	49,26	4	49,32	0,1
90	4	49,88	4	49,94	0,1	4	49,88	4	49,94	0,1

Тестування результатів розв'язку задач стійкості циліндричних оболонок з ортотропних матеріалів від дії осьового тиску, проведене на основі їх порівняння з даними [102] отриманими з використанням тривимірних рівнянь теорії пружності. Розглянуті оболонки: радіус серединної поверхні $R=0,6\text{м}$; довжина $L=2,15\text{м}$; фізико-механічні характеристики матеріалу: $E_{zz} = 10E_0$;

$$E_{\theta\theta} = 2,8E_0; E_{rr} = 10E_0; G_{z\theta} = 1,075E_0; G_{zr} = G_{\theta r} = 2E_0; \nu_{\theta z} = 0,3; \nu_{z\theta} = 0,084; \\ \nu_{r\theta} = 0,22; \nu_{rz} = 0,35; E_0 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ МПа.}$$

Аналіз представлених в табл. 5.3 результатів розрахунків показує, що величини критичних напружень та відповідна їм кількість хвиль в коловому напрямку (n) отриманих за пропонуваним підходом практично відповідають даним роботам [102], так як їх неспівпадіння не перевищує 2,2%.

Таблиця 5.3

Результати порівняння величин критичних осьових стискаючих напружень, що діють на циліндричну ортотропну оболонку

Товщина оболонки h , м	[102]		Пропонований підхід		Δ , %
	Кількість хвиль в коловому напрямку, n	Критичне значення напруження σ_{zz}^{cr} , МПа	Кількість хвиль в коловому напрямку, n	Критичне значення напруження σ_{zz}^{cr} , МПа	
0,012	6	$4,00 \cdot 10^4$	6	$3,93 \cdot 10^4$	1,8
0,020	5	$6,50 \cdot 10^4$	5	$6,38 \cdot 10^4$	1,9
0,025	4	$8,00 \cdot 10^4$	4	$7,83 \cdot 10^4$	2,2

Також результати розрахунку на стійкість за пропонуваним підходом були співставлені з даними, приведеними в роботі [265] та отриманими з використанням тривимірних рівнянь теорії пружності. При осьовому тиску досліджена стійкість циліндричної ортотропної одношарової оболонки з такими геометричними та механічними характеристиками: $L/r_2 = 5$, $E_{zz} = 14$ МПа,

$$E_{\theta\theta} = 57 \text{ МПа}, E_{rr} = 14 \text{ МПа}, G_{z\theta} = 5,7 \text{ МПа}, G_{zr} = 5 \text{ МПа}, G_{\theta r} = 5,7 \text{ МПа}, \\ \nu_{\theta z} = 0,068, \nu_{z\theta} = 0,277, \nu_{r\theta} = 0,068, \nu_{rz} = 0,4. \text{ Приведене значення критичної}$$

осьової стискаючої сили визначено формулою $\hat{P} = \frac{P}{\pi(r_2 - r_1) E_{zz} h}$, де h –

товщина оболонки, r_1 – радіус внутрішньої, r_2 – зовнішньої поверхні оболонки.

Результати розрахунку представлені в табл. 5.4.

Таблиця 5.4

Результати порівняння величин критичних осьових стискаючих сил діючих на циліндричну ортотропну оболонку

r_2/r_1	[265]		Пропонований підхід		$\Delta, \%$
	Кількість хвиль в коловому напрямку, n	Критичне значення, \hat{P}_{cr}	Кількість хвиль в коловому напрямку, n	Критичне значення, \hat{P}_{cr}	
1,05	2	0,6764	2	0,6427	5,2
1,10	2	0,6641	2	0,6129	8,4
1,15	2	0,6284	2	0,5614	11,9
1,20	2	0,6134	2	0,5435	12,9
1,25	1	0,5186	1	0,5135	1,0
1,30	1	0,4429	1	0,4571	3,1

Порівняння результатів, представлених в табл. 5.4, вказує на задовільний збіг величин критичних навантажень \hat{P}_{cr} , отриманих за пропонованим підходом у порівнянні з даними, що наведені в роботі [265], так як їх максимальна відмінність не перевищує 13%.

В роботі [321] представлено результати експериментального дослідження стійкості шаруватої циліндричної оболонки у випадку осьового тиску, виготовленої з композитного матеріалу CFPR T800-924. Шари композиту укладались під кутами $\psi = \pm 45^\circ$ до твірної циліндра. Розрахунок було здійснено з використанням скінченноелементної моделі та шляхом аналітичного розрахунку для отримання величини критичного навантаження. Геометричні параметри циліндра такі: $L=0,25\text{м}$, радіус $R=0,056\text{м}$. Оболонка виготовлена укладанням 4-х шарів композиту CFPR T800-924 загальною товщиною $h=0,0005\text{м}$ на оправу.

Механічні характеристики матеріалу CFPR T800-924: $E_{zz} = 0,161 \cdot 10^6 \text{МПа}$, $E_{\theta\theta} = 0,115 \cdot 10^5 \text{МПа}$, $\nu_{z\theta} = 0,349$, $G_{z\theta} = G_{zr} = 7,17 \cdot 10^3 \text{МПа}$, $G_{\theta r} = 7,0 \cdot 10^3 \text{МПа}$

Торці циліндра при випробовуванні були зафіксовані в обоймах, що при чисельному розрахунку моделюється як граничні умови типу жорсткого защемлення: $u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$.

В таблиці 5.5 представлені результати порівняння величин критичного навантаження для циліндричної оболонки згідно з експериментом і чисельним розрахунком в [321] з значеннями здобутими за пропонуваним підходом.

Таблиця 5.5

Критичні значення осьового тиску для циліндричної оболонки

N_{zz}^{cr} , кН		
Метод дослідження		
Чисельний МСЕ [321]	Експеримент [321]	Пропонований підхід
28,5 (4)	17,4	26,2 (5)

З таблиці 5.5 видно, що чисельний результат отриманий згідно пропонуваного підходу узгоджується з результатом експерименту краще ніж отриманий в роботі [321], неспівпадіння складає 35%.

Проведемо розрахунок анізотропної одношарової циліндричної оболонки, що знаходиться під осьовим тиском, за використанням розробленого в роботі підходу, який базується на співвідношеннях просторової теорії пружності та виконаємо співставлення з результатами, що отримані на основі методики представлені в [231]. Геометричні параметри оболонки такі: $L=1,2\text{м}$ $R=0,6\text{м}$ де L і R – відповідно довжина твірної і радіус циліндричної оболонки. В якості матеріалу шару вибрано однонапрямлений композит – склопластик товщиною $h=0,03\text{м}$. Механічні характеристики такого матеріалу: $E_{zz} = 0,445 \cdot 10^5 \text{МПа}$, $E_{\theta\theta} = 0,107 \cdot 10^5 \text{МПа}$, $\nu_{\theta z} = 0,26$, $\nu_{z\theta} = 0,0628$, $G_{z\theta} = G_{r\theta} = 0,418 \cdot 10^4 \text{МПа}$, $G_{rz} = 8,48 \cdot 10^4 \text{МПа}$.

В таблиці 5.6 представлені результати порівняння розрахунків на стійкість за використанням двох підходів: пропонуваним, що ґрунтується на співвідношеннях просторової теорії пружності та критичними значеннями, отриманими згідно [231].

Таблиця 5.6

Стійкість анізотропної циліндричної оболонки під осьовим тиском

ψ	[231]		Пропонований підхід		$\Delta, \%$
	n	$N_{zz}^{cr}, \text{МН}$	n	$N_{zz}^{cr}, \text{МН}$	
0	4	42,06	4	42,26	-0,5
10	4	36,07	4	36,03	0,1
20	4	34,70	4	34,04	1,9
30	3	33,83	3	32,73	3,4
40	3	35,66	3	34,36	3,8
50	3	42,45	3	40,51	4,8
60	3	44,63	1	43,65	2,3
70	2	44,09	2	43,72	0,8
80	4	41,67	4	41,30	0,9
90	4	41,28	4	41,33	-0,1

Порівнюючи приведені в табл. 5.6 значення величин критичних навантажень від осьового тиску можливо зробити висновок про задовільну узгодженість між результатами здобутими за цими підходами. Максимальне розходження між результатами складає 4,8%.

Визначимо величини критичних значень навантажень $S_{z\theta}^{cr}$ крайового зсуву для анізотропної циліндричної оболонки та співставимо їх із результатами, що отримані згідно приведеної в [31] методики. Оболонка має такі геометричні характеристики $L=1,0\text{м}$ $R=1,0\text{м}$, $h=0,03\text{м}$, де L , R та h – відповідно довжина твірної, радіус і товщина циліндричної оболонки. В якості матеріалу шару вибрано однонапрямлений композит – склопластик з такими механічними характеристиками: $E_{zz} = 0,445 \cdot 10^5 \text{МПа}$, $E_{\theta\theta} = 0,107 \cdot 10^5 \text{МПа}$, $\nu_{z\theta} = 0,26$, $G_{z\theta} = 0,418 \cdot 10^4 \text{МПа}$.

Результати порівняння розрахунків на стійкість від дії крайового зсувного зусилля при використанні двох підходів: пропонованого, що ґрунтується на співвідношеннях просторової теорії пружності та приведеного в [31] представлені в табл. 5.7.

Таблиця 5.7

Стійкість анізотропної циліндричної оболонки під дією крайового зсуву

ψ	Теорія [31]		Пропонований підхід		Δ , %
	n	МНм	n	МНм	
0	7	34,27	7	30,59	10,7
10	6	24,94	6	23,58	5,4
20	5	26,52	5	26,07	1,7
30	5	31,39	5	31,27	0,4
40	5	36,25	5	35,68	1,6
50	5	39,92	5	38,06	4,7
60	5	41,56	5	38,57	7,2
70	5	40,49	5	37,04	8,5
80	5	37,32	5	34,78	6,8
90	5	33,93	4	33,76	0,5

Аналіз приведених в табл. 5.7 результатів розрахунків, дозволяє стверджувати, що порівнювані величини критичних значень навантажень крайового зсуву отримані за двома підходами добре узгоджуються. Розбіжність між ними не перевищує 10,7%.

5.7. Висновки до розділу 5

В розділі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних теорії пружності анізотропного тіла, що записана в циліндричній системі координат.

Для розв'язку задачі стійкості циліндричних анізотропних оболонок використовується процедура методу Бубнова – Гальоркіна. Чисельна реалізація пропонованого підходу заснована на поєднанні методів Бубнова – Гальоркіна, дискретного перетворення Фур'є та дискретної ортогоналізації. Порівняння отриманих результатів із наведеними у літературі свідчить про задовільний збіг результатів розрахунку, що виконуються за пропонованим підходом.

РОЗДІЛ 6

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АНІЗОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

Виведена в п'ятому розділі система однорідних диференціальних рівнянь стійкості (5.92) та приведена там же методика її розв'язку дозволяють досліджувати стійкість анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій в тривимірній постановці. Зазначене пов'язане з встановленням параметрів, які описують стійкість циліндричних анізотропних оболонок з матеріалу з однією площиною пружної симетрії. При цьому, як відомо [10, 31, 225], форми втрати стійкості ускладнюються через те, що розтяг (стиск), згин та закручування відбуваються одночасно.

Дослідженню стійкості циліндричних анізотропних оболонок, що широко використовуються в промисловості, зокрема в аерокосмічній техніці, присвячена значна кількість робіт [31, 225, 318, 321]. Але все ще залишаються невстановлені питання щодо стійкості нетонких шаруватих анізотропних оболонок.

Розглянемо стійкість анізотропних циліндричних оболонок з використанням систем рівнянь (5.96), (5.101), (5.105), які побудовані відповідно до критерію Ейлера про існування в критичній точці суміжного рівноважного стану (явище біфуркації).

У випадках осьового стиску та кручення розглядатимуться склопластикові оболонки. Елементарний шар цього матеріалу у власних осях має такі характеристики: $E_{zz}=44,5E_0$; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0$; $G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0$; $G_{rz}=8,48E_0$; $\nu_{\theta z}=0,26$; $\nu_{z\theta}=0,0628$; $E_0=1000\text{МПа}$ [123]. У разі розподіленого бокового тиску – боропластикові оболонки з характеристиками матеріалу: $E_{zz}=280E_0$; $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$; $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$; $G_{rz}=21,2E_0$; $\nu_{\theta z}=0,25$; $\nu_{z\theta}=0,0277$; $E_0=1000\text{МПа}$ [123]. У випадку, коли головні напрямки пружності матеріалу шарів оболонки повернуті відносно твірної оболонки на деякий кут ψ , матеріал конструкції в системі її власних криволінійних осей координат проявляє властивості такого,

що має одну площину пружної симетрії. В цьому випадку співвідношення пружності мають вигляд (2.3). Присутні в них коефіцієнти c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} для кутів $\psi_i \neq 0^0, 90^0$ в загальному випадку не дорівнюють нулю.

Для кожного виду навантаження розглянемо стійкість шаруватих анізотропних нетонких циліндрів з відношенням $L/r=2$, де довжина вздовж твірної $L=1,2$ м з різним відношенням товщини h до радіусу серединної поверхні r . Закріплення торців відповідає умовам (5.94), (2.21), (2.34).

При реалізації задачі стійкості розглядатимемо два варіанти розрахункових моделей:

- пропонується підхід до розв'язку систем (5.96), (5.101), (5.105) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) та позначений як «АПР» (анізотропний просторовий розв'язок);

- підхід, що також використовує розроблену процедуру розв'язку (5.96), (5.101), (5.105), але відрізняється від першого тим, що в (2.3) механічні характеристики $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$ і позначений «ОПР» (ортотропний просторовий розв'язок).

Водночас зауважимо, що в даному розділі для всіх критичних значень зовнішніх навантажень визначались внутрішні напруження, які були порівняні із такими, що відповідають межі міцності матеріалу оболонкових конструкцій. В усіх розглядуваних в розділі 6 випадках циліндричні оболонки втрачатимуть несучу здатність шляхом втрати стійкості.

6.1. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією розподіленого зовнішнього бокового тиску

6.1.1. Вплив товщини на стійкість шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією розподіленого бокового тиску

6.1.1.1 Одношарова оболонка

У табл. 6.1 наведені величини критичних значень зовнішнього бокового розподіленого тиску $q = -q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$, для циліндричної оболонки з матеріалу боропластик з механічними характеристиками матеріалу: $E_{zz}=280E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=31E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=10,5E_0$, $G_{rz}=21,2E_0$, $\nu_{\theta z}=0,25$, $\nu_{z\theta}=0,0277$, $E_0=1000\text{МПа}$. Геометричні розміри оболонки такі: довжина вздовж твірної $L=1,2\text{м}$; радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$; з різним відношенням товщини пакету оболонки h до її радіусу серединної поверхні r (1/40; 1/30). Граничні умови на торцях відповідають умовам (5.94). Результати отримані при використанні двох підходів. В першому рядку приведені результати розрахунку на стійкість, що базуються на пропонованому підході до розв'язку системи (5.96) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) «АПР». Другим рядком приведені критичні значення здобуті у припущенні, що у (2.3) $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$ – підхід «ОПР». Величини критичних значень навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} знаходились при урахуванні в коловому напрямку параметра хвилеутворення k , який приведений в дужках. Окрім цього, в таблиці, у відсотках, дано похибку $\Delta(\%)$ для величин критичних значень зовнішнього бокового тиску, що вираховані за підходом «ОПР» по відношенню до «АПР».

Згідно з табл. 6.1 на рис. 6.1 в осях $q^{cr} - \psi$ представлені графічні залежності, що ілюструють вплив кута повороту головних напрямів пружності

матеріалу ψ на величини критичних значень розподіленого бокового тиску q^{cr} . Крива 1 – відображає критичні величини, здобуті за пропонованим підходом «АПР». Графік 2 отриманий за розрахунковим підходом «ОПР», що відрізняється від пропонованого лише тим, що механічні характеристики $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$. При цьому рис. 6.1 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що представляється відношенням $1/40$, рис. 6.1 (б) – $h/r=1/30$.

Таблиця 6.1

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} одношарової оболонки в МПа

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	2,29 (6)	2,54 (6)	3,17 (6)	3,84 (6)	4,55 (5)	5,37 (5)	6,25 (4)	6,72 (4)	7,31 (4)	7,66 (4)
ОПР	2,29 (6)	2,59 (6)	3,22 (6)	4,09 (6)	4,91 (5)	5,99 (4)	6,62 (4)	7,28 (4)	7,65 (4)	7,66 (4)
Δ , %	0,0	2,0	1,6	6,5	7,9	11,6	5,9	8,3	4,6	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	4,64 (5)	5,37 (5)	6,79 (6)	8,28 (6)	9,61 (5)	11,30 (5)	12,80 (4)	14,05 (4)	15,73 (4)	15,87 (3)
ОПР	4,64 (5)	5,51 (5)	6,94 (6)	8,72 (5)	10,79 (5)	12,34 (4)	14,07 (4)	15,70 (4)	16,65 (4)	15,87 (3)
Δ , %	0,0	2,6	2,2	5,3	12,3	9,2	9,9	11,7	5,8	0,0

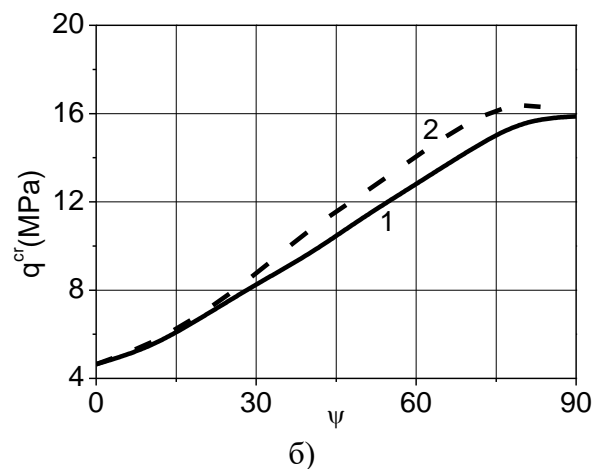
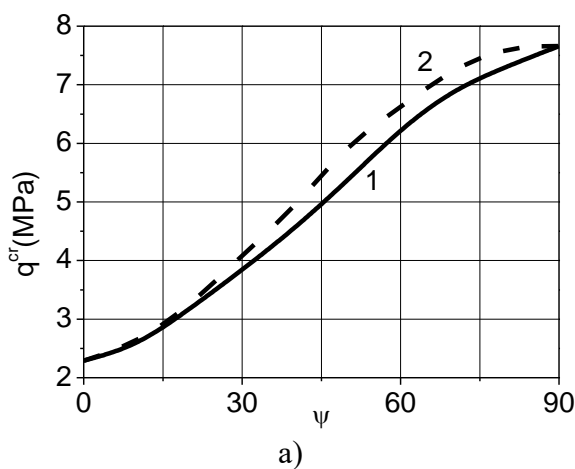


Рис. 6.1. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для одношарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз графіків представлених на рис. 6.1 та даних табл. 6.1 дозволяє зробити такі висновки. Для кожного з розглянутих випадків відношення товщини h до радіусу r значення критичних навантажень q^{cr} , при кутах $\psi = 0^0$ і 90^0 , знайдених за двома підходами «АПР» та «ОПР», є однаковими.

Також зауважимо, що для всіх розглянутих відношень h/r величини критичних навантажень q^{cr} для кутів $\psi \neq 0^0, 90^0$, знайдені згідно підходу «АПР» (криві 1), є меншими від критичних величин відшуканих згідно «ОПР» (криві 2). Причому їх максимальне розходження складає 12,3%. Причиною цього може бути те, що для кутів $\psi \neq 0^0, 90^0$ вплив напружень $\tau_{z\theta}$ та $\tau_{r\theta}$, які можливо обчислити лише при урахуванні анізотропних механічних характеристик c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} є суттєвим, як це видно з табл. 2.12, та таким, що приводить до зменшення критичних величин q^{cr} .

Вкажемо також на таке. Зростання кута армування ψ , в розглядуваних межах, від 0^0 до 90^0 , веде до зміни величин критичних значень бокового тиску q^{cr} . Це стосується обох розглядуваних підходів до розрахунку «АПР» та «ОПР» при всіх відношеннях h/r . Так для оболонок з $h/r=1/40$ значення q^{cr} при $\psi = 0^0$ є меншими ніж при $\psi = 90^0$ за підходом «АПР» у понад 3 рази і так само для відношення $h/r=1/30$.

6.1.1.2. Двошарова оболонка

В табл. 6.2 представлені результати розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок з механічними та геометричними характеристиками такими ж як і в підпункті 6.1.1.1. Умови закріплення торців та навантаження такі ж. Відмінність в кількості шарів. В табл. 6.2 представлені значення критичних навантажень зовнішнього бокового розподіленого тиску q^{cr} , отриманих для циліндрів з двома симетрично розташованими, відносно

серединної поверхні, шарами однакової товщини, але орієнтованими під кутами $\pm \psi$ до твірної оболонки, рис. 6.2. Структура табл. 6.2 відповідає табл. 6.1.

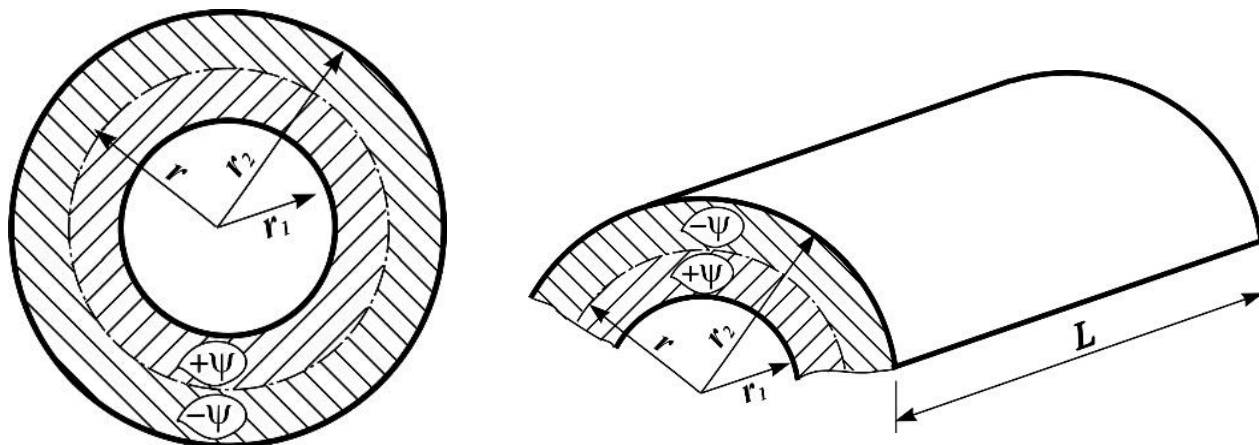


Рис. 6.2. Структура симетричного відносно серединної поверхні шаруватого (двошарового) пакету оболонки

Таблиця 6.2

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} для двошарової оболонки в МПа

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	2,29 (6)	2,49 (6)	2,86 (6)	3,10 (6)	3,28 (5)	3,74 (4)	4,21 (4)	5,18 (4)	6,20 (4)	7,66 (4)
ОПР	2,29 (6)	2,59 (6)	3,22 (6)	4,09 (6)	4,91 (5)	5,99 (4)	6,62 (4)	7,28 (4)	7,65 (4)	7,66 (4)
Δ , %	0,0	4,0	12,6	31,9	49,7	60,2	57,2	40,5	23,4	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	4,64 (5)	5,26 (5)	5,85 (6)	6,46 (5)	7,10 (5)	7,72 (4)	9,14 (4)	10,43 (4)	12,59 (4)	15,87 (3)
ОПР	4,64 (5)	5,51 (5)	6,94 (6)	8,72 (5)	10,79 (5)	12,34 (4)	14,07 (4)	15,70 (4)	16,65 (4)	15,87 (3)
Δ , %	0,0	4,8	18,6	35,0	52,0	59,8	53,9	50,5	32,2	0,0

На основі даних табл. 6.2 на рис. 6.3 представлені графіки залежності величин критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} від кута ψ .

Рис. 6.3 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з

відношенням $h/r=1/40$, рис. 6.3 (а) – $h/r=1/30$. Позначення та орієнтування кривих рис. 6.3 відповідає приведеному на рис. 6.1.

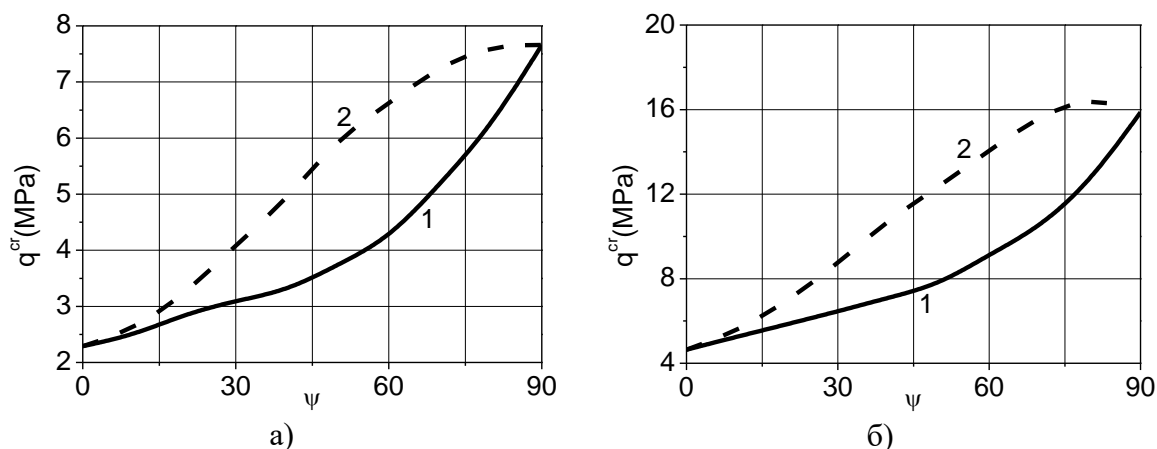


Рис. 6.3. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для двошарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АБР; 2 – ОРП

Зауважимо, що кривою 1 описано зовнішній боковий критичний тиск q^{cr} визначений за підходом «АБР». Графіком 2 зображено величини критичних значень для ортотропної оболонки, підхід «ОРП».

Аналізуючи приведені на рис. 6.3 графіки вкажемо, що криві 2, які описують ортотропний підхід до розрахунку двошарових анізотропних циліндричних оболонок, відповідають кривим 2 на рис. 6.1 для одношарових.

Зауважимо, що згідно до табл. 6.1 та 6.2 двошарові циліндричні оболонки сприймають значно менші величини критичних навантажень у порівнянні із одношаровими. Розходження складає в межах від 4% до 60,2% у порівнянні з ортотропними оболонками. Причиною цього є різниця між докритичними напружено-деформованими станами одношарових та двошарових оболонок на що вказують результати представлені на рис. 2.22-2.27. В двошаровій циліндричній оболонці в порівнянні з одношаровою інакше відбувається перерозподіл напружено-деформованого стану. Особливо на це вказують величини дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ за товщиною цих конструкцій.

6.1.1.3. Тришарова оболонка

Табл. 6.3 представляє залежність критичних навантажень бокового тиску q^{cr} тришарових циліндричних оболонок від товщини та кута армування ψ волокнистого композиту боропластика. Механічні та геометричні характеристики, умови закріплення торців аналогічні розглядуваним в підпункті 6.1.1.1. Шари з яких складено оболонки однакової товщини та орієнтовані під кутами $\pm\psi$ до напрямку твірної оболонок. Відповідно шаруватий пакет є несиметричним відносно серединної поверхні циліндра, причому внутрішній шар повернутий на кут « $+\psi$ », рис. 6.4. Структура заповнення табл. 6.3 відповідає табл. 6.1.

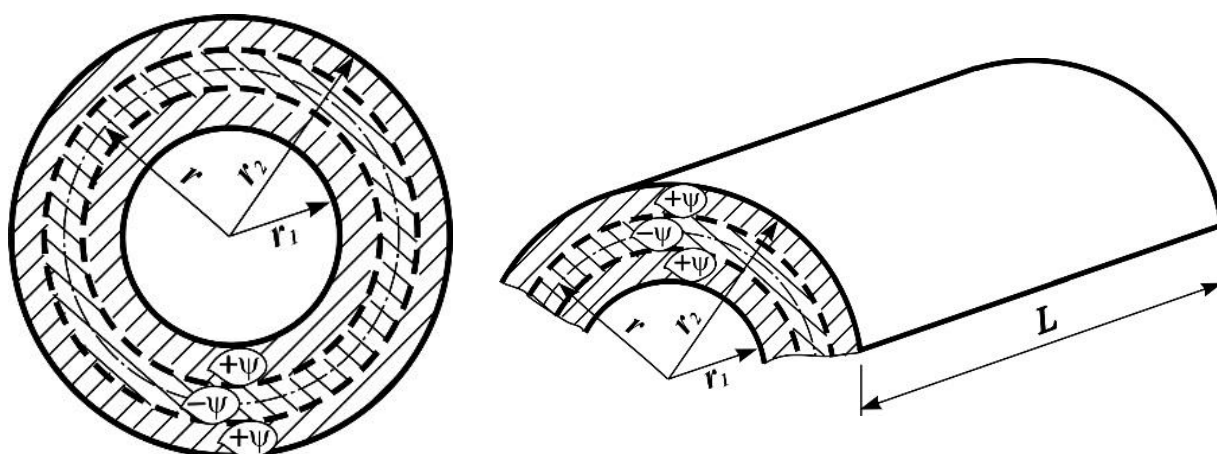


Рис. 6.4. Структура несиметричного відносно серединної поверхні шаруватого (тришарового) пакету оболонки

Скориставшись результатами знаходження величин критичних навантажень бокового тиску q^{cr} , що приведені в табл. 6.3, побудовано графіки залежності q^{cr} від ψ для різних відношень h/r товщини до радіусу циліндричних оболонок. На рис. 6.5 (а) – $h/r=1/40$, рис. 6.5 (б) – $h/r=1/30$. Позначення і структура рис. 6.5 відповідає представленому на рис. 6.1.

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} для тришарової оболонки в МПа

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	2,29 (6)	2,53 (6)	3,12 (6)	3,80 (6)	4,57 (5)	5,39 (5)	6,26 (4)	6,90 (4)	7,36 (4)	7,66 (4)
ОПР	2,29 (6)	2,59 (6)	3,22 (6)	4,09 (6)	4,91 (5)	5,99 (4)	6,62 (4)	7,28 (4)	7,65 (4)	7,66 (4)
Δ , %	0,0	2,4	3,2	7,6	7,4	11,1	5,8	5,5	3,9	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	4,64 (5)	5,37 (5)	6,57 (6)	8,15 (6)	9,61 (5)	11,51 (5)	12,90 (4)	14,51 (4)	15,86 (4)	15,87 (3)
ОПР	4,64 (5)	5,51 (5)	6,94 (6)	8,72 (5)	10,79 (5)	12,34 (4)	14,07 (4)	15,70 (4)	16,65 (4)	15,87 (3)
Δ , %	0,0	2,6	5,6	7,0	12,3	7,2	9,1	8,2	5,0	0,0

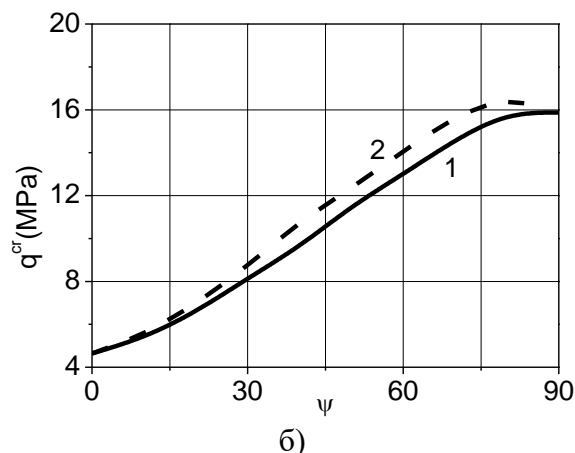
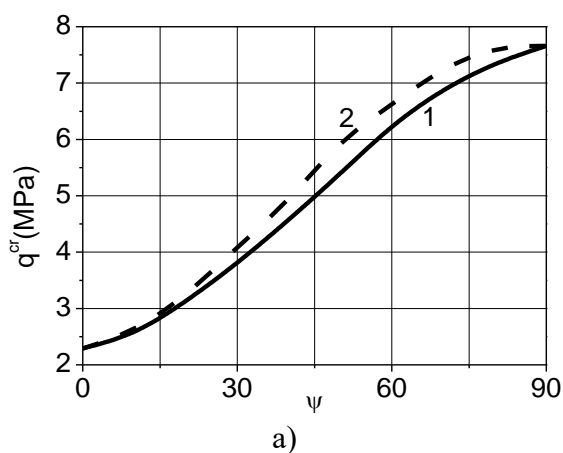


Рис. 6.5. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для тришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу графіків, приведених на рис. 6.5, вкажемо на таке. Збільшення кількості шарів до трьох не впливає на результати здобуті з використанням ортотропного підходу до розрахунку. Криві 2 не змінюються порівняно із одно- (рис. 6.1) та двошаровими (рис. 6.3) оболонками, що отримані згідно з табл. 6.1 та 6.2 відповідно.

З табл. 6.2 та 6.3 видно, що величини критичних навантажень бокового тиску q^{cr} здобуті для тришарових оболонок більші за отримані для

двошарових. У випадку тришарового несиметричного пакету, вони змінюються в межах від 2,4% до 12,3% при порівнянні підходів «АПР» з «ОПР».

6.1.1.4. Чотиришарова оболонка

На рис. 6.6 та в табл. 6.4 показані результати розрахунків на стійкість циліндричних чотиришарових анізотропних оболонок під дією розподіленого бокового тиску. Геометричні та механічні параметри розглядуваних конструкцій аналогічні наведеним в підпунктах 6.1.1.1-6.1.1.3. Умови закріплення торців такі самі. При цьому оболонки складено з чотирьох симетричних відносно їх серединної поверхні, перехресно-розташованих під кутами $\pm \psi$ шарів однакової товщини, які утворюють пакет типу рис. 6.2. Рис. 6.6 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/40$, рис. 6.6 (б) – $h/r=1/30$. Структура і позначення табл. 6.4 і рис. 6.6 збережені відповідними приведеним в підпункті 6.1.1.1.

Таблиця 6.4

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} для чотиришарової оболонки в МПа

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	2,29 (6)	2,43 (6)	2,99 (6)	3,75 (6)	4,47 (5)	5,43 (4)	6,01 (4)	6,65 (4)	7,16 (4)	7,66 (4)
ОПР	2,29 (6)	2,59 (6)	3,22 (6)	4,09 (6)	4,91 (5)	5,99 (4)	6,62 (4)	7,28 (4)	7,65 (4)	7,66 (4)
Δ , %	0,0	6,6	7,7	9,1	9,8	10,3	10,1	9,5	6,8	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	4,64 (5)	5,15 (5)	6,42 (6)	7,98 (5)	9,80 (5)	11,15 (4)	12,74 (4)	14,31 (4)	15,84 (4)	15,87 (3)
ОПР	4,64 (5)	5,51 (5)	6,94 (6)	8,72 (5)	10,79 (5)	12,34 (4)	14,07 (4)	15,70 (4)	16,65 (4)	15,87 (3)
Δ , %	0,0	7,0	8,1	9,3	10,2	10,7	10,4	9,8	5,1	0,0

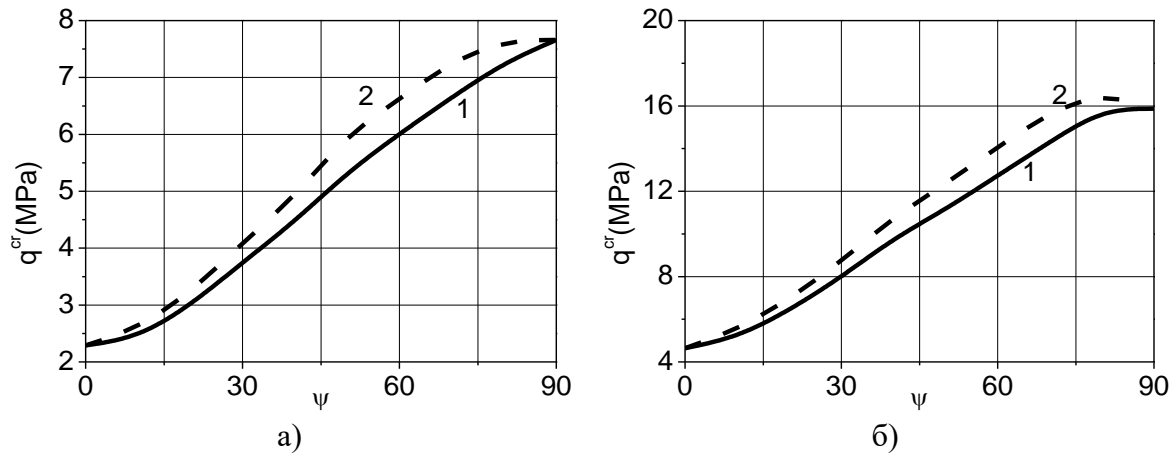


Рис. 6.6. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для чотиришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу величин критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} чотиришарових циліндричних оболонок (рис. 6.6) видно. Криві 2, які характеризують ортотропний підхід «ОПР» до розрахунку анізотропних оболонок, не змінили свою конфігурацію і залишилися тотожними кривим 2 одно-, дво- та тришарових циліндрів на рис. 6.1, 6.3, 6.5.

Величини критичних навантажень q^{cr} (криві 1), що характеризують підхід «АПР» до розрахунку симетричного пакету чотиришарової анізотропної оболонки, є більшими за отримані для двошарового симетричного пакету (рис. 6.3) та близькими до тришарового несиметричного (рис. 6.5). Розходження між критичними значеннями, отриманими на основі підходів «АПР» та «ОПР», при чотирьох шарах змінюються залежно від відношення h/r від 5,1% до 10,7%.

6.1.1.5. Восьмишарова оболонка

Результати обчислення критичних навантажень бокового тиску q^{cr} і відповідна їм кількість хвиль в коловому напрямку (k) приведені для восьмишарового пакету циліндричних оболонок в табл. 6.5. Геометричні та механічні характеристики конструкцій, а також умови закріплення торців такі ж, як в підпункті 6.1.1.1. Оболонки утворено відповідною кількістю шарів,

причому восьмишарові пакети утворюють симетричну відносно середньої поверхні оболонки структуру, типу представленої на рис. 6.2. Внутрішній шар повернуто на кут « $+\psi$ ». Структура та позначення табл. 6.5 аналогічні приведеним в підпункті 6.1.1.1.

Таблиця 6.5

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} для восьмишарової оболонки в МПа

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	2,29 (6)	2,58 (6)	3,21 (6)	4,07 (6)	4,88 (5)	5,95 (4)	6,55 (4)	7,23 (4)	7,61 (4)	7,66 (4)
ОПР	2,29 (6)	2,59 (6)	3,22 (6)	4,09 (6)	4,91 (5)	5,99 (4)	6,62 (4)	7,28 (4)	7,65 (4)	7,66 (4)
Δ , %	0,0	0,4	0,3	0,5	0,6	0,7	1,1	0,7	0,5	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	4,64 (5)	5,50 (5)	6,92 (6)	8,67 (5)	10,70 (5)	12,22 (4)	13,92 (4)	15,56 (4)	16,55 (4)	15,87 (3)
ОПР	4,64 (5)	5,51 (5)	6,94 (6)	8,72 (5)	10,79 (5)	12,34 (4)	14,07 (4)	15,70 (4)	16,65 (4)	15,87 (3)
Δ , %	0,0	0,2	0,3	0,6	0,8	1,0	1,1	0,9	0,6	0,0

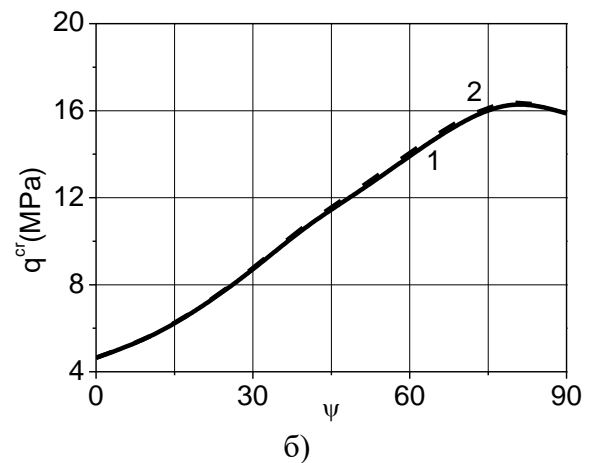
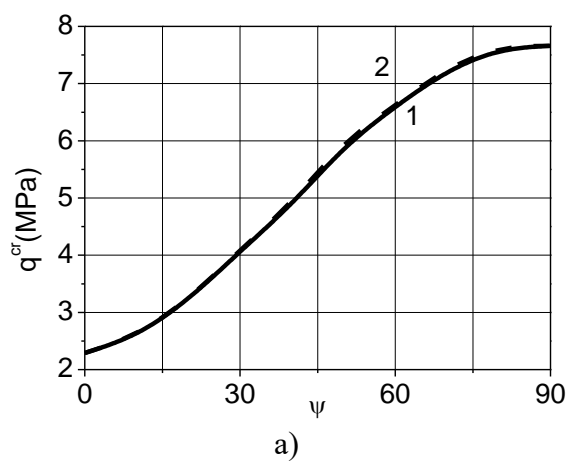


Рис. 6.7. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для восьмишарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Результати табл. 6.5 для восьмишарового структурного пакету представлено у вигляді графіків на рис. 6.7 в осях q^{cr} (критичні навантаження бокового тиску) – ψ (кут повороту головних напрямів пружності матеріалу) для таких

відношень товщини до радіусу h/r : рис. 6.7 (а) – $h/r=1/40$, рис. 6.7 (б) – $h/r=1/30$. Позначення та структура рис. 6.7 ідентичні наведеним в підпункті 6.1.1.1.

Аналізуючи приведені в табл. 6.5 та на рис. 6.7 результати визначення критичних значень розподіленого бокового тиску шаруватих оболонок вкажемо на таке. Критичні величини навантажень бокового розподіленого тиску q^{cr} отримані за використанням ортотропного підходу до розрахунку «ОПР» (крива 2) восьмишарових анізотропних циліндричних оболонок не змінилися у порівнянні із розглядуваними структурними пакетами конструкцій, в попередніх підпунктах, за цим же підходом. З табл. 6.5 та рис. 6.7 випливає, що із збільшенням кількості шарів до восьми, несна здатність оболонок з точки зору втрати стійкості зростає і наближається до результатів «ортотропного розрахунку» «ОПР».

При восьми шарах (табл. 6.5 та рис. 6.7) критичні навантаження q^{cr} визначені з урахуванням анізотропних механічних характеристик матеріалу (криві 1 – підхід «АПР») хоча і залишаються меншими, але практично співпадають з величинами q^{cr} , що здобуті за використанням підходу «ОПР» (криві 2). Згідно результатів приведених в табл. 6.7 максимальна розбіжність між ними не перевищує 1,1%. Причину цього можливо пояснити даними табл. 2.14 та рис. 2.32. Збільшення кількості перехресно розташованих шарів однакової товщини призводить до того, що, наприклад, дотичні напруження $\tau_{z\theta}$, які можливо визначити лише за використанням підходу «АПР», стають практично рівними за абсолютними значеннями, але протилежними за знаками в сусідніх шарах. Таким чином дотичні напруження $\tau_{z\theta}$, що визначаються у випадку розподіленого бокового тиску, лише при врахуванні анізотропних констант матеріалу c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} (підхід «АПР»), врівноважують самі себе, своїми додатними та від'ємними значеннями, за товщиною структурного пакету.

Зменшення розбіжності між результатами здобутими згідно підходів «АПР» та «ОПР» підтверджує також описаний в [31] факт. Для розглядуваних анізотропних циліндричних оболонок збільшення кількості перехресно укладених шарів пакету до 7-8 та більше, призводить до можливості розрахунку на стійкість таких оболонок за «ОПР» підходом.

6.1.2. Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів

На рис. 6.8, на основі даних табл. 6.1-6.5, представлено результати дослідження критичних значень q^{cr} для анізотропних циліндричних оболонок в залежності від кількості перехресно укладених шарів та кута повороту головних напрямів пружності матеріалу до твірної оболонки при відношенні довжини до радіуса $L/r=2$. Закріплення торців циліндра відповідає розглянутому в попередніх підрозділах. Рис. 6.8 (а) описує анізотропну оболонку з відношенням товщини до радіуса $h/r=1/40$, рис. 6.8 (б) – $h/r=1/30$.

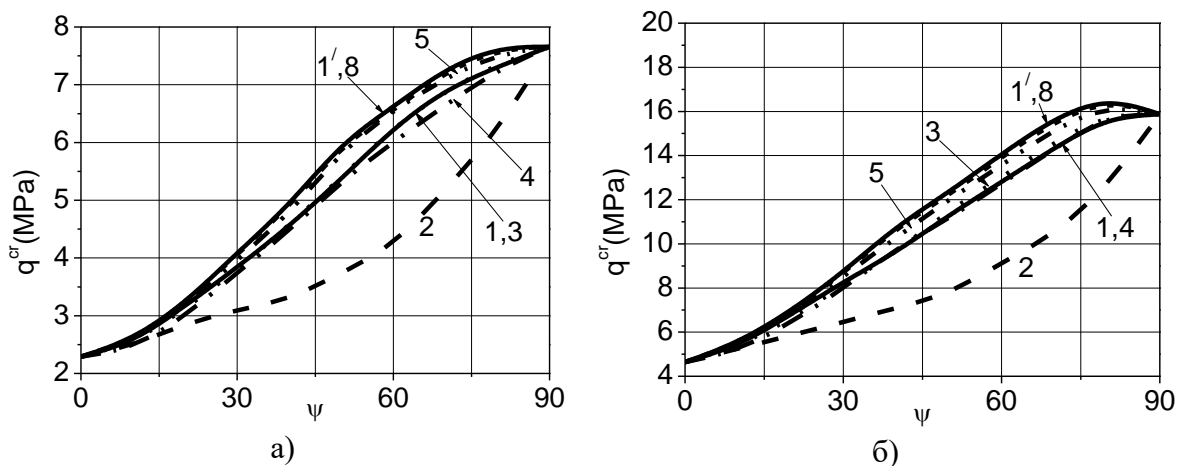


Рис. 6.8. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для одно- (1), дво- (2), три- (3), чотири- (4), п'яти- (5) восьмишарової (8) оболонки та результати отримані на основі підходу «ОПР» (1') $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б)

Крива 1 представляє величини критичних навантажень для одношарової оболонки. Графік 2 описує результати дослідження на стійкість двошарового

циліндра ψ , крива 3 – тришарового, 4 – чотиришарового, 5 – п'ятишарового та 8 – восьмишарового. Всі ці результати отримані згідно методики «АПР». Крива 1' зображає результати визначення критичних навантажень для анізотропної оболонки згідно підходу «ОПР». На рис. 6.8, задля уникнення нагромаджень, не відображені результати розрахунку семишарових оболонок у зв'язку із їх близькістю до величин критичних навантажень для восьмишарового пакету та для здобутих згідно підходу «ОПР».

Відштовхуючись від результатів приведених на рис. 6.8, можливо зробити висновки. Криві 2, що представляють результати дослідження стійкості двошарових оболонкових конструкцій сприймають найменші величини критичних навантажень розподіленого бокового тиску. Випадки одно- (криві 1) та тришарового (криві 3) пакетів дають достатньо близькі між собою результати, максимальна розбіжність не перевищує 5,3%. Криві 5, що характеризують п'ятишаровий структурний пакет оболонки є ближчими за результатами до підходу «ОПР» (криві 1') ніж пакети з меншою кількістю шарів. Збільшення кількості шарів до восьми (крива 8) призводить до максимального наближення величин критичних навантажень q^{cr} здобутих за підходом «АПР» до результатів ортотропного підходу «ОПР» (крива 1').

6.1.3. Дослідження стійкості шаруватих анізотропних циліндричних оболонок з функціонально-градієнтних матеріалів

Рис. 6.9 графічно представляє результати (табл. 6.6) дослідження величин критичних навантажень розподіленого бокового тиску анізотропних циліндричних оболонок з волокнистого композиту боропластика з зовнішнім шаром функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). В якості ФГМ вибрано два склади матеріалів: перший – кераміко-металевий з характеристиками матеріалу описаними в пп. 3.5.2, другий – нанокерамічний ФГМ, представлений в пп. 3.5.3.

Для обох типів оболонок прийнято, що циліндр складено з двох шарів: внутрішнього з координатами поверхонь $r_1=0,5925\text{м}$, $r_{11}=0,6025\text{м}$ – з боропластика та зовнішнього шару з координатами за товщиною $r_{02}=0,6025\text{м}$, $r_2=0,6075\text{м}$ – з ФГМ. Довжина оболонки уздовж твірної: $L=1,2\text{м}$, радіус серединної поверхні $r=0,6\text{м}$, відношення повної товщини оболонки h до радіусу її серединної поверхні $h/r=1/40$. Температурне поле прийнято незмінним для всієї оболонкової конструкції і має значення 293°К (20°C).

Умови на торцях відповідають умовам (5.94). Результати отримано при використанні двох підходів. В першому рядку приведені результати розрахунку стійкості, що базуються на пропонованому підході до розв’язку системи (5.96) з урахуванням закону Гука у формі (2.3) «АПР». Другим рядком приведені критичні значення q^{cr} здобуті у припущенні, що в залежностях (2.3) $c_{16}=c_{26}=c_{36}=a_{45}=0$ – підхід «ОПР». Структура таблиці 6.6 аналогічна табл. 6.1.

Таблиця 6.6

Величини критичних навантажень зовнішнього бокового тиску q^{cr} для з шаром ФГМ

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
<i>Анізотропна оболонка із шаром кераміко-металевого ФГМ</i>										
АПР	4,49 (5)	4,61 (5)	5,03 (5)	5,57 (5)	6,58 (5)	7,84 (5)	8,84 (5)	9,74 (5)	10,05 (4)	10,34 (4)
ОПР	4,49 (5)	4,79 (5)	5,21 (5)	5,58 (5)	6,60 (5)	8,35 (5)	10,10 (5)	11,00 (4)	10,69 (4)	10,34 (4)
Δ , %	0,0	3,9	3,6	0,2	0,3	6,5	14,3	12,9	6,4	0,0
<i>Анізотропна оболонка із шаром нанокерамічного ФГМ</i>										
АПР	5,29 (6)	5,35 (6)	5,89 (6)	6,78 (5)	7,98 (5)	9,52 (5)	11,07 (5)	12,36 (5)	13,34 (5)	14,04 (5)
ОПР	5,29 (6)	5,48 (6)	6,02 (6)	6,88 (5)	8,12 (5)	10,06 (5)	12,13 (5)	13,52 (5)	14,00 (5)	14,04 (5)
Δ , %	0,0	2,4	2,2	1,5	1,8	5,7	9,6	9,4	4,9	0,0

Згідно з табл. 6.6 на рис. 6.9 в осях $q^{cr} - \psi$ представлені графічні залежності, що демонструють вплив кута повороту головних напрямів пружності матеріалу ψ на величини критичних навантажень q^{cr} , отримані згідно підходу «АПР»

Крива 1 – відображає критичні значення отримані для випадку суцільної одношарової боропластикової оболонки з відношенням $h/r=1/40$ згідно результатів табл. 6.1. Графіки 2 та 3 ілюструють результати критичних навантажень бокового тиску для оболонок з боропластику із шаром відповідно кераміко-металевого та нанокерамічного ФГМ.

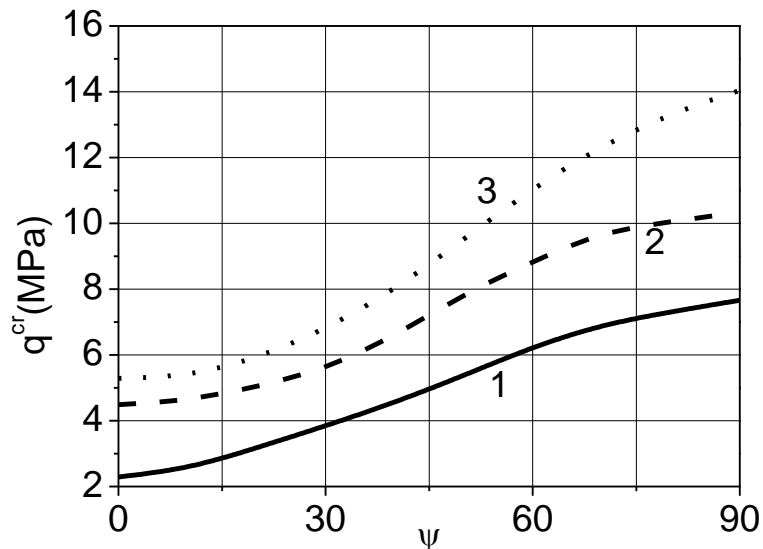


Рис. 6.9. Величини критичних навантажень зовнішнього тиску q^{cr} для боропластикової (1), боропластикової з шаром кераміко-металевого ФГМ (2), боропластикової з шаром нанокерамічного ФГМ (3) оболонки

Аналіз результатів визначення критичних величин зовнішнього бокового тиску та відповідних їм параметрів хвилеутворення в коловому напрямку дозволяє зробити такі висновки. Величини критичних навантажень q^{cr} як для суцільних боропластикових, так і для боропластикових із шарами ФГМ залежать від зміни кута повороту ψ головних напрямів пружності матеріалу. При цьому, незалежно від структури за товщиною оболонки, найбільші значення q^{cr} для розглянутих умов закріплення мають місце при $\psi = 90^0$.

При цьому оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ уздовж всієї числової осі ψ мають найбільші критичні навантаження q^{cr} порівняно із іншими двома типами конструкцій, а найменші мають місце для суцільної боропластикової конструкції. Розбіжність між величинами критичних навантажень q^{cr} для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із

суцільною боропластиковою знаходиться в межах 57% і порівняно із боропластиковою із шаром кераміко-металевого ФГМ не перевищує 49%.

6.2. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску

6.2.1. Вплив товщини на стійкість шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску

6.2.1.1 Одношарова оболонка

У табл. 6.7 приведені величини критичних значень осьових стискаючих навантажень N_{zz}^{cr} одношарової циліндричної оболонки, що виготовлена з склопластику з такими фізико-механічними характеристиками: $E_{zz}=44,5E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0$, $G_{rz}=8,48E_0$, $\nu_{\theta z}=0,26$, $\nu_{z\theta}=0,0628$, $E_0=1000$ МПа. Її геометричні параметри: довжина твірної $L=1,2$ м; радіус серединної поверхні $r=0,6$ м; відношення товщини оболонки h до радіуса r (1/40; 1/30). Граничні умови на торцях відповідають приведеним в (2.21). Результати розрахунків отримані при використанні двох підходів. В першому рядку таблиці приведені результати розрахунку на стійкість, що спираються на просторовий підхід «АПР» розв'язку системи (5.101). При цьому в ній використано закон Гука (2.3), в якому враховані коефіцієнти c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} , тобто матеріал оболонки є анізотропним. У другому рядку приведені критичні значення навантажень знайдені при використанні підходу «ОПР», тому в (2.3) коефіцієнти $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$ і тому матеріал – ортотропний. Величини критичних значень навантажень N_{zz}^{cr} знаходились при урахуванні в коловому напрямку параметра хвилеутворення k , який приведений в дужках. Окрім цього, в таблиці, у відсотках, дано похибку Δ (%) для величин критичних значень

навантажень від осьового тиску, що вираховані за підходом «ОПР» по відношенню до «АПР».

Таблиця 6.7

Величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} (МН) одношарової оболонки при осьовому тиску

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	11,06 (5)	8,14 (5)	7,09 (4)	6,71 (4)	7,47 (4)	9,86 (4)	10,97 (1)	11,04 (3)	10,46 (6)	11,04 (6)
ОПР	11,06 (5)	12,49 (6)	15,40 (4)	13,80 (1)	12,70 (1)	12,65 (1)	13,63 (1)	15,12 (1)	12,31 (6)	11,04 (6)
Δ , %	0,0	53,4	117,3	105,6	70,0	28,3	24,3	37,0	17,6	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	19,26 (5)	14,68 (4)	12,83 (4)	12,76 (4)	14,64 (4)	17,70 (3)	19,27 (1)	19,50 (3)	18,39 (5)	19,08 (5)
ОПР	19,26 (5)	21,57 (5)	25,54 (4)	24,29 (1)	22,42 (1)	22,32 (1)	24,40 (1)	23,52 (3)	21,32 (5)	19,08 (5)
Δ , %	0,0	46,9	99,1	90,4	53,1	26,1	26,6	20,6	15,9	0,0

Відповідно до табл. 6.7 на рис. 6.10 в осях N_{zz}^{cr} - ψ представлені графіки, що характеризують вплив кута ψ на величини критичних значень навантажень N_{zz}^{cr} від осьового тиску. Криві 1 – представляють критичні навантаження, отримані за підходом «АПР». Графіки 2 побудовано за - «ОПР». При цьому, рис. 6.10 (а) представляє результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що характеризується відношенням 1/40, рис. 6.10 (б) – $h/r=1/30$.

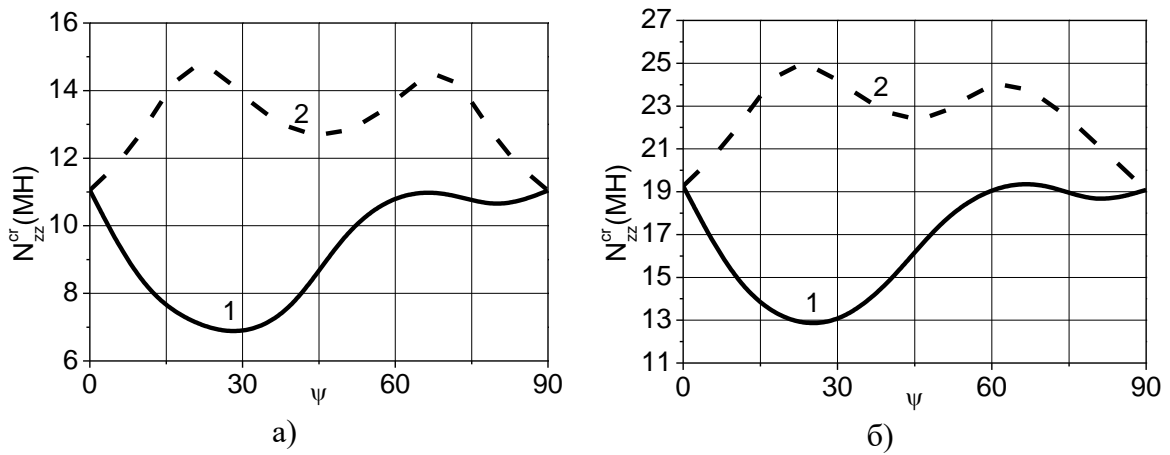


Рис. 6.10. Величини критичних навантажень осевого тиску N_{zz}^{cr} для одношарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз даних табл. 6.7 та графіків на рис. 6.10 дозволяє зробити такі висновки.

З порівняння результатів розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонок, що знаходяться під дією осевого стискаючого навантаження, отриманих за підходом «АПР» (криві 1) та ортотропним «ОПР» (криві 2), витікає таке. Для одношарових циліндричних оболонок використання підходу «АПР» призводить до отримання менших величин критичних навантажень N_{zz}^{cr} для всіх розглядуваних значень ψ в порівнянні з «ОПР». Причому, величини розбіжностей між цими результатами зменшуються із збільшенням товщини оболонки. Так, якщо для відношення $h/r=1/40$ максимальне розходження між порівнюваними величинами досягає 117%, то для $h/r=1/30$ воно складає 99%. Такі суттєві відмінності між результатами здобутими за використанням підходів «АПР» та «ОПР» можливо пояснити так. В підході «АПР» відбувається врахування всіх компонентів напружень та переміщень при розв'язку задачі докритичного напружено-деформованого стану (розділ 2, табл. 2.15) та стійкості: σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$, u_r , u_z , u_θ . Це обумовлено використанням в законі Гука (2.3) коефіцієнтів c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} , які не рівні нулеві. В той же час при використанні підходу «ОПР» напруження $\tau_{r\theta}$, $\tau_{z\theta}$ та переміщення u_θ рівні нулю.

Аналізуючи графіки, отримані за підходом «АПР», стосовно впливу на величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} від осьового тиску кута повороту осей ортотропії ψ , зауважимо. Мінімальні значення N_{zz}^{cr} мають місце в діапазоні зміни кута ψ в межах $20^0 \leq \psi \leq 30^0$. Розбіжність між вирахованими для цього діапазону зміни кута ψ критичними навантаженнями N_{zz}^{cr} у порівнянні з такими ж здобутими при $\psi = 0^0$ також залежить від відношення h/r і зменшується від 39% для $h/r=1/40$ до 33% для $h/r=1/30$. При подальшому збільшенні кута ψ критичні навантаження змінюються. Так для $h/r=1/40$ навантаження N_{zz}^{cr} в діапазоні $60^0 \leq \psi \leq 90^0$ менші в межах 5,4%, порівняно із такими при $\psi = 0^0$. Водночас, для $h/r=1/30$ максимальні величини N_{zz}^{cr} мають місце при $\psi = 70^0$, де вони більші, за отримані при $\psi = 0^0$ на 1,2%.

Також зауважимо стосовно кривих 2. Відомо, що вони отримані при використанні ортотропного підходу «ОПР» до розрахунку просторових оболонкових конструкцій. Їх аналіз вказує на те, що максимальні величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} від осьового тиску мають місце для кута $\psi = 20^0$, для якого вони більші, за отримані для $\psi = 0^0$, майже на 40% в залежності від відношення h/r .

6.2.1.2. Двошарова оболонка

Результати розрахунків з визначення критичних значень навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску двошарових циліндричних оболонок представлено в табл. 6.8. Циліндричні оболонки виготовлені з склопластику механічні характеристики якого разом з геометричними параметрами та умовами закріплення торців такі ж, як і в підпункті 6.2.1.1. Оболонки утворені двома симетрично укладеними, відносно серединної поверхні, шарами однакової товщини, але орієнтованими під кутами ψ до твірної, де внутрішній шар повернутий на кут « $+\psi$ » рис. 6.2. Структура табл. 6.8 така ж як табл. 6.7.

Таблиця 6.8

Величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} (МН) двошарової оболонки при
осьовому тиску

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	11,06 (5)	10,59 (5)	10,90 (4)	10,89 (3)	10,74 (1)	11,25 (1)	12,53 (5)	11,03 (5)	10,28 (5)	11,04 (6)
ОПР	11,06 (5)	12,49 (6)	15,40 (4)	13,80 (1)	12,70 (1)	12,65 (1)	13,63 (1)	15,12 (1)	12,31 (6)	11,04 (6)
Δ , %	0,0	17,9	41,2	26,8	18,2	12,4	8,8	37,1	19,7	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	19,26 (5)	18,88 (5)	19,29 (4)	19,34 (2)	18,89 (1)	19,82 (1)	22,34 (1)	19,51 (5)	17,98 (5)	19,08 (5)
ОПР	19,26 (5)	21,57 (5)	25,54 (4)	24,29 (1)	22,42 (1)	22,32 (1)	24,40 (1)	23,52 (3)	21,32 (5)	19,08 (5)
Δ , %	0,0	14,3	32,4	25,6	18,7	12,6	9,2	20,6	18,6	0,0

Спираючись на результати приведені в табл. 6.8, на рис. 6.11 показані графічні залежності величин критичних значень навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску від кута ψ . Рис. 6.11 (а) представляє результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/40$, рис. 6.11 (б) – $h/r=1/30$. Структура та позначення рис. 6.11 відповідають представленою на рис. 6.10.

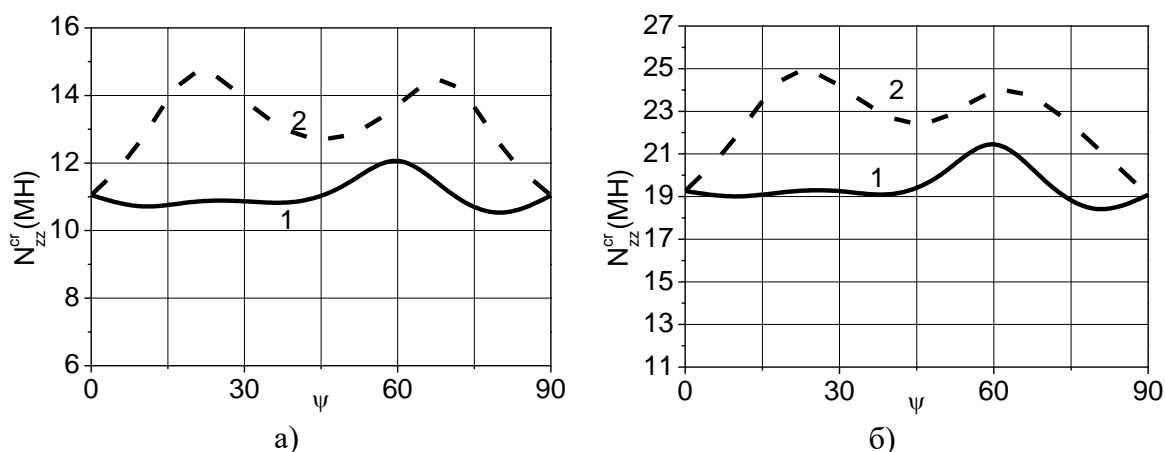


Рис. 6.11. Величини критичних навантажень осьового тиску N_{zz}^{cr} для двошарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З аналізу приведених на рис. 6.11 графіків слід зауважити, що криві 2, які описують ортотропний підхід до розрахунку двошарових циліндричних оболонок, відповідають кривим 2 на рис. 6.10 для одношарових.

Зауважимо, що результати визначення критичних навантажень N_{zz}^{cr} від осьового тиску, отримані при використанні анізотропного підходу «АПР» (криві 1) для двошарових циліндричних оболонок, є меншими від здобутих за ортотропним підходом «ОПР» (криві 2). Водночас у випадку двошарового пакету (рис. 6.11), порівняно із одношаровим (рис. 6.10), відсутній ярко виражений мінімум N_{zz}^{cr} при зміні кута повороту головних напрямів пружності матеріалу в межах $10^0 \leq \psi \leq 30^0$. Так для $h/r=1/40$ критичні навантаження в цьому діапазоні дещо менші від отриманих при $\psi=0^0$, розбіжність не перевищує 4,2%, а вже для $h/r=1/30$ при $\psi=30^0$ навантаження N_{zz}^{cr} більші від отриманих при $\psi=0^0$ на 0,4%. Також зауважимо, що максимальні величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} від осьового тиску здобуті згідно підходу «АПР» для всіх відношень h/r мають місце при $\psi=60^0$. Так для $h/r=1/40$ N_{zz}^{cr} при $\psi=60^0$ більші за отримані при $\psi=0^0$ на 13,3%, а для $h/r=1/30$ на 16%.

6.2.1.3. Тришарова оболонка

Таблиця 6.9 характеризує залежність критичних навантажень осьового тиску тришарових циліндричних оболонок від їх товщини та кута повороту ψ головних напрямів пружності ортотропного волокнистого матеріалу склопластик. Механічні характеристики, геометричні параметри, а також умови закріплення торців оболонок відповідають розглядуваним у підпункті 6.2.1.1. Шари пакета оболонки однакової товщини та орієнтовані під кутами ψ до напрямку твірної оболонок. Таким чином, шаруватий пакет є несиметричним

відносно серединної поверхні циліндра, причому внутрішній шар повернутий на кут «+ ψ », рис. 6.4. Структура заповнення табл. 6.9 відповідає табл. 6.7.

Таблиця 6.9

Величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} (МН) тришарової оболонки при осьовому тиску

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	11,06 (5)	11,30 (5)	12,39 (4)	12,96 (3)	11,99 (2)	12,03 (1)	13,12 (1)	11,68 (5)	10,72 (5)	11,04 (6)
ОПР	11,06 (5)	12,49 (6)	15,40 (4)	13,80 (1)	12,70 (1)	12,65 (1)	13,63 (1)	15,12 (1)	12,31 (6)	11,04 (6)
Δ , %	0,0	10,5	24,3	6,5	5,9	5,1	3,8	29,4	14,8	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	19,26 (5)	19,70 (5)	21,44 (4)	22,79 (2)	21,41 (1)	21,25 (1)	23,08 (1)	20,79 (5)	18,81 (5)	19,08 (5)
ОПР	19,26 (5)	21,57 (5)	25,54 (4)	24,29 (1)	22,42 (1)	22,32 (1)	24,40 (1)	23,52 (3)	21,32 (5)	19,08 (5)
Δ , %	0,0	9,5	19,1	6,5	4,6	5,0	5,7	16,5	13,3	0,0

Використовуючи результати знаходження величин критичних навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску, приведених в табл. 6.9, отримано графіки залежності N_{zz}^{cr} від ψ для різних відношень товщини до радіусу h/r циліндричних оболонок. На рис. 6.12 (а) – $h/r=1/40$, рис. 6.12 (б) – $h/r=1/30$. Структура та позначення рис. 6.12 відповідає представленому на рис. 6.10.

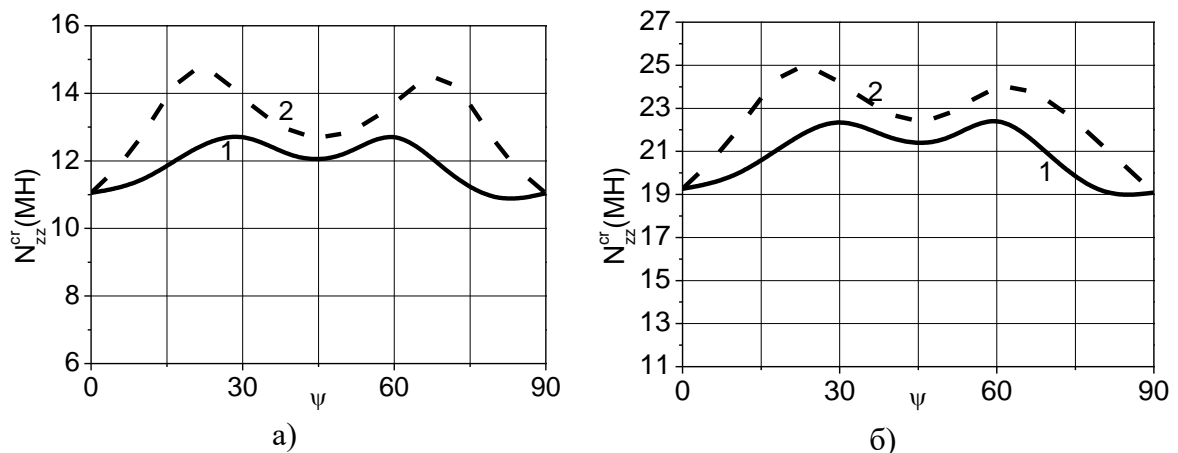


Рис. 6.12. Величини критичних навантажень осьового тиску N_{zz}^{cr} для тришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз графіків, що приведені на рис. 6.12, вказує на таке. Збільшення кількості шарів до трьох не впливає на результати здобуті з використанням ортотропного підходу до розрахунку «ОПР» (криві 2) не змінюють свої окреслення у порівнянні із одно- (рис. 6.10) та двошаровими (рис. 6.11) оболонками.

Величини критичних навантажень вираховані за використанням підходу «АПР» (криві 1) наблизились до значень здобутих за «ОПР» (криві 2), але розходження має місце та складає 29% для відношення $h/r=1/40$ і зменшується при $h/r=1/30$ до 19%.

6.2.1.4. Чотиришарова оболонка

На рис. 6.13 та в табл. 6.10 приведено результати розрахунків на стійкість чотиришарових анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового тиску. Геометричні та механічні характеристики конструкцій аналогічні приведеним в підпунктах 6.2.1.1-6.2.1.3. Умови закріплення торців такі ж. Оболонки утворені чотирьома симетричними відносно серединної поверхні, перехресно-розташованими під кутами ψ шарами однакової товщини, які утворюють пакет типу рис. 6.2. Рис. 6.13 (а) представляє результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/40$, рис. 6.13 (б) – $h/r=1/30$. Структура та позначення табл. 6.10 та рис. 6.13 збережені такими ж як і в підпункті 6.2.1.1.

На рис. 6.13 представлені графіки, що відображають залежність між величинами осьових критичних навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску від зміни кута ψ для чотиришарового пакету циліндричної оболонки.

Величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} (МН) чотиришарової оболонки при осьовому тиску

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	11,06 (5)	11,90 (5)	13,75 (4)	13,16 (1)	12,20 (1)	12,25 (1)	13,37 (1)	13,39 (5)	11,47 (5)	11,04 (6)
ОПР	11,06 (5)	12,49 (6)	15,40 (4)	13,80 (1)	12,70 (1)	12,65 (1)	13,63 (1)	15,12 (1)	12,31 (6)	11,04 (6)
Δ , %	0,0	4,9	12,0	4,9	4,1	3,2	1,9	13,0	7,2	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	19,26 (5)	20,77 (5)	24,26 (4)	23,22 (1)	21,42 (1)	21,56 (1)	23,52 (1)	23,01 (3)	19,92 (5)	19,08 (5)
ОПР	19,26 (5)	21,57 (5)	25,54 (4)	24,29 (1)	22,42 (1)	22,32 (1)	24,40 (1)	23,52 (3)	21,32 (5)	19,08 (5)
Δ , %	0,0	3,8	5,3	4,6	4,7	3,5	3,7	2,2	7,0	0,0

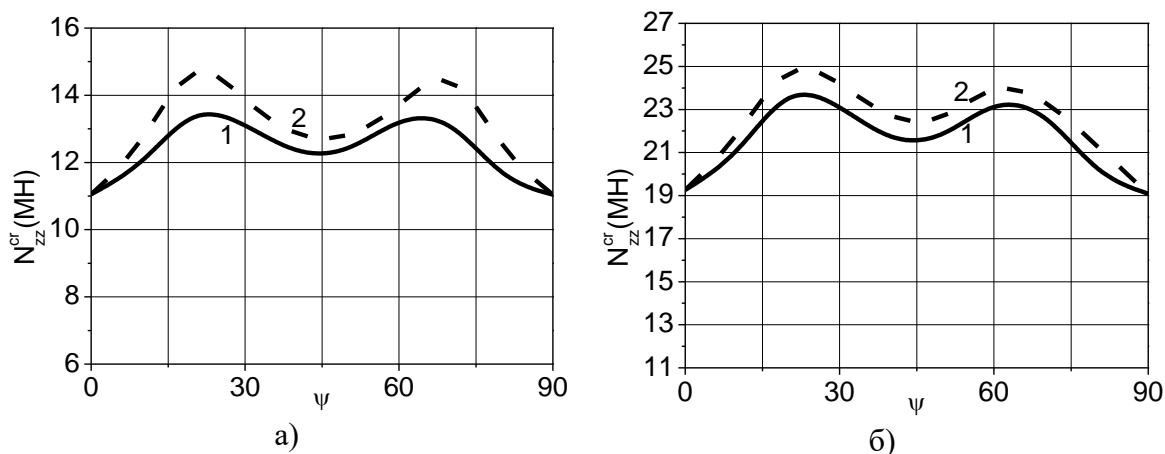


Рис. 6.13. Величини критичних навантажень осьового тиску N_{zz}^{cr} для чотиришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз приведених на рис. 6.13 графіків вказує на те, що криві 2, що описують ортотропний підхід до розрахунку чотиришарових оболонок відповідають кривим 2 одно-, дво- та тришарових циліндрів на рис. 6.10-6.12.

Критичні навантаження осьового тиску, отримані згідно підходу «АПР» (криві 1), менші за вираховані за «ОПР» (криві 2). Розходження між порівнюваними величинами змінюється із збільшенням відношення товщини до радіусу h/r і складає 12% для $h/r=1/40$ та й зменшується до 7% для відношення $h/r=1/30$.

6.2.1.5. Восьмишарова оболонка

Результати визначення критичних навантажень осьового тиску та відповідна їм кількість хвиль в коловому напрямку для восьмишарових циліндричних оболонок приведені в табл. 6.11. Геометричні та механічні характеристики циліндрів аналогічні приведеним в підпункті 6.2.1.1, умови закріплення торців такі ж. Оболонки складено з восьми (табл. 6.11 та рис. 6.14) перехресно-укладених під кутами ψ шарів однакової товщини, які для парної кількості шарів створюють симетричний відносно серединної поверхні конструкції структурний пакет типу представлено на рис. 6.2. При цьому внутрішній шар повернуто на кут « $+\psi$ ». Структура та позначення табл. 6.11 та рис. 6.14 аналогічні приведеним в підпункті 6.2.1.1.

Результати табл. 6.11 для восьмишарової структури також графічно представлені на рис. 6.14 в осях N_{zz}^{cr} (осьові критичні навантаження) – ψ (кут повороту осей ортотропії матеріалу) для таких відношень товщини до радіусу h/r : рис. 6.14 (а) – $h/r=1/40$, рис. 6.14 (б) – $h/r=1/30$.

Таблиця 6.11

Величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} (МН) восьмишарової оболонки при осьовому тиску

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР	11,06 (5)	12,18 (6)	14,53 (5)	13,67 (1)	12,63 (1)	12,60 (1)	13,61 (1)	14,39 (5)	12,03 (6)	11,04 (6)
ОПР	11,06 (5)	12,49 (6)	15,40 (4)	13,80 (1)	12,70 (1)	12,65 (1)	13,63 (1)	15,12 (1)	12,31 (6)	11,04 (6)
Δ , %	0,0	2,6	6,0	0,9	0,6	0,4	0,1	5,1	2,3	0,0
$h/r=1/30$										
АПР	19,26 (5)	21,17 (5)	25,49 (4)	24,09 (1)	22,25 (1)	22,21 (1)	23,96 (1)	23,46 (3)	20,86 (5)	19,08 (5)
ОПР	19,26 (5)	21,57 (5)	25,54 (4)	24,29 (1)	22,42 (1)	22,32 (1)	24,40 (1)	23,52 (3)	21,32 (5)	19,08 (5)
Δ , %	0,0	1,9	0,2	0,8	0,8	0,5	1,8	0,3	2,2	0,0

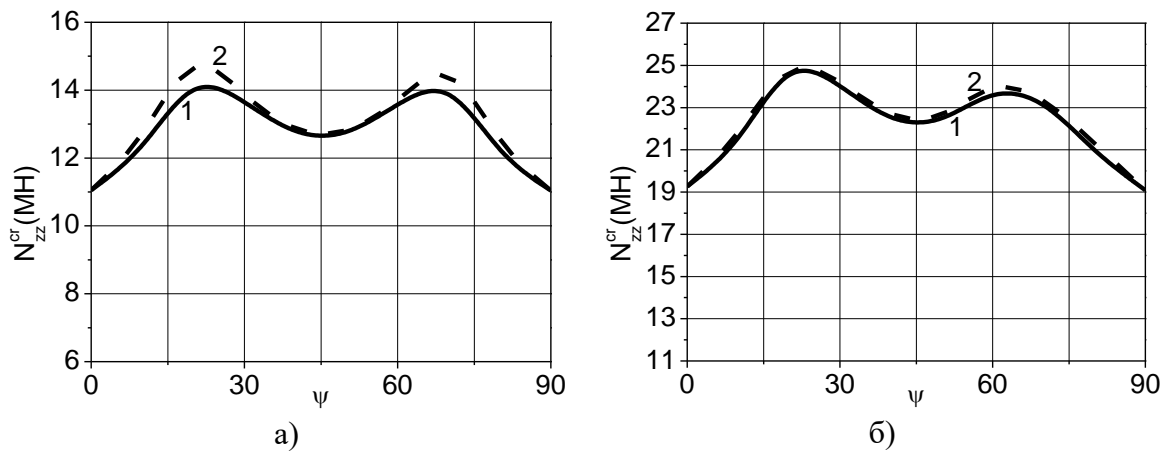


Рис. 6.14. Величини критичних навантажень осьового тиску N_{zz}^{cr} для восьмишарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз результатів знаходження величин критичних навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску (табл. 6.11, рис. 6.14) для восьмишарових циліндричних оболонок від зміни кута укладання ψ ортотропного матеріалу вказує на таке. Критичні навантаження N_{zz}^{cr} від осьового тиску здобуті за використанням ортотропного підходу до розрахунку анізотропних оболонок «ОПР», для розглянутих в даному підпункті структурних пакетів, не відрізняються від результатів отриманих згідно цього ж підходу для менших кількостей шарів отриманих в підпунктах 6.2.1.1-6.2.1.4. Так само як і у випадку дії розподіленого бокового тиску підпункт 6.1.1 збільшення кількості шарів пакету поступово веде до наближення критичних навантажень N_{zz}^{cr} , що отримані з урахуванням анізотропних механічних характеристик матеріалу згідно підходу «АПР» до визначених за «ОПР». Так навантаження N_{zz}^{cr} для восьмишарової конструкції, що визначені за «АПР» (табл. 6.11, рис. 6.14 криві 1) хоч і залишаються меншими, але практично співпадають з величинами N_{zz}^{cr} , що здобуті на основі підходу «ОПР» (криві 2). З табл. 6.11 видно, що максимальна розбіжність між цими результатами не перевищує 6%. Це підтверджує описаний в [31] факт, що для розглядуваних анізотропних циліндричних оболонок збільшення кількості перехресно укладених шарів пакету до 7-8 та

більше, призводить до можливості розрахунку на стійкість таких оболонок за «ОПР» підходом.

6.2.2. Величини критичних навантажень осевого тиску для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів

Спираючись на дані табл. 6.7-6.11 на рис. 6.15, наведено результати дослідження критичних значень навантажень N_{zz}^{cr} осевого тиску анізотропних циліндричних оболонок залежно від кількості перехресно розташованих шарів та кута повороту головних напрямів пружності матеріалу до твірної оболонки при відношенні довжини до радіуса $L/r=2$. Закріплення торців циліндра відповідає умовам (2.21). Рис. 6.15 (а) описує анізотропну оболонку з відношенням товщини до радіуса $h/r=1/40$, рис. 6.15 (б) – $h/r=1/30$.

На рис. 6.15 криві 1 характеризують величини критичних навантажень для одношарових оболонок, графічні залежності 2 – для двошарових оболонок, графіки 3 – для тришарових, 4 – чотиришарових, 5 – п'ятишарових, 7 – семишарових та 8 – для восьмишарових. Всі ці результати отримані згідно запропонованого підходу «АПР». Криві 1' зображають результати визначення критичних навантажень для ортотропних оболонок згідно підходу «ОПР».

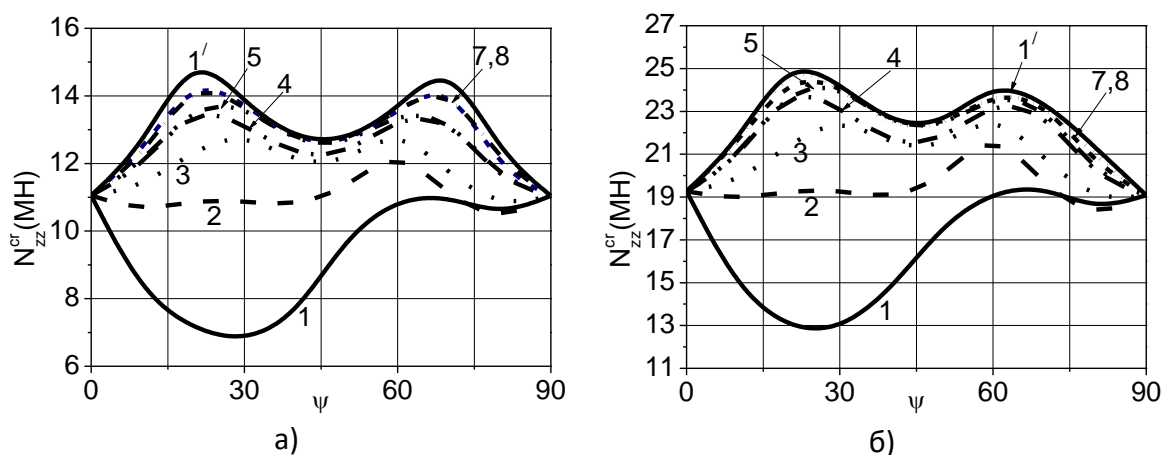


Рис. 6.15. Величини критичних навантажень осевого тиску N_{zz}^{cr} для одно- (1), дво- (2), три- (3), чотири- (4), п'яти- (5), семи- (7), восьмишарової (8) оболонки та результати отримані на основі підходу «ОПР» (1') $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б)

Криві 1 на рис. 6.15 свідчать про те, що одношарові анізотропні оболонкові конструкції сприймають найменші величини критичних навантажень N_{zz}^{cr} осьового тиску. У випадку двошарового пакету (криві 2) навантаження N_{zz}^{cr} стають переважно більшими ніж для одношарового, але меншими ніж для випадку тришарових оболонок (криві 3). Ще більшими є критичні навантаження N_{zz}^{cr} отримані для чотиришарового пакету оболонок (криві 4). Подальше збільшення кількості перехресно-укладених шарів ψ веде до наближення величин критичних навантажень осьового тиску до значень отриманих згідно ортотропного підходу до розрахунку «ОПР» (криві 1').

6.3. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного навантаження (крутного моменту), що прикладений до їх торців

6.3.1. Вплив товщини на стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією крайового зсувного навантаження

6.3.1.1 Одношарова оболонка

Розглядається стійкість одношарових оболонок під дією крайового зсувного навантаження з відношенням довжини L до радіуса серединної поверхні оболонки r рівним двом ($L/r=2$). Закріплення торців конструкції відповідає умовам (2.34). Матеріалом є волокнистий композит склапластик з такими механічними характеристиками матеріалу: $E_{zz}=44,5E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0$, $G_{rz}=8,48E_0$, $\nu_{0z}=0,26$, $\nu_{z0}=0,0628$, $E_0=1000$ МПа. В табл. 6.12 наведені величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ для одношарових оболонок з довжиною вздовж твірної $L=1,2$ м, радіусом серединної поверхні $r=0,6$ м та з різним відношенням товщини оболонки h до r

($h/r=1/40$; $1/30$). Критичні навантаження здобуті за використанням двох підходів. В першому рядку подані результати розрахунків на стійкість за пропонуваним підходом, що спирається на використання аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна до розв’язку системи (5.105) з врахуванням закону Гука у формі (2.3) від дії крайового навантаження прикладеного за додатнім напрямком «АПР⁺». У другому рядку величини критичних навантажень $S_{z\theta}^{cr}$ знайдених у припущенні, що в (2.3) сталі $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$, тобто матеріал оболонки є ортотропним «ОПР». Третіми приведені критичні значення здобуті також згідно пропонуваного підходу «АПР⁻», але від зовнішнього від’ємного за напрямком крайового навантаження. Водночас, мінімальні величини $S_{z\theta}^{cr}$ знаходились від зміни величин хвилеутворення в коловому напрямку k , що приведено в дужках після критичних навантажень, знайдених згідно відповідного підходу. Крім цього, в таблиці 6.12 показано у відсотках похибку Δ (%) відшукування величин критичних навантажень крайового зсуву стосовно пропонуваного підходу «АПР⁺» розрахунку на стійкість циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій.

Згідно до табл. 6.12 на рис. 6.16 в осях критичні навантаження $S_{z\theta}^{cr}$ – кут ψ представлено графіки, що характеризують вплив кута ψ на величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$. Крива 1⁺ – це критичні значення, здобуті за пропонуваним підходом «АПР⁺» від дії додатного крайового навантаження, кривою 1⁻ проілюстровані величини критичних значень $S_{z\theta}^{cr}$, що отримані для пропонуваного підходу при від’ємному напрямку прикладання крайового навантаження зсуву «АПР⁻». Графік 2 отриманий за підходом «ОПР» у припущенні, що $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$. При цьому рис. 6.16 (а) відображає результати розрахунку анізотропної оболонки з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що представляється відношенням $1/40$, рис. 6.16 (б) – $h/r=1/30$.

Таблиця 6.12

Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ (МНм) одношарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР ⁺	1,96 (6)	1,57 (5)	1,76 (5)	2,24 (5)	2,77 (5)	3,12 (4)	3,30 (4)	3,32 (4)	3,09 (5)	2,85 (5)
ОПР	1,96 (6)	2,13 (6)	2,52 (6)	2,93 (6)	3,24 (6)	3,38 (5)	3,36 (5)	3,23 (5)	3,00 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	35,6	41,4	31,1	17,0	8,3	1,6	-2,7	-3,0	0,0
АПР ⁻	1,96 (6)	3,00 (7)	3,52 (7)	3,45 (7)	3,09 (7)	2,81 (6)	2,61 (6)	2,64 (5)	2,68 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	90,7	99,8	54,5	11,5	-10,0	-21,0	-20,4	-13,2	0,0
$h/r=1/30$										
АПР ⁺	3,82 (5)	3,03 (5)	3,51 (5)	4,37 (4)	5,27 (4)	5,93 (4)	6,35 (4)	6,37 (4)	5,89 (4)	5,41 (4)
ОПР	3,82 (5)	4,18 (5)	4,98 (5)	5,79 (5)	6,32 (5)	6,55 (5)	6,56 (5)	6,31 (5)	5,78 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	37,8	42,1	32,4	20,0	10,5	3,2	-1,2	-2,0	0,0
АПР ⁻	3,82 (5)	5,85 (6)	6,99 (6)	6,89 (7)	6,12 (6)	5,41 (6)	5,16 (5)	4,94 (5)	5,13 (5)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	93,1	99,4	57,6	16,1	-8,7	-17,6	-19,8	-10,9	0,0

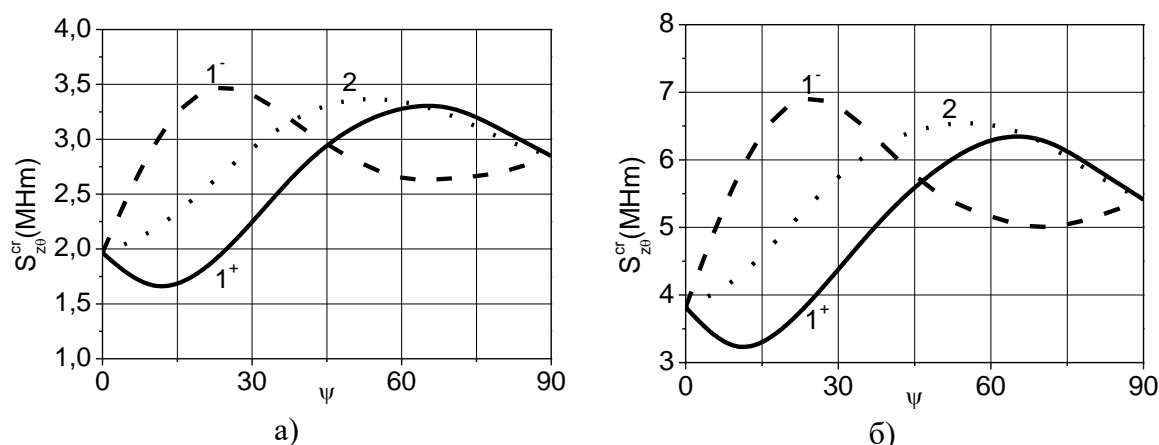


Рис. 6.16. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ для одношарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

З рис. 6.16 видно, що порівняно з попередньо розглянутими задачами дослідження стійкості циліндричних оболонок від дії розподіленого бокового зовнішнього тиску та осьового тиску, де критичні значення здобуті з використанням закону Гука у повній формі (2.3), при урахуванні коефіцієнтів c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} , завжди були меншими від здобутих за ортотропним підходом ($c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$). У випадку кручення, критичні навантаження крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ за підходами «АПР⁺» та «АПР⁻» для одношарових циліндрів в окремих діапазонах зміни кута ψ виявляються більшими за відшукані згідно «ОПР». Так наприклад, у випадку дії додатного крайового навантаження для всіх розглядуваних товщин циліндричних оболонок в діапазоні $70^0 \leq \psi \leq 90^0$ результати знайдені згідно «АПР⁺» (криві 1⁺) більші за отримані за «ОПР» (криві 2), максимальна розбіжність складає 3%. В той же час, в діапазоні зміни кута повороту головних напрямів пружності матеріалу в межах від $0^0 \leq \psi \leq 60^0$ критичні навантаження знайдені за «АПР⁺» є меншими від здобутих згідно «ОПР». Максимальна різниця зростає із збільшенням відношення товщини h до радіусу серединної поверхні оболонки $r - h/r=1/40$ від 41% при до 42% при $h/r=1/20$.

Подібна ситуація має місце і у випадку від'ємно напрямленого крайового зсувного навантаження. Лише тепер результати критичних величин $S_{z\theta}^{cr}$ визначених за «АПР⁻» (криві 1⁻) більші від здобутих згідно «ОПР» (криві 2) в діапазоні зміни кута $0^0 \leq \psi \leq 30^0$. Максимальні розбіжності між порівнюваними результатами змінюються для $h/r=1/40$ від 58% до 57% при $h/r=1/30$. В іншому діапазоні зміни кута $40^0 \leq \psi \leq 90^0$ підхід «АПР⁻» дає результати менші від отриманих згідно «ОПР», максимумами розходжень змінюються для $h/r=1/40$ від 22% до 21% при $h/r=1/30$.

З порівняння графіків, що описують величини критичних навантажень визначених від дій додатного «АПР⁺» (криві 1⁺) та від'ємного «АПР⁻» (криві 1⁻) його прикладання видно таке. При значеннях кута $0^0 \leq \psi \leq 40^0$ від'ємні значення

критичних величин перевищують в своїх максимумах такі ж, здобуті від дії навантаження у додатному напрямку «АПР⁺». Максимальні розбіжності становлять 100% для всіх розглянутих відношень h/r . Подальше збільшення кута ψ веде до того, що критичні значення від'ємного навантаження стають меншими від здобутих при додатному. Тут максимальні відхилення рівні 21%.

Також зауважимо, що на величини критичних значень $S_{z\theta}^{cr}$, отриманих згідно підходу «ОПР», не впливає зміна напрямку дії (додатного або від'ємного) торцевого зсувного навантаження, що пов'язане з рівністю нулю коефіцієнтів c_{16} , c_{26} , c_{36} , a_{45} закону Гука (2.3).

6.3.1.2 Двошарова оболонка

У табл. 6.13 представлено результати розрахунку на стійкість циліндричних оболонок з такими ж геометричними та механічними характеристиками, що і в підпункті 6.3.1.1. Торці оболонки закріплені так само. Різниця між оболонками у кількості шарів. В табл. 6.13 наведені величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$, отриманих для оболонок з двох шарів однакової товщини кожен, які перехресно укладено під кутами ψ , утворюючи структурний пакет симетричний відносно серединної поверхні конструкції рис. 6.2. Зміст табл. 6.13 цілком відповідає табл. 6.12.

Таблиця 6.13

Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ (МНм) двошарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР ⁺	1,96 (6)	2,13 (6)	2,34 (6)	2,47 (6)	2,56 (6)	2,73 (6)	3,00 (5)	3,15 (5)	3,15 (5)	2,85 (5)
ОПР	1,96 (6)	2,13 (6)	2,52 (6)	2,93 (6)	3,24 (6)	3,38 (5)	3,36 (5)	3,23 (5)	3,00 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	0,0	7,7	18,5	26,8	23,7	12,1	2,8	-4,7	0,0
АПР ⁻	1,96 (6)	2,01 (6)	2,30 (6)	2,71 (6)	3,04 (6)	3,08 (6)	2,82 (6)	2,64 (6)	2,60 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	-6,0	-1,7	9,5	19,0	12,7	-5,8	-16,2	-17,3	0,0
$h/r=1/30$										
АПР ⁺	3,82 (5)	4,26 (5)	4,62 (6)	4,91 (6)	5,18 (6)	5,42 (5)	5,75 (5)	6,09 (5)	6,10 (4)	5,41 (4)
ОПР	3,82 (5)	4,18 (5)	4,98 (5)	5,79 (5)	6,32 (5)	6,55 (5)	6,56 (5)	6,31 (5)	5,78 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-1,9	7,7	17,9	22,1	20,8	13,9	3,6	-5,3	0,0
АПР ⁻	3,82 (5)	3,84 (5)	4,41 (5)	5,21 (5)	5,86 (5)	5,98 (6)	5,60 (6)	5,06 (5)	4,98 (5)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-9,8	-4,7	6,0	13,2	10,4	-2,7	-16,9	-18,4	0,0

На основі результатів табл. 6.13 на рис. 6.17 представлено графічні залежності величин критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ від кута ψ . Позначення кривих (рис. 6.17) відповідає наведеному на рис. 6.16. Крива 1⁺ – критичні величини $S_{z\theta}^{cr}$, здобуті за пропонованим підходом «АПР⁺» від дії додатного крайового навантаження; графік 1⁻ – критичні значення $S_{z\theta}^{cr}$ за пропонованим підходом «АПР⁻» від від'ємного крайового навантаження; графічна залежність 2 – $S_{z\theta}^{cr}$ визначене за підходом «ОПР» у припущенні, що $c_{16} = c_{26} = c_{36} = a_{45} = 0$. Рис. 6.17 (а) характеризує анізотропну оболонку з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що характеризується відношенням 1/40, рис. 6.17 (б) – $h/r=1/30$.

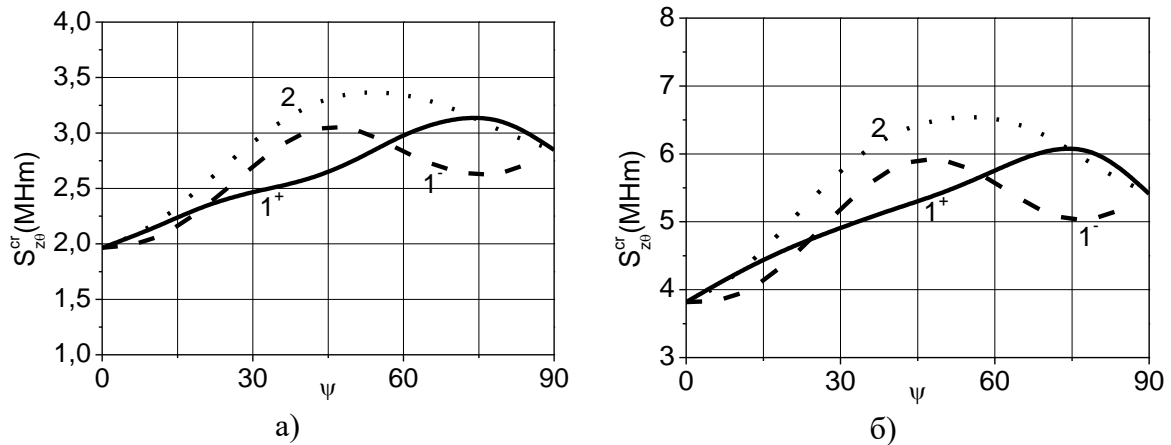


Рис. 6.17. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ для двошарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз рис. 6.17 та табл. 6.13 дозволяє стверджувати. Критичні величини навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ отримані для двошарових оболонок згідно підходу «ОПР» (криві 2) не змінили свої значення, а отже і конфігурації самих кривих, у порівнянні із здобутими для одношарових оболонок табл. 6.12 та рис. 6.16.

З аналізу рис. 6.17 видно, що критичні величини навантажень $S_{z\theta}^{cr}$ отримані згідно підходу «АПР» (криві 1) менші від визначених за «ОПР» на всьому діапазоні зміни кута повороту ψ осей ортотропії матеріалу оболонок. Максимальні розбіжності змінюються від 19% при $h/r=1/40$ до 21% для $h/r=1/30$. Додатній напрямок прикладання торцевого зсувного навантаження призводить, в діапазоні зміни $0^0 \leq \psi \leq 70^0$, до подібного раніше отриманого результату. Максимальні перевищення результатів розрахунків, здобутих за «ОПР» над визначеними за «АПР+», змінюються від 27% для $h/r=1/40$ до 22% при $h/r=1/30$. Для $\psi=80^0$ результати «АПР+» є більшими за «ОПР», але розбіжність не перевищує 5,3%.

Також з аналізу табл. 6.13 та рис. 6.17 видно, що для відношення $h/r=1/40$, в діапазоні зміни кута $30^0 \leq \psi \leq 50^0$, результати «АПР» більші за здобуті за підходом «АПР+» на 19%. З збільшенням відношення h/r це перевищення зменшується і при $h/r=1/30$ розбіжність не перевищує 13,2%.

6.3.1.3 Тришарова оболонка

Табл. 6.14 представляє результати чисельного розрахунку на стійкість циліндричних оболонок з геометричними та механічними характеристиками матеріалу такими як в підпункті 6.3.1.1. Торці циліндрів закріплені так само. Різняться конструкції кількістю шарів. В табл. 6.14 приведені критичні навантаження крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$, визначені для оболонок складених з трьох шарів однакової товщини кожен, які перехресно укладено під кутами ψ . Таким чином, утворено несиметричний структурний пакет за товщиною відносно серединної поверхні оболонок, де внутрішній та зовнішній шари укладено під кутом ψ , рис. 6.4. Структура табл. 6.14 аналогічна табл. 6.12.

Спираючись на приведені в табл. 6.14 результати, побудовано графічні залежності в осях критичні навантаження крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ – кут повороту головних напрямів пружності матеріалу оболонки ψ , які подані на рис. 6.18. Рис. 6.18 (а) представляє анізотропну оболонку з відношенням товщини h до радіусу її серединної поверхні r , що характеризується відношенням 1/40, рис. 6.18 (б) – $h/r=1/30$. Позначення на рис. 6.18 відповідають позначенням на рис. 6.16.

Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ (МНм) тришарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР ⁺	1,96 (6)	2,06 (6)	2,55 (6)	3,18 (5)	3,69 (5)	4,03 (5)	4,15 (5)	3,93 (5)	3,39 (5)	2,85 (5)
ОПР	1,96 (6)	2,13 (6)	2,52 (6)	2,93 (6)	3,24 (6)	3,38 (5)	3,36 (5)	3,23 (5)	3,00 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	3,8	-0,9	-7,7	-12,2	-16,1	-19,1	-17,7	-11,7	0,0
АПР ⁻	1,96 (6)	2,22 (6)	2,48 (7)	2,52 (7)	2,45 (7)	2,34 (6)	2,34 (6)	2,47 (6)	2,58 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	8,1	-2,8	-20,6	-33,8	-42,1	-43,7	-37,2	-24,0	0,0
$h/r=1/30$										
АПР ⁺	3,82 (5)	3,91 (5)	4,84 (5)	6,13 (5)	7,35 (5)	7,98 (4)	7,99 (4)	7,43 (4)	6,37 (4)	5,41 (4)
ОПР	3,82 (5)	4,18 (5)	4,98 (5)	5,79 (5)	6,32 (5)	6,55 (5)	6,56 (5)	6,31 (5)	5,78 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	6,8	3,0	-5,6	-14,0	-18,0	-18,0	-15,1	-9,3	0,0
АПР ⁻	3,82 (5)	4,38 (6)	4,75 (6)	4,86 (6)	4,70 (6)	4,52 (6)	4,56 (5)	4,61 (5)	4,88 (5)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	12,2	-1,8	-20,7	-36,1	-43,3	-43,0	-38,0	-23,4	0,0

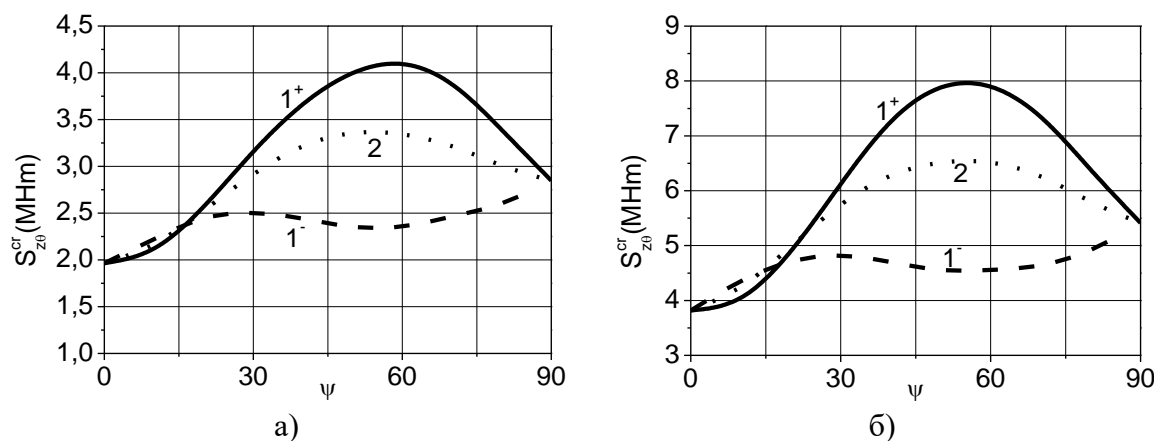


Рис. 6.18. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ для тришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналізуючи результати приведені в табл. 6.14 та на рис. 6.18 зробимо такі висновки.

Криві 2, що характеризують критичні навантаження крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ тришарових оболонок, встановлені згідно ортотропного підходу «ОПР» не

змінити свої конфігурації у порівнянні із критичними величинами $S_{z\theta}^{cr}$ здобутими згідно цього ж підходу для одношарових рис. 6.16 і табл. 6.12 та двошарових рис. 6.17 і табл. 6.13 циліндричних оболонок.

Криві 1^+ , побудовані на основі результатів визначення критичних сил крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ від зовнішнього навантаження прикладеного в додатному напрямку, згідно підходу «АПР⁺». В діапазоні зміни кута $20^0 \leq \psi \leq 90^0$ вони розташовані на рис. 6.18 вище за отримані при ортотропному розрахунку «ОПР» (криві 2). Максимальні розбіжності величин критичних навантажень не перевищують 19,1%.

В той же час криві 1^- , отримані при розрахунку на стійкість від від'ємно прикладеного торцевого навантаження за підходом «АПР⁻», на початковому етапі зміни кута ψ до $10^0 \div 20^0$ показують більші величини $S_{z\theta}^{cr}$ порівняно із підходом «ОПР». Розбіжність не перевищує 5,4%, але в подальшому розглядуваному діапазоні зміни ψ стають меншими. Максимальні неспівпадіння не перевищують 26%.

Також зауважимо, що знак прикладання зовнішнього торцевого навантаження суттєво впливає на несну здатність циліндричних оболонок з точки зору втрати стійкості. Лише для $\psi = 10^0$ результати здобуті при додатному навантаженні «АПР⁺» є меншими від від'ємних «АПР⁻», причому розбіжність незначна і не перевищує 12,2%. В іншому розглядуваному діапазоні зміни ψ результати «АПР⁺» більші від «АПР⁻» і максимальні розходження досягають від 43,7%.

6.3.1.4 Чотиришарова оболонка

У табл. 6.15 і на рис. 6.19 наведені результати розрахунку на стійкість чотиришарових анізотропних циліндричних оболонок, що здобуті за тими ж підходами, що й для попередньо розглянутих конструкцій. Оболонки мають ті

самі геометричні та механічні характеристики, що і в попередніх підпунктах 6.3.1.1÷6.3.1.3. Вони складені з чотирьох перехресно укладених під кутами $\pm \psi$ шарів, сталої товщини кожен. Тобто, структурні пакети розглядуваних у підпункті оболонок є симетричними відносно серединної поверхні, відповідно зображеним на рис. 6.2. Закріплення торців конструкцій відповідає попередньому. Структура та позначення табл. 6.15 і рис. 6.19 збережені відповідно до табл. 6.12 – 6.14 та рис. 6.16 – 6.18. При цьому рис. 6.19 (а) відповідає циліндричній оболонці з відношенням товщини до радіусу серединної поверхні $h/r=1/40$, рис. 6.19 (б) – $h/r=1/30$.

Таблиця 6.15

Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ (МНм) чотиришарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР ⁺	1,96 (6)	2,14 (6)	2,47 (6)	2,76 (6)	2,97 (6)	3,15 (5)	3,20 (5)	3,22 (5)	3,08 (5)	2,85 (5)
ОПР	1,96 (6)	2,13 (6)	2,52 (6)	2,93 (6)	3,24 (6)	3,38 (5)	3,36 (5)	3,23 (5)	3,00 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	-0,5	2,3	6,4	9,3	7,6	4,9	0,3	-2,9	0,0
АПР ⁻	1,96 (6)	2,09 (6)	2,48 (6)	2,94 (6)	3,30 (6)	3,45 (6)	3,36 (5)	3,09 (5)	2,84 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	-2,4	0,7	6,7	11,1	9,7	4,9	-4,1	-7,9	0,0
$h/r=1/30$										
АПР ⁺	3,82 (5)	4,23 (5)	4,91 (6)	5,55 (5)	5,89 (5)	6,09 (5)	6,28 (5)	6,32 (5)	5,94 (4)	5,41 (4)
ОПР	3,82 (5)	4,18 (5)	4,98 (5)	5,79 (5)	6,32 (5)	6,55 (5)	6,56 (5)	6,31 (5)	5,78 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-1,3	1,4	4,4	7,4	7,4	4,3	-0,1	-2,8	0,0
АПР ⁻	3,82 (5)	4,05 (5)	4,83 (5)	5,73 (5)	6,37 (5)	6,59 (5)	6,38 (5)	5,91 (5)	5,49 (5)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-4,2	-1,7	3,3	8,1	8,2	1,6	-6,4	-7,7	0,0

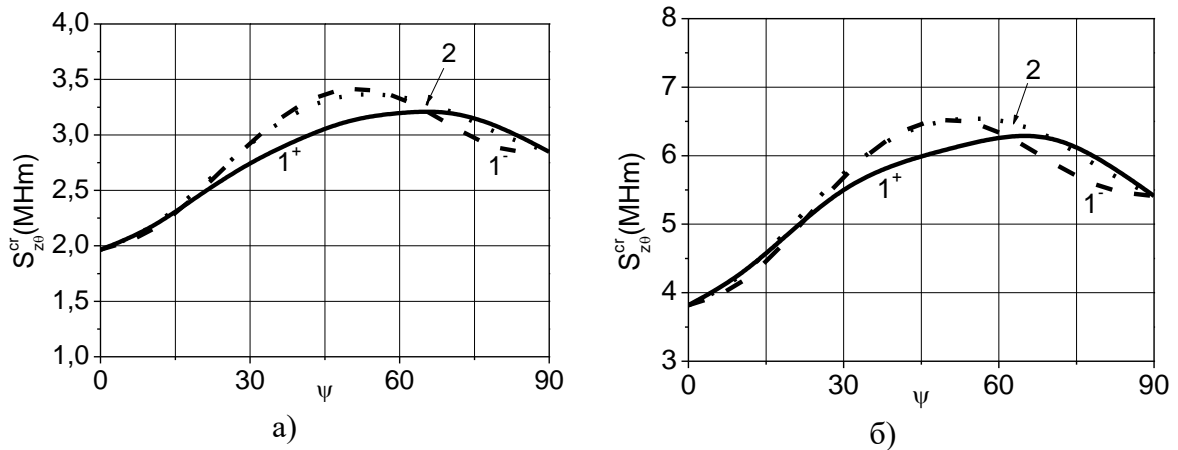


Рис. 6.19. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z_0}^{cr}$ для чотиришарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз величин критичних значень навантажень крайового зсуву $S_{z_0}^{cr}$ згідно з табл. 6.15 та рис. 6.19 дозволяє стверджувати, що результати розрахунку чотиришарових циліндричних оболонок за ортотропним підходом «ОПР» (криві 2) не відрізняються від результатів цього ж підходу для одно-, дво- та тришарових конструкцій (табл. 6.12-6.14 та рис. 6.16-6.18, криві 2).

Зауважимо, що збільшення кількості перехресно укладених шарів оболонки до чотирьох наблизило результати здобуті за підходом «АПР» до визначених згідно «ОПР» у порівнянні з попередньо розглядуваними структурними пакетами. Так величини критичних значень крайового зсуву $S_{z_0}^{cr}$ від додатньо прикладеного навантаження, підхід «АПР+» (крива 1⁺), знаходяться в межах 9,3% від здобутих за ортотропним підходом «ОПР» (крива 2). А для $S_{z_0}^{cr}$ від від'ємно прикладеного торцевого навантаження, підхід «АПР-» (крива 1⁻) проти «ОПР», розбіжності не перевищують 6,3%.

6.3.1.5 Восьмишарова оболонка

Табл. 6.16 представляє розрахунок на стійкість восьмишарових циліндричних оболонкових конструкцій відповідно з такими ж геометричними та механічними характеристиками, що і розглянуті в підпункті 6.3.1.1. Торці

оболонки закріплені у той же спосіб. Оболонки утворено з використанням восьми (табл. 6.16, рис. 6.20) перехресно ψ укладених шарів однакової товщини. Структурний шаруватий пакет для восьмишарових конструкцій є симетричним відносно серединної поверхні оболонки типу рис. 6.2. Внутрішній шар для цього структурного пакету має орієнтацію «+ ψ ». Структура і позначення табл. 6.16 та рис. 6.20 такі ж як і в підпункті 6.3.1.1. Рис. 6.20 (а) описує розрахунок восьмишарової анізотропної оболонки з відношенням $h/r=1/40$, а рис. 6.20 (б) – $h/r=1/30$.

Таблиця 6.16

Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ (МНм) восьмишарової оболонки

Варіант підходу	Кут ψ , в град									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/r=1/40$										
АПР ⁺	1,96 (6)	2,20 (6)	2,62 (6)	3,07 (6)	3,43 (6)	3,58 (5)	3,54 (5)	3,41 (5)	3,12 (5)	2,85 (5)
ОПР	1,96 (6)	2,13 (6)	2,52 (6)	2,93 (6)	3,24 (6)	3,38 (5)	3,36 (5)	3,23 (5)	3,00 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	-2,8	-3,8	-4,4	-5,4	-5,6	-5,2	-5,1	-4,1	0,0
АПР ⁻	1,96 (6)	2,08 (6)	2,45 (6)	2,84 (6)	3,10 (6)	3,23 (5)	3,24 (5)	3,08 (5)	2,89 (5)	2,85 (5)
Δ , %	0,0	-5,1	-6,7	-7,5	-9,7	-9,9	-8,5	-9,6	-7,4	0,0
$h/r=1/30$										
АПР ⁺	3,82 (5)	4,33 (5)	5,18 (5)	5,98 (5)	6,64 (5)	6,90 (5)	6,92 (5)	6,60 (5)	6,05 (5)	5,41 (4)
ОПР	3,82 (5)	4,18 (5)	4,98 (5)	5,79 (5)	6,32 (5)	6,55 (5)	6,56 (5)	6,31 (5)	5,78 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-3,6	-3,8	-3,2	-4,7	-5,1	-5,2	-4,5	-4,6	0,0
АПР ⁻	3,82 (5)	4,08 (5)	4,85 (5)	5,63 (5)	6,09 (5)	6,26 (5)	6,26 (5)	6,05 (5)	5,64 (4)	5,41 (4)
Δ , %	0,0	-5,7	-6,5	-5,8	-8,2	-9,2	-9,5	-8,3	-6,9	0,0

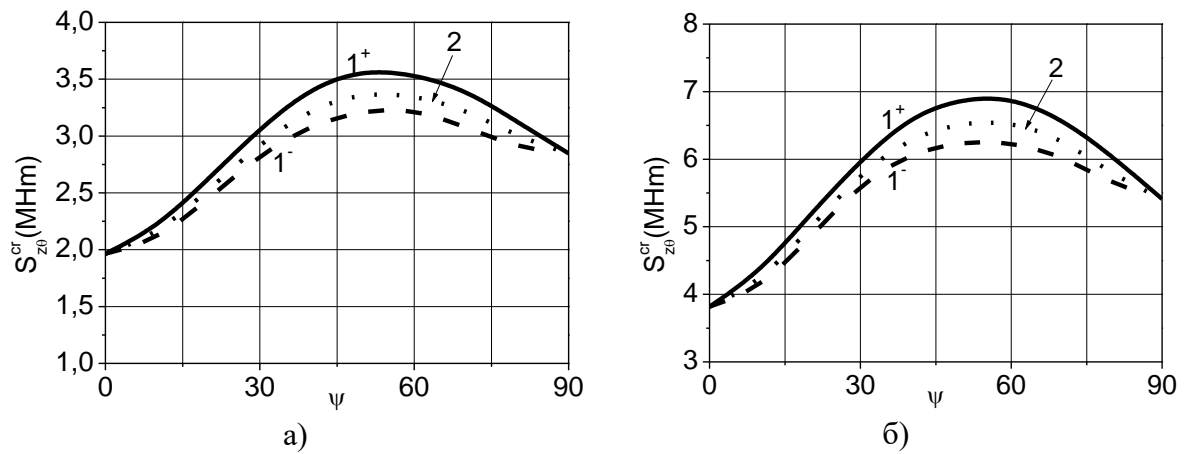


Рис. 6.20. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ для восьмишарової оболонки при $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (б) з позначенням кривих: 1 – АПР; 2 – ОПР

Аналіз результатів приведених в табл. 6.16 та графічних залежностей (рис. 6.20) дозволяє зробити такі висновки. Критичні величини $S_{z\theta}^{cr}$, отримані за використанням ортотропного підходу до розрахунку «ОПР» восьмишарових (табл. 6.16, рис. 6.20) анізотропних циліндричних оболонок, не змінились у порівнянні із розглядуваними в попередніх підпунктах 6.3.1.1-6.3.1.4. Критичні значення $S_{z\theta}^{cr}$ отримані за пропонуваним підходом, у випадку прикладання навантаження за додатнім напрямком «АПР⁺», при збільшенні кількості шарів пакету, на всьому діапазоні зміни кута ψ , наближаються до критичних навантажень здобутих за підходом «ОПР». При восьми шарах пакету (табл. 6.16; рис. 6.20, криві 1⁺ та 2) стають максимально наближеними. Розбіжності не перевищують 5,6%. При прикладенні торцевого зсувного навантаження у від'ємному напрямку відбувається подібне зближення результатів визначення критичних величин $S_{z\theta}^{cr}$ отриманих за «АПР» та «ОПР». І при восьми шарах (табл. 6.16; рис. 6.20, криві 1⁻ та 2) максимальне неспівпадіння знаходиться в межах 4,3%. Також зауважимо, що згідно до результатів табл. 6.16 та рис. 6.20 критичні значення $S_{z\theta}^{cr}$ для восьмишарових оболонок від зсувного навантаження прикладеного за додатним напрямком «АПР⁺» є дещо вищими ніж при від'ємно прикладеному «АПР⁻». Розбіжності знаходяться в межах 9,9%. Таким чином, аналіз результатів рис. 6.20 та табл. 6.16 вказує на те, що

критичні навантаження від крайового зсуву для восьмишарового структурного пакету (криві 1^+ та 1^-) є найбільш структурно подібні та наближені до таких же величин, визначених для ортотропних оболонок (криві 2).

6.3.2. Величини критичних навантажень крайового зсувного навантаження для анізотропних циліндричних оболонок при збільшенні кількості їх шарів

На рис. 6.21 спираючись на результати дослідження критичних значень навантажень крайового зсуву $S_{z\theta}^{cr}$ від кута ψ анізотропної циліндричної оболонки, що приведені в підпунктах 6.3.1.1-6.3.1.5, показаний вплив збільшення кількості перехресно розташованих шарів на стійкість. Рис. 6.21 (а), (б) описують анізотропну оболонку з відношенням товщини до радіуса $h/r=1/40$ для випадків прикладання крайового зсувного навантаження за додатним «АПР⁺» та від'ємним «АПР⁻» напрямками відповідно, а рис. 6.21 (в) (АПР⁺), 6.20 (г) (АПР⁻) – $h/r=1/30$.

Нумерація кривих відповідає кількості перехресно-армованих шарів. Криві $1'$ на цих рисунках описують величини критичних навантажень для ортотропної оболонки «ОПР», інші криві отримано згідно пропонованого підходу «АПР». Графіки 1 ілюструють величини критичних величин $S_{z\theta}^{cr}$ для одношарової оболонки. Для випадків додатного варіанту прикладання торцевого зсувного навантаження криві 1 показують найменші величини критичних сил з усіх розглянутих варіантів пакетів оболонок, в межах зміни кута ψ від нуля до сорока-п'ятидесяти градусів залежно від відношення h/r . Подальше збільшення ψ призводить до збільшення критичних навантажень, які перевищують, вираховані для дво- та чотиришарових циліндрів. Водночас, у випадках від'ємного прикладання торцевого навантаження, в межах зміни кута ψ від нуля до сорока-п'ятидесяти градусів, криві 1 вказують на найвищі величини критичних навантажень $S_{z\theta}^{cr}$ для одношарового циліндра порівняно із усіма

іншими розглядуваними структурними пакетами. В подальшому діапазоні зміни кута критичні навантаження зменшуються та залишаються більшими лише за такі ж, що вираховані для тришарового структурного пакету. Результати дослідження стійкості двошарових оболонок описані кривими 2. У випадку додатньо прикладеного торцевого навантаження двошарові оболонки сприймають найменші величини критичних значень $S_{z\theta}^{cr}$ порівняно із пакетами з більшою кількістю шарів практично на всьому діапазоні зміни кута ψ . При дії від'ємного навантаження критичні величини $S_{z\theta}^{cr}$ для двошарової циліндричної оболонки знаходяться між такими, що отримані для тришарових (крива 3) та п'ятишарових (крива 5) конструкцій. Графіки 4 відображають залежність критичних навантажень $S_{z\theta}^{cr}$ від кута ψ чотиришарової оболонки і є близькими до результатів ортотропного розрахунку «ОПР» (крива 1'), але структурні конфігурації кривих 4 та 1' різняться. Криві 7 та 8, що представляють результати визначення критичних навантажень крайового зсуву згідно підходу «АПР» найближче розташовані до кривих 1' (підхід «ОПР») та за конфігурацією ці три криві цілком подібні. Зауважимо лише, що у випадку прикладання торцевого зсувного навантаження у додатному напрямку криві 7 та 8 (підхід «АПР») розташовані дещо вище від кривої 1' (підхід «ОПР»), а при від'ємному навантаженні дещо нижче. Максимальні розбіжності між порівнюваними результатами не перевищують 6,3%. Це підтверджує висновки зроблені в [31]. Згідно з ними, збільшення кількості шарів до семи-восьми у випадку розрахунків на стійкість веде до того, що анізотропні оболонкові конструкції, з певною точністю, можливо розраховувати як ортотропні.

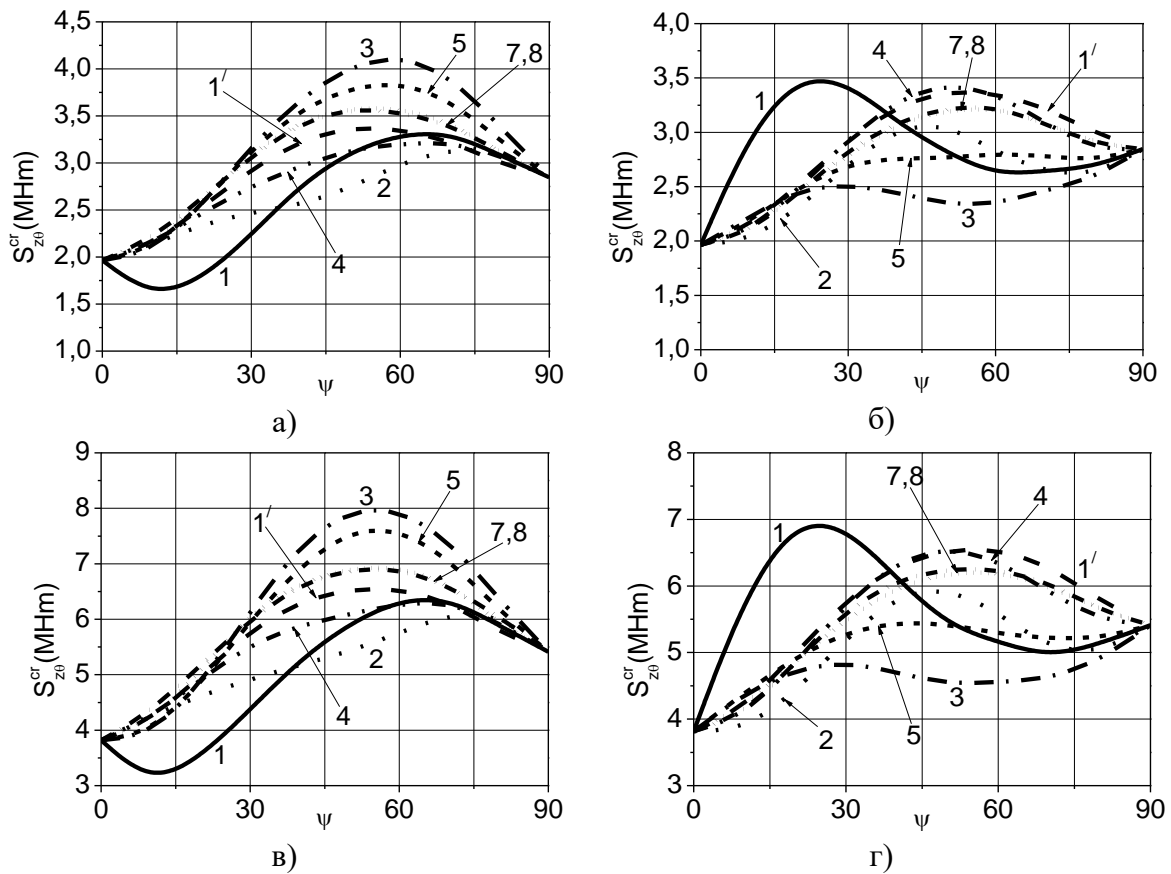


Рис. 6.21. Величини критичних навантажень крайового зсуву $S_{z_0}^{cr}$ для одно- (1), дво- (2), три- (3), чотири- (4), п'яти- (5), семи- (7), восьмишарової (8) оболонки та результати отримані на основі підходу «ОПР» (1') для навантаження прикладеного за додатним напрямком $h/r=1/40$ (а), $h/r=1/30$ (в) та за від'ємним напрямком $h/r=1/40$ (б), $h/r=1/30$ (г)

6.4. Висновки до розділу 6

В розділі приведені результати розрахунку на стійкість циліндричних оболонок з композитів, утворених перехресним укладанням шарів волокнистого матеріалу, на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Проаналізована стійкість циліндричних оболонкових конструкцій, що виготовлені з композитних матеріалів для різних схем армування та структурній конфігурації пакету шарів. Розглянуто такі випадки навантаження: зовнішній боковий тиск, осьовий тиск і торцеве зсувне навантаження (крутний момент). Досліджено вплив анізотропії матеріалу використовуваного виду на критичні величини навантажень для різної кількості шарів та товщини циліндричних оболонкових конструкцій при урахуванні усіх механічних

характеристик закону Гука (підхід «АПР») в просторовій постановці. Отримані результати розрахунків порівняно із критичними величинами, здобутими на основі ортотропного підходу «ОПР» розрахунку оболонок, що також спирається на тривимірні рівняння теорії пружності.

Проведені дослідження дозволяють встановити, що пропонуваній підхід «АПР» до розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок веде до отримання менших величин критичних навантажень розподіленого бокового та осевого тисків у порівнянні із ортотропним підходом «ОПР». Так, для одношарових циліндрів під дією розподіленого бокового тиску максимальне розходження між результатами «АПР» та «ОПР» незначно зростає із збільшенням відношення їх товщини h до радіусу r серединної поверхні для $h/r=1/40$ від 11,6% до 12,3% при $h/r=1/30$. Величини критичних навантажень осевого тиску зменшуються для $h/r=1/40$ від 117% до 99% при $h/r=1/30$. У випадку дії торцевого зсувного навантаження його критичні величини, вираховані згідно з підходом «АПР» виявляються більшими за здобуті за ортотропним підходом «ОПР». Максимальна розбіжність виникає у випадку «від'ємного» прикладання торцевого зсувного навантаження до одношарової оболонки з відношенням $h/r=1/40$ і складає 58%.

Збільшення кількості шарів з перехресним укладанням армованого матеріалу до семи-восьми, у випадку розподіленого бокового та осевого тисків, веде до зменшення вказаних розбіжностей між результатами отриманими за підходами «АПР» та «ОПР». Результати здобуті за пропонуваним підходом «АПР», залишаючись меншими, впритул наближаються до критичних значень отриманих згідно ортотропного підходу «ОПР» до розрахунку оболонок. Різниця між критичними величинами, для структурних пакетів з семи-восьми шарів, у випадку розподіленого бокового тиску не перевищує 1,1%, а для осевого тиску 6%. Така сама закономірність має місце і при дії крайового зсувного навантаження. При цьому у випадку зовнішнього навантаження прикладеного за «додатним» напрямком критичні значення $S_{z\theta}^{cr}$ для семи-, восьмишарових пакетів дещо більші за такі ж, але

отримані згідно ортотропного підходу. При «від'ємному» навантаженні $S_{z\theta}^{cr}$ визначені за «АПР» є меншими за здобуті за «ОПР». Водночас ці розходження є незначними і не перевищують 6%.

Зауважимо лише, що у випадку розподіленого бокового тиску, збільшення кількості шарів, симетрично розташованих відносно серединної поверхні, головні напрями пружності яких напрямлені під кутами « $\pm \psi$ », до двох, запропонований підхід призводить до зменшення величин критичних навантажень у порівнянні із одношаровою структурою оболонки. Максимальна розбіжність між результатами для одно- та двошарового пакетів знаходиться в межах 33%. Подальше збільшення кількості перехресно армованих шарів веде до поступового зближення результатів запропонованого «АПР» підходу до отриманих згідно ортотропного «ОПР» розрахунку оболонок.

Приведено результати дослідження величин критичних навантажень зовнішнього розподіленого бокового тиску для неоднорідних за товщиною циліндрів з шарами із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) пружні властивості яких неперервно-змінні у радіальному напрямку. Розглянуто випадки, коли складовими ФГМ є комбінації металу і кераміки та вуглецевих нанотрубок і кераміки. Механічні характеристики складових ФГМ були визначені для температури $T=293^0\text{K}$ (20^0C). Проведено порівняння отриманих результатів з критичними навантаженнями для суцільної циліндричної боропластикової оболонки. Встановлено, що оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ сприймають більші величини критичних навантажень порівняно із іншими типами конструкцій, а менші мають місце для суцільної боропластикової конструкції. Розбіжність між величинами критичних навантажень q^{cr} для боропластикової оболонки із шаром нанокерамічного ФГМ у порівнянні із суцільною боропластиковою знаходиться в межах 57% і порівняно із боропластиковою із шаром кераміко-металевого ФГМ не перевищує 49%.

ВИСНОВКИ

Основні наукові результати і висновки дисертаційної роботи зводяться до такого:

1. Вперше розроблено підхід до побудови системи з шести диференціальних рівнянь руху просторової лінійної теорії пружності, що описують НДС і вільні коливання товстостінних циліндричних анізотропних оболонок. Підхід ґрунтується на модифікації варіаційного принципу Ху – Васідзу, що дозволяє записувати відповідні рівнянням в тривимірній постановці граничні умови та співвідношення закону Гука. За використанням отриманої системи і відповідних їй граничних умов можуть бути встановлені величини напружень і переміщень від силової та температурної дій, в просторовій постановці при різних видах граничних умов на торцях товстостінної шаруватої композитної анізотропної циліндричної оболонки та також з ФГМ.

2. На основі модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу вперше розроблено підхід до виведення системи з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості лінійної просторової теорії пружності, що описують стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок.

3. Вперше представлено підхід, що базується на використанні процедури аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, щодо зменшення розмірності тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги, отриманих з просторової системи рівнянь руху шляхом нехтування доданками, що враховують температурну дію та частоту вільних коливань. У випадку дії на оболонки розподіленого бокового тиску, в пропонованому підході, використано розкладення функцій напружень і переміщень в подвійні тригонометричні ряди Фур'є за коловим напрямом та уздовж твірної циліндричної оболонки так, щоб вони задовольняли умовам на торцях. Отримана нормального виду Коші одновимірна система рівнянь дозволяє визначати компоненти напружено-деформованого стану від силової дії на товстостінні анізотропні шаруваті циліндричні оболонкові конструкції. При чому, залежно від типу граничних

умов на торцях оболонки розв'язуюча одновимірна система НДС може бути шостого або дванадцятого порядків. Для випадків осьового тиску та розподіленого по торцях зсувного навантаження (кручення) запропоновано підхід до зменшення розмірності тривимірної системи рівнянь рівноваги, отриманих з системи рівнянь руху, що включає в себе припущення про незмінність параметрів НДС циліндричної оболонки в коловому напрямі та використання методу прямих уздовж твірної зазначеної конструкції.

4. Вперше, при використанні аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, представлено підхід щодо зменшення розмірності тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги, отриманих з просторової системи рівнянь руху шляхом нехтування доданками, що враховують частоту вільних коливань, у випадку температурної та термосилової дії. Отримана нормального виду одновимірна система рівнянь дозволяє визначати компоненти напружено-деформованого стану від температурної та термосилової дії товстостінних анізотропних циліндричних оболонок.

5. На основі просторової системи рівнянь руху, що виведена за використанням модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, за використання аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, представлено підхід до отримання нескінченної одновимірної системи диференціальних рівнянь, що дозволяє визначати частоти вільних коливань товстостінних шаруватих анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій.

6. Вперше, при використанні метода Бубнова – Гальоркіна, викладений підхід стосовно приведення тривимірної системи диференціальних рівнянь стійкості до одновимірної в нормальній формі Коші. Відповідно до нього, функції напружень і переміщень розкладено в подвійні тригонометричні ряди Фур'є вздовж твірної оболонки та врахована їх періодичність за коловим напрямом. Для встановлення напружень, що описують докритичний НДС при осьовому тиску та розподіленому торцевому зсувному навантаженні (крученні), використано чисельний метод прямих із процедурою аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, а також метод дискретних перетворень Фур'є.

7. Для реалізації одновимірних розв'язуючих систем диференціальних рівнянь про напружено-деформований стан від силового та температурного впливів, а також вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок за радіальним напрямом використано числовий метод дискретної ортогоналізації, який було відповідним чином адаптовано. На цій основі створено програмні комплекси для персональних комп'ютерів (ПК), що дозволяють розв'язати нові задачі щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану від силового, температурного і термосилового впливу, а також вільних коливань товстостінних анізотропних композитних циліндричних оболонок.

8. За використання розроблених комп'ютерних програм, в яких реалізовано пропонувані підходи, вперше проведені дослідження в просторовій постановці напружено-деформованого стану товстостінних конструктивно анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих композитів. Анізотропія характеризується наявністю однієї площини пружної симетрії. Оболонки знаходяться під дією: розподіленого бокового, осевого тисків, розподіленого по торцю зсувного навантаження (кручення) та мають чотири види граничних умов на торцях. Отримано та проаналізовано результати дослідження НДС, від вищезазначених дій, в точках уздовж твірної та за товщиною оболонки залежно від кількості перехресно-укладених шарів. Показано, що всупереч уявленню про те, що збільшення кількості укладених шарів до семи – восьми веде до можливості розрахунку анізотропної оболонки згідно з ортотропним підходом, анізотропні складові НДС не зникають і це повинно бути враховано при оцінці несучої здатності конструкцій.

9. Спираючись на розроблений підхід, вперше проведені дослідження та проаналізовано напружено-деформований стан від температурної та термосилової дії в просторовій постановці товстостінної анізотропної циліндричної оболонки, виготовленої з композитного матеріалу, який захищений з боку високотемпературного поля шаром кераміко-металевого або нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). При цьому,

вперше розглянуто випадок зміни кута орієнтації армуючих кераміку нанотрубок відносно твірної, що веде до утворення шару ФГМ з однією площиною пружної симетрії, паралельною серединній поверхні оболонки.

10. На основі розробленого підходу проведено розрахунки та здійснено аналіз результатів визначення частот вільних коливань в просторовій постановці товстостінних анізотропних циліндричних оболонок з волокнистих композитів та з функціонально-градієнтних матеріалів, які також можуть проявляти анізотропні властивості в осях криволінійної циліндричної системи координат, при різних видах граничних умов на торцях, схемах армування оболонок, конфігурації пакету шарів і геометрії конструкцій за їх товщиною.

11. При використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації розроблено алгоритм та складено комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому вперше в єдиному обчислювальному процесі поєднано встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку нових задач стійкості нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці.

12. Використовуючи розроблений пакет комп'ютерних програм, вперше досліджено в просторовій постановці стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок, виготовлених з волокнистих композитних і функціонально-градієнтних матеріалів, які також можуть проявляти анізотропні властивості в осях криволінійної системи координат циліндрів.

13. Спираючись на проведені дослідження, можливо зробити такі висновки:

- вперше було представлено, що урахування анізотропії композитних і функціонально-градієнтних матеріалів при розрахунках НДС та стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці є важливим фактором оцінки їх несучої здатності;

- вперше було показано, що дотичні зсувні напруження $\tau_{z\theta}$, які у випадку осьового або розподіленого зовнішнього тисків на анізотропну циліндричну оболонку, можливо відшукати лише за використання запропонованого просторового підходу, не зникають при збільшенні кількості перехресно

армованих шарів однакової товщини. У випадку розподіленого бокового тиску напруження $\tau_{z\theta}$ стають співвимірними нормальним напруженням σ_{zz} та досягають близько 20% від максимальних значень напружень $\sigma_{\theta\theta}$, а при осьовому тиску $\tau_{z\theta}$ складають 42% від напружень σ_{zz} . При прикладенні до анізотропної циліндричної оболонки розподілених на торцю зсувних зусиль (кручення) представлений просторовий підхід дозволяє визначити величини нормальних напружень σ_{zz} та $\sigma_{\theta\theta}$, що неможливо відповідно до розрахунків за ортотропною моделлю. Зі збільшенням кількості перехресно-армованих шарів однакової товщини зазначені напруження не зникають, а зростають, і для σ_{zz} досягають 75%, а для $\sigma_{\theta\theta}$ 106% від дотичних напружень $\tau_{z\theta}$;

- вперше встановлено, що спільна силова та температурні дії на анізотропну циліндричну оболонку з волокнистого композиту, захищену з боку температурного поля високої інтенсивності шарами кераміко-металевого або нанокерамічного функціонально-градієнтного матеріалу, суттєво змінює напружено-деформований стан конструкції. Так розбіжності між порівнюваними напруженнями σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та $\tau_{z\theta}$ в температурному та термосиловому станах досягають 69%;

- найбільші відхилення між частотами вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок, за пропонуваним підходом та ортотропною моделлю, мають місце у випадках одношарових та двошарових пакетів і знаходяться в межах 9% та 12% відповідно. Встановлено, що товстостінні циліндричні оболонкові конструкції з волокнистого композиту боропластику мають менші значення частот вільних коливань порівняно із такими ж, але підсиленими зовнішнім шаром з ФГМ, розбіжність знаходиться в межах 16,7%;

- вперше отримано дані, що найбільша розбіжність між величинами критичних значень, обчислених згідно із запропонованим та ортотропним підходами, має місце у випадку осьового тиску для анізотропних одно- та двошарових циліндричних оболонок, де вона складає 117% та 41% відповідно. Розходження між критичними навантаженнями розподіленого бокового тиску

для таких же оболонок знаходяться в межах 13% та 60%. Порівняння критичних значень для цих же конструкцій під дією торцевих зсувних навантажень вказує на відмінність між підходами «АПР» та «ОПР» в межах 58% і 27%. Критичні навантаження зовнішнього розподіленого бокового тиску для нетонких циліндричних оболонок з композитного матеріалу боропластику є меншими порівняно з такими ж конструкціями із зовнішнім шаром ФГМ, а їх розбіжність сягає 57%.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
2. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. *Докл. АН Арм.ССР*. 1954. Вып. 19, № 1. С. 3-12.
3. Абрамян Б.Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. *Докл. АН Арм.ССР*. 1958. Вып. 24, № 2. С. 65-71.
4. Аврамов К.В., Чернобривко М.В., Успенський Б.В. Вільні коливання функціонально-градієнтних наноармованих циліндричних оболонок. *Космічна наука і технологія*. 2019. Т. 25, № 2. С. 23-37.
5. Айгубова А.Ч., Козлов Г.В., Магомедов Г.М., Заиков Г.Е. Тепловое расширение нанокompозитов фенилон/углеродные нанотрубки. *Вестник технологического университета*. 2015. Т.18, №16. С. 137-140.
6. Александров А.Я., Зиновьев Б.М. Решение трехмерных пространственных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. В кн.: *Аналитические и численные исследования в механике горных пород*. Новосибирск, 1981. С. 54-64.
7. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 462 с.
8. Алфутов Н.А., Дымников И.А. Устойчивость металлокомпозитных оболочек при температурно-силовых воздействиях. *Механика конструкций из композиционных материалов*. 1992. № 1. С. 5-22.
9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
10. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
11. Амбарцумян С.А., Хачатурян А.А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение*. 1960. № 1 С. 113-121.

12. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Ортоотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
13. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. М.: Наука, 1988. 208 с.
14. Арбоч Й. Исследование устойчивости оболочек: теория и практика. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта: пер. с англ. / под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, Физматгиз, 1991. 424 с.
15. Ашкенази Е.К., Ганов З.В. Анизотропия конструкционных материалов: справочник. Л.: Машиностроение, 1980. 248 с.
16. Бабич Д.В. О рациональном армировании работающих на сжатие оболочек. *Механика композитных материалов*. 1991. № 1. С. 157-160.
17. Бабич И.Ю. Анализ трехмерных и прикладных постановок в теории устойчивости стержней из композиционных материалов. *Прикл. механика*. 1989. Вып. 25, № 2. С. 7-12.
18. Бабич И.Ю. Анализ расчетных схем в теории устойчивости стержней, пластин и оболочек из композиционных материалов. *Прикл. механика*. 1993. Вып. 29, № 10. С. 94-100.
19. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Устойчивость стержней, пластин и оболочек из композиционных материалов (трехмерная постановка): Обзор. *Прикл. механика*. 1983. Вып. 19, № 10. С. 3-19.
20. Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Устойчивость элементов конструкций из композитных материалов (трехмерная постановка). *Прикл. механика*. 2002, Вып. 38, № 9, С. 28-58.
21. Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Дериглазов Л.В. Исследование устойчивости трехслойных сферических оболочек. *Прикл. механика*. 1983. Вып. 19, № 7. С. 19-23.
22. Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Дериглазов Л.В. Устойчивость трехслойных анизотропных цилиндрических оболочек. *Прикл. механика*. 1983. Вып. 19, № 9. С. 13-20.

23. Бабич И.Ю., Гузь А.Н., Чернушенко И.И., Шульга Н.А. Об оценке устойчивости теории устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении. *Прикл. механика*. 1974. Вып. 10, № 10. С. 16-21.
24. Бабич И.Ю., Дериглазов Л.В. Об устойчивости трехслойных анизотропных цилиндрических оболочек. *Докл. АН УССР. Сер. А*. 1982. № 2. С. 26-29.
25. Бабич И.Ю., Килин В.И. Об устойчивости трехслойной ортотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. *Прикл. механика*. 1985. Вып. 21, № 6. С. 44-49.
26. Бабич И.Ю., Килин В.И. Исследование влияния неосесимметричного расположения слоев на устойчивость трехслойных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. *Теорет. и прикл. механика*. 1988. Вып. 19. С. 103-106.
27. Баженов В.А. Варіаційні основи будівельної механіки. Підручник. К.: Каравела, 2014. 877 с.
28. Баженов В.А., Кривенко О.П. Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях. Київ: Каравела, 2020. 180 с.
29. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. Київ: ЗАТ Віпол, 2010. 316 с.
30. Баженов В.А., Максимюк Ю.В., Мартинюк І.Ю., Максимюк О.В. Напіваналітичний метод скінченних елементів просторових задачах деформування, руйнування та формозмінення тіл складної структури. К.: Каравела, 2021. 280 с.
31. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2010. 352 с.
32. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Нелінійні рівняння деформування тонких багат шарових поребрених оболонок при

- термосилових навантаженнях. *Опір матеріалів і теорія споруд*. К.: КДТУБА. 1998. Вип. 64. С. 116-127.
33. Белоконь А.В., Маликов Е.П. Метод интегральных уравнений в задачах осесимметричной деформации трансверсально-изотропного цилиндра. *Изв. АН Арм.ССР, сер.мех.* 1982. Вып. 35, № 2. С.17-26.
34. Белостоцкий А.М. Конечноэлементные модели пространственных пластин, оболочек и массивов, построение, программная реализация и исследования. *Сб. науч. тр. Гидропроекта*. 1985. Вып. 100. С. 24-35.
35. Бениаминов Д.М. Уравнения смешанного метода в теории упругости. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1975. № 5. С. 43-46.
36. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
37. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 томах / Березин И.С., Жидков Н.П. М.: Физматгиз, 1962.
38. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
39. Биргер Б.И., Баранов В.П. Расчет температурных напряжений в ортотропном цилиндре. *Механика полимеров*. 1972. № 2. С. 310-314.
40. Блох В.И. Теория упругости. Харьков: изд-во Харьковского ун-та, 1964. 483 с.
41. Бокин Н.Н., Егоров Л.А., Иванов В.К., Афанасьев Ю.А. Ортотропный конечный толстостенный цилиндр в стационарном температурном поле. *В кн.: Тр. Пермского политехнического института*. 1977. № 214. С. 32-39.
42. Болотин В.Л., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 376 с.
43. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. К.: Наук. думка, 1971. 304 с.
44. Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. К.: Наук. думка, 1978. 212 с.
45. Ванин Г.А., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных

- материалов с несовершенствами. К.: Наук. думка, 1987. 200 с.
46. Васідзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
 47. Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Решение задачи о напряженном состоянии анизотропных неоднородных цилиндров. *Прикл. механика*. 1984. Вып. 20, №8. С. 11-18.
 48. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 264 с.
 49. Васильев В.В., Лурье С.А. Осесимметричная деформация ортотропной слоистой цилиндрической оболочки. *Мех. полимеров*. 1972. № 5. С.816-823.
 50. Вашакмадзе Т.О. Пакет прикладных программ расчета пространственных сооружений. Тбилиси, 1982. Ч.1. 117 с.
 51. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
 52. Вигак В.М., Ригин А.М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре. В кн.: *Матем. методы и физ.-мех. поля*. Киев: Наук.думка. 1982. № 15. С. 63-67.
 53. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.-Л.: Гостехиздат, 1979. 784 с.
 54. Волков А.Н. Построение теории многослойных толстых оболочек. *Тр. Ун-та дружбы народов им.Патриса Лумумбы*. 1977. Вып. 83, № 10. С. 17-88.
 55. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
 56. Вольмир А.С. О влиянии начальных неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при внешнем давлении. *Докл. АН СССР*. 1957. Вып. 113, № 2. С. 291-293.
 57. Галеркин Б.Г. Собрание починений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т.1. 322 с.
 58. Галилеев С.М. Метод операторных степенных рядов для решения задач теории упругости и строительной механики. *Строительная механика сооружений*. 1982. С. 30-33.

59. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Успехи мат. наук.* 1961. Вып. 16, № 3. С. 171-174.
60. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Физматгиз, 1978. 360 с.
61. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Численное решение задач статики геометрически нелинейных анизотропных многослойных оболочек вращения. *Механика композитных материалов.* 1981. №4. С. 637-645.
62. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Осесимметричная деформация слоистых оболочек вращения сложной формы. *Механика композитных материалов.* 1981. №4. С. 637-645.
63. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
64. Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В. Про вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки. *Прикладна механіка.* 2022. Т. 58, № 1. С. 48-58.
65. Григоренко А. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук Е. В., Пригода А. П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки. *Прикладная механика.* 2018. Т. 54, № 1. С. 90-100.
66. Григоренко О. Я., Борисенко М. Ю., Бойчук О. В., Шумська А. А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. *Прикладна механіка.* 2022. Т. 58, № 5. С. 27-38.
67. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л. Об одном подходе к решению задачи о свободных колебаниях сплошного неоднородного цилиндра конечной длины. *Доповіді Національної академії наук України.* 2009. № 9. С. 67-72.
68. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А. Осесимметричные свободные колебания цилиндрических оболочек из непрерывно неоднородных материалов. *Прикладная механика.* 2015. Т. 51, № 6. С. 61-71.
69. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А. Свободные осесимметричные колебания полого цилиндра конечной длины из

- функціонально-градиєнтного матеріала. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2015. Т. 58, № 2. С. 64–75.
70. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Коротких Ю. А. Численное решение задачи об осесимметричных свободных колебаниях цилиндра из непрерывно-неоднородного материала на основе сплайн-аппроксимации. *Доповіди Національної академії наук України*. 2015. № 9. С. 39-45.
71. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины. *Доповіди Національної академії наук України*. 2009. № 6. С. 61-67.
72. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А. Распространение упругих волн в анизотропных полых цилиндрах. *Прикладная механика*. 1996. Т. 32, №5. С. 39-44.
73. Григоренко О. Я., Єфімова Т. Л., Коротких Ю. А. Осесиметричні вільні коливання нетонких циліндричних оболонок з неперервно неоднорідного матеріалу несиметричної будови. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 42-50.
74. Григоренко А. Я., Золотой Ю. Г., Пригода А. П., Жук И. Ю., Хоришко В. В., Овчаренко А. В. Экспериментальное исследование собственных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом голографической интерферометрии. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т. 55, № 3. С. 93–98.
75. Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные колебания полых цилиндров из функционально градиентных материалов. *Доповіди Національної академії наук України*. 2012. № 3. С. 57-64.
76. Григоренко А. Я., Мальцев С. А. О свободных колебаниях ортотропных конических оболочек переменной в двух направлениях толщины. *Доповіди Національної академії наук України*. 2009. № 11. С. 60-66.
77. Григоренко А. Я., Мальцев С. А. Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины. *Доповіди Національної академії наук України*. 2009. № 7. С. 63-69.

78. Григоренко А. Я., Пархоменко А. Ю. Численное решение задачи о свободных колебаниях пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке. *Доповіді Національної академії наук України*. 2009. № 12. С. 50-54.
79. Григоренко О. Я., Пархоменко О. Ю., Васильева Л. Я., Борисенко М. Ю. Розв'язання задачі про вільні коливання нетонкої ортотропної пологої оболонки змінної товщини в уточненій постановці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. Т. 59, № 1. С. 121-131.
80. Григоренко А. Я., Соколова Л. В., Романишин М. В. Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины на основе уточненной модели. *Доповіді Національної академії наук України*. 2013. № 10. С. 70-76.
81. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров в пространственной постановке на основании различных подходов. *Прикладная механика*. 2019. Т. 55, № 5. С. 39-46.
82. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 171 с.
83. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек: коллективная монография. Москва: Наука, 1992. 332 с.
84. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Некоторые подходы к решению задач теории тонких оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами. *Прикл.механика*. 2002. Вып. 38, № 11. С. 32-68.
85. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов И.Г. и др. Статика элементов конструкций. К.: «А.С.К.», 1999. Т. 8. 379 с.
86. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. К.: Наук. думка, 1991. 216 с.

87. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев: Вища шк., 1985. 190 с.
88. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. Киев: Академперіодика, 2006. 472 с.
89. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. К.: Наук. думка, 1988, 264 с.
90. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев : Наукова думка, 1978. 264 с.
91. Гринченко В. Т., Комиссарова Г.Л. Оценка пределов применимости приближенных теорий колебаний пластин на основе анализа точных решений. *Динамика и прочность машин*. 1978. Вып. 28. С. 81-89.
92. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев : Наукова думка, 1981. 284 с.
93. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек. К: Наук. думка, 1987. 216 с.
94. Гуляр А.И., Чорный С.М., Сахаров А.С. Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического деформирования. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1978. Вып. 32. С. 3-10.
95. Гузь А.Н. Анализ расчетных схем в теории устойчивости элементов конструкций из композиционных материалов. *Докл. АН УССР. Сер.А*. 1980. № 4. С. 31-36.
96. Гузь А.Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов. К.: Наук. думка, 1990. 630 с.
97. Гузь А.Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. *Прикл.механика*. 2001. Вып. 37, № 1. С. 3-44.
98. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К.: Вища шк., 1986. 511 с.

99. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук.думка, 1971. 276 с.
100. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии: (Обзор). *Прикл. механика*. 2012. Вып. 48, №3. С. 3-78.
101. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев: Вища школа, 1980. 168 с.
102. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6 т. К.: Наук. думка, 1985. Т.4. 280 с.
103. Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. Численное решение задач трехмерной устойчивости упругих тел. *Прикл. механика*. 2001. Вып. 37, № 11. С. 3-32.
104. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 350 с.
105. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я. Наноматериалы. О механике наноматериалов. *Прикл. механика*. 2003. Вып. 39, № 11. С. 39-69.
106. Гузь А.Н., Рущицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. Киев: Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, 2010. 398 с.
107. Гузь А.Н., Пелех Б.Л., Бабич И.Ю., Тетерс Г.А. Об области применимости прикладных теорий в задачах устойчивости стержней и пластинок с низкой сдвиговой жесткостью в случае одноосного сжатия. *Механика полимеров*. 1970. № 1. С. 141-143.
108. Гусар Н.Н., Чехов В.Н. Изгиб двухслойного цилиндра поперечной силой. В кн.: Теоретическая и прикладная механика. М.: Наука, 1968. 288 с.
109. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н. Определение усилий и напряжений в слоях композиционного материала для пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. *Изв. вузов. авиац.техн.* 1978. №2. С.132-135.
110. Заруцкий В.А., Скосаренко Ю.В. О влиянии деформаций поперечного сдвига на устойчивость многослойных ортотропных ребристых

- цилиндрических оболочек. *Прикл. механика*. 1994. Вып. 23, № 4. С. 41-47.
111. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.
112. Идельс Л.В. Численное решение интегральных уравнений основных пространственных осесимметричных задач теории упругости. *Механика деформируемого тела и расчет транспортных сооружений*. Новосибирск. 1982. С.38-44.
113. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1977. 331 с.
114. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
115. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. 1962. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58-69.
116. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. К.: Будівельник, 1992. 216 с.
117. Койтер В.Д. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М.: Изд. иностр. л-ры, 1961. 80 с.
118. Коларов Д. Интегрирование уравнений пространственной граничной задачи теории упругости. *Теоретична и приложна механика*. 1982. № 2. С.104-115.
119. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Пасько Д.А. Прочность полых цилиндров. М.: Машиностроение, 1981. 264 с.
120. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 526 с.
121. Колчин Г.Б. Задачи и методы теории упругости непрерывно неоднородных сред. *Теоретична и приложна механіка*. 1978. № 3. С.76-79

122. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев: Картя Молдованяскэ, 1971. 172 с.
123. Композиционные материалы: справочник / под общей ред. Васильева В.В., Тарнопольского Ю.М. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
124. Композиционные материалы: справочник / гл. ред. Карпинос Д.М. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
125. Композиционные материалы в конструкциях летательных аппаратов: сб. статей. М.: Машиностроение, 1975. 272 с.
126. Коренев Б.Г. Задачи теплопроводности и термоупругости. М.: Наука, 1980. 400 с.
127. Костромин В.П., Мяченков В.И. Устойчивость многослойных оболочек с цилиндрически-анизотропными неоднородными слоями. *Сопротивление материалов и теория сооружений*. 1973. Вып. 21. С. 11-16.
128. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машгиз, 1965. 272 с.
129. Куликов Г.М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек. *Прикл. механика*. 1986. Вып. 22, №12. С.66-72.
130. Кузнецов Е.А. Осесимметричная задача неоднородной теории упругости с переменным коэффициентом Пуассона. *Докл. АН УССР, сер.А*. 1982. № 7. С.40-44.
131. Куценко Г.В. Задача Ламе о термонапряженном состоянии полого конуса. В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций / Куценко Г.В., Степаненко И.З., Улитко А.Ф. – Киев: Наук.думка, в.16, 1976, с.31-36.
132. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
133. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. М.: ОНТИ, 1937. 110 с.
134. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела: изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1977. 415 с.

135. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
136. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
137. Максим'юк Ю. В. Алгоритм розв'язання задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини. *Опір матеріалів та теорія споруд*. 2014. Вип. 92. С. 151-159.
138. Максим'юк Ю. В. Розрахункові співвідношення універсального скінченного елемента на основі моментної схеми скінчених елементів. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. Вип. 94. С. 244-253.
139. Малмейстер А.Х., Тамуж В.Л., Тетерс Г.Л. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
140. Мартиненко А.О., Подворний А.В. Опір матеріалів (спеціальний курс). Рівне, 2010. Частина I. 334 с.
141. Маслов Б.П. Приведенные термопластические свойства волокнистых композитов. *Прикл. механика*. 1982. Вып. 18. № 10. С. 23-28.
142. Методы расчета оболочек: в 5-ти томах. / отв. ред. А.Н. Гузь. Киев: Наукова думка, 1980-1982.
143. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т. / отв. ред. А.Н. Гузь. К.: Наук. думка, 1982. Т1. 368 с.
144. Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т. / отв. ред. А.Н. Гузь. К.: Наук. думка, 1983. Т2. 464 с.
145. Механика композитов: В 12 т. Т.9. Динамика элементов конструкций. / А.Н. Гузь; НАН Украины. Ин-т механики. К.: «А.С.К.», 1999. 379 с.
146. Механика композитов. В 12 т. Т. 10. Устойчивость элементов конструкций. / А.Н. Гузь; НАН Украины. Ин-т механики. К.: Наук. думка: А.С.К., 2001. 375 с.
147. Микишева В.И. Оптимальная намотка оболочек из стеклопластика, работающих на устойчивость под внешним давлением и осевым сжатием. *Механика полимеров*. 1968. № 5. С. 864-875.
148. Немировский Ю.Л., Самсонов В.И. Об устойчивости и колебаниях

- армированных подкрепленных оболочек. *Механика полимеров*. 1975. № 5. С. 878-883.
149. Немиш Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел. *Прикл. механика*. 2000. Вып. 36, № 2. С. 3-38.
150. Никишин В.С., Шапиро Г.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1970. 260 с.
151. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 211 с.
152. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград: Судпромгиз, 1962. 431 с.
153. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 374 с.
154. Образцов И.Ф., Васильев В.Л., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композитных материалов. М: Машиностроение, 1977. 144 с.
155. Пискунов С. О., Бахтаваршоев Т. А., Самофал К. І. Про використання критеріїв міцності анізотропних матеріалів. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2023. Вип. 110. С. 496-506.
156. Пискунов С. О., Валер В. В. Визначення параметрів термопружного стану в неоднорідному температурному полі на основі методу скінчених елементів. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2018. Вип. 28. С. 155-167.
157. Пискунов В.Г., Марчук А. В., Ильченко Я. Л. Свободные колебания толстых слоистых цилиндрических оболочек. *Механика композитных материалов*. 2011. Т. 47, № 2. С. 257-266.
158. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. *Прикл. механика*. 2002. Вып. 38, № 2. С. 22-57.
159. Пискунов С.О., Солодей І. І., Максим'юк Ю. В., Солоденко А. Д. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин. *Опір матеріалів та теорія споруд*. 2013. Вип. 91. С. 62-78.

160. Пискунов С. О., Шкриль О. О. Визначення тріщиностійкості захисної оболонки ядерного реактору при термосиловому навантаженні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2018. Вип. 101. С. 60-66.
161. Подильчук Ю.Н., Голобородько С.А. О трехмерном напряженном состоянии незамкнутой сферической оболочки. *Прикл. механика*. 1979. 15, № 11. С. 38-45.
162. Подворний А.В. До питання стійкості шаруватих оболонок несиметричної структури. Збірник наукових праць *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2008. Вип. 4 (44). С. 128-133.
163. Подворний А.В. До стійкості шаруватих оболонок обертання із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Збірник наукових праць *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2010. Вип. 2 (50). С. 149-154.
164. Подворный А.В., Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек при распределенном внешнем давлении в пространственной постановке. *Международный научный журнал Прикладная механика*. 2017. Т.53 (63), №6. С. 23-39.
165. Подворний А.В., Хоружий М.М. Стійкість шаруватих оболонок обертання із матеріалів з однією площиною пружної симетрії за використанням варіанту уточненої теорії. Збірник наукових праць *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. Рівне. 2012. Вип. 3 (55). С. 159-164.
166. Потейко В.Г. К расчету температурных напряжений в многослойных цилиндрах конечной длины. *В кн.: Ученые записки Томского университета*. 1973. № 73. С. 222-226.
167. Потейко В.Г. Осесимметричная задача упругости для толстостенного цилиндра скрепленного с тонкой оболочкой. *В кн.: Ученые записки Томского университета*. 1973. № 73. С.140-147.

168. Потейко В.Г. Осесимметричное напряженное состояние многослойных цилиндров. *В кн.: Ученые записки Томского университета.* 1973. № 73. С. 162-172.
169. Приварников А.К. Пространственная деформация многослойного основания. *В кн.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск.* 1973. С. 27-45.
170. Прочность и разрушение конструкций из композиционных материалов. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы за 1951-1981 гг. Новосибирск, 1982. 274 с.
171. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. К.: Вища шк., 1986. 191 с.
172. Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. *В кн.: Проблемы механики сплошной среды (К 70-летию акад. Н.И.Мусхелишвили).* М.: АН СССР. 1961. С. 228-239.
173. Рикардс Р.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
174. Ромащенко В.А., Бейнер О.С., Бабич Ю.И. Численно-аналитический метод исследования трехмерной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров. *Проблемы прочности.* 2011. № 4. С. 103-113.
175. Румянцев В.В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред. *Прикл. математика и механика.* 1973. Вып. 37, №6. С. 963-973.
176. Саркисян В.С., Овсепян Л.О. Плоская задача теории упругости неоднородных составных анизотропных тел. *Уч. зап. Ереван. гос. ун-та. естеств. наук.* 1980. № 1. С. 36-45.
177. Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. К.: Вища шк. Головн. изд-во, 1982. 480 с.
178. Семенюк Н.П., Трач В.М. Выпучивание и начальное закритическое поведение цилиндрических оболочек из композитов с одной плоскостью симметрии. *Механика композитных материалов.* 2007. Т. 43, №2. С.213-236.

179. Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость и закритическое поведение композитных цилиндрических оболочек с локальными несовершенствами при внешнем давлении. *Прикладная механика*. 2016. Т. 52, №6. С. 79-92.
180. Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении. *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, №3. С. 86-103.
181. Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость цилиндрических оболочек из армированных материалов при осевом сжатии с учетом особенностей послойной ориентации волокон. *Прикладная механика*. 2006. Т. 42, №3. С. 80-88.
182. Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость цилиндрических оболочек из композитов при несовпадении армирования слоев и координатных линий. *Механика композитных материалов*. 2005. №5. С. 651-662.
183. Семенюк Н.П., Трач В.М., Душек Ю.Я. Устойчивость цилиндрических оболочек из композитов при кручении. *Прикладная механика*. 2005. Т. 41, №6. С. 100-107.
184. Семенюк Н.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. К теории устойчивости композитных цилиндрических оболочек. *Прикладная механика*. 2015. Т. 51, №4. С. 98-111.
185. Семенюк М.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Про особливості розрахунку на стійкість анізотропних циліндричних оболонок при крученні. *Доп. НАН України. Сер. А*. 2005. №9. С. 47-54.
186. Семенюк Н.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при кручении. *Прикладная механика*. 2008. Т. 44, №1. С. 48-73.
187. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Вільні коливання циліндричних анізотропних оболонок в просторовій постановці. *Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доп. VIII Міжнар. наук.-практ. конф.* 2021. Одеса: ОДАБА. С. 350-353.

188. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. До розрахунку на стійкість пружних анізотропних оболонок обертання в тривимірній постановці при осьовому стисканні. *Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences*. 2017. Vol. 14, Issue 132. P. 89-92.
189. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки. *Прикл. механіка*. 2023. Вип. 59, №1. С. 91-102.
190. Семенюк Н.П., Трач В.М., Подворный А.В. Об устойчивости цилиндрических оболочек из волокнистых композитов с одной плоскостью симметрии. *Международный научный журнал Прикладная механика*. 2005. Т. 41, №6. С. 113-120.
191. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. IV Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Київ, 2017. С. 93.
192. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Стійкість циліндричних анізотропних оболонок під дією зсувного напруження в тривимірній постановці. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. Київ. 2017. Вип. 3 (39). С. 209-213.
193. Семенюк Н.П., Трач В.М., Подворный А.В. Устойчивость слоистых оболочек из материалов с одной плоскостью симметрии в пространственной постановке. *Збірник наукових праць Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2014. Вип. 28. С. 405-421.
194. Семенюк Н.П., Трач В.М., Подворный А.В. Устойчивость слоистых цилиндрических анизотропных оболочек под действием осевых сжимающих нагрузок. *Международный научный журнал Прикладная механика*. 2019. Т.55, №2. С.113-125.
195. Слободянский М.Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с

- частными производными и его применение к задачам теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1939. Вып. 1, № 3 С. 75-83.
196. Соловей М.О. Стійкість і закритична поведінка пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: КНУБА. Київ, 2008. 36 с.
197. Соловей М.О., Кривенко О.П. Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. К.: КНУБА*. 2003. Вип. 72. С. 83-96.
198. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 1. / под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
199. Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. Кн. 2. / под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
200. Стеклов В.А. О равновесии упругих тел вращения.- Сообщ. Харьков.матем.об-ва, II серия, 1882, т.Ш, № 4, 5.
201. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. К.: Наук. думка, 1972. 501 с.
202. Тимошенко С.П. Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наук.думка, 1975. 563 с.
203. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
204. Терегулов И.Г. Об одной вариационной теореме нелинейной теории упругости. *Прикл. математика и механика*. 1962. Вып. 26, №1. С. 169-171.
205. Тетерс Г.А. Пластины и оболочки из полимерных и композитных материалов (Обзор). *Механика полимеров*. 1977. № 3. С. 486-493.
206. Тонти Э. Вариационные принципы в теории упругости. *Механика. Период. сб. перев. иностр. статей*. 1969. Вып. 5. С. 124-138.
207. Трач В.М. Об устойчивости оболочек вращения из композитных материалов. *Прикладная механика*. 2008. Т. 44, №3. С. 109-124.
208. Трач В.М. Устойчивость цилиндрических оболочек из материала с одной плоскостью упругой симметрии при осевом сжатии и кручении. *Прикладная механика*. 2006. Т. 42, №8. С. 115-121.

209. Трач В.М., Бондарський О.Г., Хоружий М.М. Використання уточненої теорії типу Тимошенко до побудови системи рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання. Збірник наукових праць *Ресурсоеконом. матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2013. Вип. 27. С. 382–392.
210. Трач В.М., Подворний А.В. Вільні коливання циліндричних оболонок із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Збірник наукових праць VII міжнародної науково-технічної конференції «*ABIA-2007*». Київ, 2007. С. 14.62-14.65.
211. Трач В.М., Подворний А.В. Використання 3D методики до розрахунку на стійкість товстих анізотропних оболонок під дією кручення. Збірник наукових праць *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2018. Вип. 36. С. 295-301.
212. Трач В.М., Подворний А.В. Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності. Київ «Каравела», 2016. 434 с.
213. Трач В.М., Подворний А.В. Просторові рівняння стійкості анізотропних товстих циліндричних оболонок під дією осьового тиску. Збірник наукових праць *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2022. Вип. 41. С. 197-212.
214. Трач В.М., Подворний А.В. Стійкість оболонок обертання виготовлених з матеріалу несиметричної структури. *International Conference, Dynamical system modeling and stability investigation: thesis of conference reports*. Kiev, 2005. С. 339.
215. Трач В.М., Подворний А.В. Стійкість циліндричних анізотропних оболонок при крученні в тривимірній постановці. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2014. С. 191-193.
216. Трач В.М., Подворний А.В., Бондарський О.Г. Варіаційний принцип стосовно встановлення параметрів вільних коливань товстостінної пружної анізотропної циліндричної оболонки. Збірник наукових праць

- Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2021. Вип. 40. С. 197-212.
217. Трач В.М., Подворний А.В., Бондарський О.Г. Вільні коливання анізотропних оболонок обертання нульової гаусової кривини із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Міжвузівський збірник *Наукові нотатки*. Луцьк: ЛДТУ. 2007. Вип. 20, №2. С. 222-226.
218. Трач В.М., Подворний А.В., Бондарський О.Г. Деформування нетонких анізотропних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, за термосилової дії. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023». Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Львів. 2023. С. 97-98.
219. Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». До 160-річчя з дня заснування кафедри механіки Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 2023. С. 57.
- 220.** Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б. Стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці під розподіленим боковим тиском. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. 2023. Вип. 2. С. 152-155.
- 221.** Трач В.М., Подворний А.В., Жукова Н.Б. Тривимірна стійкість нетонких анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском. XXIII Міжнародна науково-технічна конференція «*Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта*» в рамках ФОРУМУ ІНЖЕНЕРІВ МЕХАНІКІВ, присвяченого 125-річчю заснування КПІ ім. Ігоря Сікорського навчально-наукового механіко-машинобудівного інституту. 2023. С. 33-36.
222. Трач В.М., Подворний А.В., Мерзлюк В.В. 3D-модель напруженого стану товстостінної анізотропної циліндричної оболонки при крученні. Міжнародна конференція «*Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при*

- проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво».* Київ. НТУ. 2022. С. 171-176.
223. Трач В.М., Подворний А.В., Мерзлюк В.В. Напружено-деформований стан товстих анізотропних композитних циліндричних оболонок, захищених функціонально-градієнтним матеріалом, під термосиловою дією. Збірник наукових праць *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Збірник наукових праць. Випуск 39. – НУВГП.- Рівне – 2021.- С.197-212.
224. Трач В.М., Мерзлюк В.В., Подворний А.В. Устойчивость элементов тонкостенных конструкций. Міжвузівський збірник *Наукові нотатки*. Луцьк: ЛДТУ. 2007. Вип. 20, №2. С. 96-105.
225. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.
226. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Потенціальна енергія деформації пружних анізотропних нетонких оболонок. Міжвузівський збірник *Наукові нотатки*. Луцьк: ЛДТУ. 2011. Вип. 33. С. 272-276.
227. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Про один варіант рівнянь стійкості анізотропних оболонок обертання із волокнистих композитів. Збірник наукових праць *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2010. Вип. 20. С.112-119.
228. Трач В.М., Семенюк М.П., Подворний А.В. Використання 3D методики до розрахунку напруженого стану шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску. Збірник наукових праць *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. Рівне. 2019. Вип. 37. С. 296-306.
229. Трач В.М., Семенюк М.П., Подворний А.В. До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій постановці. V Міжнародна конференція «Актуальні проблеми інженерної механіки». Одеса. 2018. С. 184-186.
230. Трач В.М., Семенюк М.П., Подворний А.В. До напруженого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску в просторовій

- постановці. Збірник наукових праць *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса. 2018. Вип. 72. С. 68-76.
231. Трач В.М., Хоружий М.М. Стійкість анізотропних оболонок обертання середньої товщини. Науково-технічний збірник *Комунальне господарство міст*. Серія: Архітектура і технічні науки. 2013. №112. С. 23–27.
232. Трач В.М., Хоружий М.М. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок із шаруватих волокнистих композитів при крученні. Науково-технічний збірник *Комунальне господарство міст*. Серія: Архітектура і технічні науки. 2010. №90. С. 203–209.
233. Трач В.М., Хоружий М.М. Стійкість анізотропних циліндричних оболонок під дією осьового стиску. Збірник наукових праць *Ресурсоеконом. матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2014. №28. С. 421–428.
234. Холлидей Л., Робинсон Дж. Тепловое расширение полимерных композиционных материалов. В кн.: *Промышленные полимерные композиционные материалы*. / под ред. Ричардсон М. М.: Химия, 1980. с. 241-283.
235. Хорошун Л.П. Композитные материалы стохастической структуры: в 3-х т. Т1. *Механика композитных материалов и элементов конструкций*. К.: Наук. думка, 1982. С. 176-190.
236. Хорошун Л.П. Зернистые материалы / Хорошун Л.П., Маслов Б.Л. *Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т.* К.: Наук. думка, 1982. Т1. С. 191-284.
237. Шульга М.О. Змішана система рівнянь коливань анізотропних тіл з однією площиною симетрії пружних властивостей (моноклінна система) і її властивості *Доповіді Національної академії наук України*. 2011. № 3. С. 63-67.
238. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. К.: Наук. думка, 1981. 200 с.
239. Alam N., Asnani N.T. Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Cylindrical Shell. *Journal of Composite Materials*. 1987. Vol. 21, № 4. P. 348-361.

240. Alashti R.A., Khorsand M., Tarahhomi M.H. Three-dimensional asymmetric thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating cylindrical shell. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2013. Vol. 51, № 1. P. 143-158.
241. Amada S., Munekata T., Nagase Yukito, Ichikawa Y., Kirigai Atsushi, Zhifei Yang. The Mechanical Structures of Bamboos in Viewpoint of Functionally Gradient and Composite Materials. *Journal of Composite Materials*. 1996. Vol. 30 № 7. P. 800-819.
242. Amandeep, Abhay, Srikant S.P. Analysis of functionally graded cylinders for different gradation law under coupled thermo-mechanical loading. *Asian Journal of Engineering and Applied Technology*. 2018. Vol. 7, № 2. P. 21-25.
243. Behnam Sobhani Aragh, Aida Zeighami, Mohammad Rafiee, M.H. H. Yas, Magd Abdel Wahab. 3-D thermo-elastic solution for continuously graded isotropic and fiber-reinforced cylindrical shells resting on two-parameter elastic foundations. *Applied Mathematical Modelling*. 2013. Vol. 37, № 9. P. 6556-6576
244. Bepalova E.I., Boreiko N.P. Free Frequencies of Composed Anisotropic Shell Systems Basing on Different Models of Straining. *Int. Appl. Mech.* 2019. Vol. 55, № 1. P. 41-54.
245. Bodaghi M., Saidi A.R. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*. 2010. Vol. 34. P. 3659-3673.
246. Brischetto S., Torre Roberto 3D shell model for the thermo-mechanical analysis of FGM structures via imposed and calculated temperature profiles. *Aerospace Science and Technology*. 2018. P. 85.
247. Chi S.-H., Chung Y.-L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 3657-3674.
248. Czechowski L., Kowal-Michalska K. Static and dynamic buckling of rectangular functionally graded plates subjected to thermal loading. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45, № 6. P. 666-673.

249. Duong, V. Q., Tran, N. D., & Doan, T. L. Static investigation of a functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell, double-ended clamped subjected to external pressure loads. *Journal of Science and Technique*. 2022. Vol. 17 № 5. P. 324.
250. El-Galy Islam M., Saleh Bassiouny I., Ahmed Mahmoud H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*. 2019. № 1. P. 1378.
251. Fukushima T., Kuroda S., Kitahara S. *FGM Forum Tokyo, FGM'90*, Proceedings of the 1st International Symposium on Functionally Gradient Materials. 1990. Sendai, 1990. P. 145-150.
252. García-Macias E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.* 2017. P. 123-138.
253. Gibson L.J., Ashby M.F., Karam G.N., Wegst U., and Shercliff H.R. Mechanical properties of natural materials. II. Microstructures for mechanical efficiency. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. 1995. P. 141-162.
254. Golmakani M.E. Zeighami V. Nonlinear thermo-elastic bending of FG-CNT reinforced composite plates resting on elastic foundations by dynamic relaxation method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2017.
255. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. General theory and applications of classical theory: volume I. Berlin: Springer, 2016. 116 p.
256. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Applications of Refined and three-dimensional theory: volume II A. Berlin: Springer, 2016. 42 p.
257. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Grigorenko Ya.M., Vlaiikov G.G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Applications of Refined and three-dimensional theory: volume II B. Berlin: Springer, 2016. 108 p.
258. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. and Phys. Solids*. 1963. № 11. P. 127.

259. Hau Nguyen Ngoc, le Thanh Cuong, Khuong Duy Nguyen, H. Nguyen-Xuan, Magd Abdel Wahab. Three-dimensional polyhedral finite element method for the analysis of multi-directional functionally graded solid shells. *Composite Structures*. 2022. Vol. 305, № 6. P.116538.
260. Islam S. Fracture mechanics of graphene nanocomposites: a literature review. 2023.
261. Jacob L. Pelletier, Senthil Vel. An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells / *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43, № 5. P. 1131-1158.
262. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M., Simoes A.O. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites // *Composites Sci. and Technol*. 2007. Vol. 67. P. 3071-3077.
263. Kardomateas G.A. Effect of normal strains in buckling of thick orthotropic shells. *J. Aerospace Eng.* 2000. Vol. 13, № 3. P.85-91.
264. Kardomateas G.A. and Simitzes G.J. Buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure. *J. Appl.Mech., Trans. ASME*. 2005. Vol. 72. P. 493-499.
265. Kardomateas G.A. Bifurcation of Equilibrium in Thick Orthotropic Cylindrical Shells Under Axial Compression. *J. Appl. Mech.* 1995. Vol. 62, № 1. P. 43-52.
266. Kawasaki A., Watanabe R. *FGM'90: 1990: Proceedings of the 1st International Symposium on Functionally Gradient Materials, FGM Forum Tokyo, 1990*. P. 197-202.
267. Kichan Rao K. Thermal stresses in a solid elastic cone. *Indian J. Pure and Appl. Math.* 1978. Vol. 9, № 3, P. 256-266.
268. Kishida M., Sasaki K. Application of indirect boundary integral method to three-dimensional problems in the linear, couple-stress theory. *Boundary Element Meth. Eng.Proc.:*1982: 4th. Int. Semin., Southampton, 1982: Berlin, 1982. P. 254-268.
269. Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites Part B. Engineering*. 1997. Vol. 28B. P. 1-4.

270. Koizumi M. Functionally gradient materials the concept of FGM. *Ceramic Transactions. Functionally Graded Materials*. 1993. Vol. 34. P. 3-10.
271. Koizumi M. The concept of FGM, ceramic transactions. *Functionally Graded Materials*. 1993. Vol. 34. P. 3-10.
272. Koizumi M., Niino M. Overview of FGM research in Japan. *MRS Bulletin*. 1995. Vol. 20, № 1. P. 19-21.
273. Kołakowski Z., Mania R.J. Semi-analytical method versus the FEM for analysis of the local post-buckling of thin-walled composite structures. *Composite Structures*. 2013. Vol. 97. P. 99-106.
274. Kowal-Michalska K., Mania R.J. Static and dynamic thermomechanical buckling loads of functionally graded plates. *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 17, № 1. P. 99-112.
275. Lee Y.Y., Zhao X., Reddy J.N. Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010. Vol. 199. P. 1645-1653.
276. Lian-Hua Ma, Kun Zhang, Xiao-Dong Pan, Wei Zhou A comparative study of the elasto-plastic properties for ceramic nanocomposites filled by graphene or graphene oxide nanoplates. *Nanotechnology Reviews*. 2022. Vol. 11, № 1. P. 2584-2594.
277. Mahamood R.M., Akinlabi E.T. *Functionally graded materials*. Springer International Publishing AG, 2017. 104 p.
278. Mahamood R.M., Akinlabi E.T., Shukla M., Pityana S. Functionally graded material. An Overview Proceedings of the World Congress on Engineering. 2012. Vol. III. WCE 2012, July 4 - 6, London, U.K.
279. Marchuk A.V., Gniedash S.V., Levkovsky S.A. Free and Forced Vibrations of Thick-Wall Anisotropic Cylindrical Shells. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 53, № 2. P. 181-195.
280. Maziar Ramezani, Zaidi Mohd Ripin An Overview of Enhancing the Performance of Medical Implants with Nanocomposites. *Journal of Composites Science*. 2023. Vol. 7, № 5. P. 199.

281. Mehdi Darabi, Rajamohan Ganesan Exact 3-D Stress and Stiffness Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells. *Conference: Design, Manufacturing and Applications of Composites Tenth Workshop 2014: Proceedings of the Tenth Joint Canada-Japan Workshop on Composites At: Vancouver, Canada, 2014.*
282. Mostafa Omid Bidgoli, A. Loghman, Mohammad Arefi. Three-Dimensional Thermo-Elastic Analysis of a Rotating Cylindrical Functionally Graded Shell Subjected to Mechanical and Thermal Loads Based on the FSDT Formulation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019. Vol. 60, № 5. P.899-907.
283. Pan J., Bian L.C. Coefficients of thermal expansion for composites with agglomerated carbon nanotubes. 1st International Workshop on Materials Science and Mechanical Engineering. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. P. 281.
284. Papadakis G. Buckling of thick cylindrical shells under external pressure: A new analytical expression for the critical load and comparison with elasticity solutions. *Int. J. Solids Struct.* 2008. Vol. 45, № 20. P. 5308–5321.
285. Parmar K., Thakkar H. An overview on recent development in Functionally Graded Materials. *Conference: International Conference on Emerging Trends in Mechanical Engineering*. 2017.
286. Patni M., Minera S., Groha R.M.J., Pirrera A., Weaver P.M. Three-dimensional stress analysis for laminated composite and sandwich structures. *Composites Part B*. 2018. Vol. 155. P. 299-328.
287. Podvornyi A.V. The stability of anisotropic cylindrical shells under torsion in spatial position. *Acta Sci. Pol. Architectura*. 2020. Vol. 19, № 1. P.103-109.
288. Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shell under Distributed External Pressure in the Spatial Statement. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, № 6. P. 623-638.
289. Raghvendra Pandey, Prabhakar Singh Nanocomposite Ceramics for Energy Harvesting in book (*Nanomaterials. Advances and Applications.*). Springer Link. 2023. P. 241–266.

290. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. 47(1-3). P. 663-684.
291. Reddy J.N. and Chin C.D. Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21 P. 593-602.
292. Reissner E. On a variational theorem in elasticity. *I. Math. and Phys.* 1950. Vol. 29. P. 90-95.
293. Schiff M. Sur l'equilibre d'un cylindre elastique. *J.Liouville, Ser.III*. 1885. t. IX.
294. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, № 2. P. 211-221.
295. Semenyuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. Збірник наукових праць *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures*. КНУБА. 2015. №94. С. 126-138.
296. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical shells made of fibrous composites with one symmetry plane. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, №6. P. 682-688.
297. Semenyuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stress–strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59, № 1. P. 79-89.
298. Semenyuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V. Stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under thermal power load, protected by the functionally graded material. Збірник наукових праць *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures*. КНУБА. 2020. №105. С. 165-178.
299. Shahsiah R., Eslami M.R. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *Journal of Thermal Stresses*. 2003. Vol. 26. P. 277-294.

300. Shen Hui-Shen Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2009. 266 p.
301. Shen Hui-Shen Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Structures*. 2009. Vol. 91. P. 9-19.
302. Shen Hui-Shen Postbuckling of axially-loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. *Composites Science and Technology*. 2005. Vol. 65. P. 1675-1690.
303. Shen H.-S., Zhu Z.H. Postbuckling of sandwich plates with nanotube-reinforced composite face sheets resting on elastic foundations. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2012. Vol. 35. P. 10-21.
304. Singh Avtar. Thermal stress within isotropic solids bounded by one or two cones. *Journal of Science and Engineering Research. Kharagpur*. 1962. Vol. 6, № 2, P. 201-216.
305. Sofiyev A.H., Zerin Z., Korkmaz A. The stability of a thin three-layered composite truncated conical shell containing an FGM layer subjected to non-uniform lateral pressure. *Composite Structures*. 2008. Vol. 85, Issue 2. P. 105-115.
306. Soni S.K., Thomas B., Swain A., Roy T. Functionally graded carbon nanotubes reinforced composite structures: An extensive review. *Composite Structures*. 2022. P. 299.
307. Soni S.K., Thomas B., Thomas S.B., Tile P.S., Sakharwade S.G. Carbon nanotubes as exceptional nanofillers in polymer and polymer/fiber nanocomposites: An extensive review. *Materials Today Communications*. 2023. Vol.37.
308. Sourabh Kumar Soni, Benedict Thomas, Ashirbad Swain, Tarapada Roy Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Structures: An extensive review. *Composite Structures*. 2022. Vol. 299 № 2. P. 116075.
309. Stein I.Y., Vincent H.M., Steiner III S.A., Colombini E., Wardle B.L. Processing and mechanical property characterization of aligned carbon nanotube

- carbon matrix nanocomposites. 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. April 8-11, 2013, Boston, Massachusetts.
310. Takano A.A. Improvement of Flugge's equations for buckling of moderately thick anisotropic cylindrical shells. *AIAA J.* 2008. Vol. 46, № 4. P. 903-911.
311. Touloukian Y.S. Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. Mc Millan–New York, 1967. 1056 p.
312. Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Збірник наукових праць Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures.* KNUBA. 2023. №111. P. 74-86.
313. Trach V., Semenuk M., Podvornyi A. Stability of anisotropic cylindrical shells in three-dimensional state under axial compression. *Acta Sci. Pol. Architectura.* 2016. Vol. 15, № 4. P.169-183.
314. Trach V., Semeniuk M., Podworny A., Zhukova N. On the Method of Calculation of Buckling and Postbuckling Behavior of Laminated Shells with Small Arbitrary Imperfections. *3rd int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS.* Braunschweig, Germany. 2015. P. 23-28.
315. Vel S.S., Batra R.C. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA Journal.* 2002. Vol. 40, № 7. P. 1421-1433.
316. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Struct.* 2003. Vol. 132. P. 60-82.
317. Weaver P.M. Anisotropy-Induced Spiral Buckling in Compression-Loaded Cylindrical Shells. *AIAA Journal.* 2002. Vol. 40, № 5. P. 1001-1007.
318. Weaver P. Imperfection-insensitive shells using variable stiffness composites. *3 int. Conference on Buckling and Postbuckling Behavior of Composite Laminated Shell Structures with DESICOS Workshop: 2015.* Braunschweig, Germany, 2015.

319. Weaver P.M. The Effect of Extension-Twist Anisotropy on Compression Buckling in Cylindrical Shells. *Composite Part B: Engineering*. 2003. Vol.34, № 3. P.251-260.
320. Weaver P.M., Driesen J.R., Roberts P. The effect of flexural-twist anisotropy on compression buckling of quasi-isotropic laminated cylindrical shells. *Composite Struct.* 2002. Vol. 55. P. 195-204.
321. Weaver P.M., Driesen J.R., Roberts P. Anisotropic effects in the compression buckling of composite laminated cylindrical shells. *Comput. Sci. Technol.* 2002. Vol. 62. P.91-105.
322. Woodward B., Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates. *European Journal of Mechanics*. 2011. A/Solids, Elsevier, Vol. 30 (5). P.705.
323. Yuki M., Murayama T., Irisawa T., Kawasaki A., Watanabe R. *FGM'90: 1990: Proceedings of the 1st International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, FGM Forum Tokyo 1990. P. 203-208.
324. Zboinski G., Ostachowicz W. An algorithm of a family of 3D-based solid-to-shell transition, hpq-hp-adaptive finite elements. *J. Theor. And Appl. Mech.* 2000. Vol. 38, № 4. P. 791-806.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Ненульові елементи матриці $T(r, \lambda)$ системи рівнянь стійкості циліндричної оболонки (5.96)

$$\begin{aligned}
 t_{1,1} &= -\frac{c_{23} + 1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 c_{33} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 2c_{33}, \quad t_{1,2} = l_p, \quad t_{1,3} = -\frac{k}{r}, \\
 t_{1,4} &= \frac{c_{22}}{r^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{2c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 c_{13} r l_m^2 - \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 k^2 \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 k \frac{2c_{23}}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{k}{r}, \\
 t_{1,5} &= -l_p \frac{c_{12}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 c_{13} l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 2c_{13} k l_m, \\
 t_{1,6} &= k \frac{c_{22}}{r^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{2c_{23}}{r} k + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{2c_{23}}{r} k^2 + \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{1}{r}, \quad t_{1,7} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2c_{33} r l_m, \\
 t_{1,10} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2c_{23} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 l_m, \\
 t_{1,11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{26}}{r^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2c_{13} r l_m^2, \\
 t_{1,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2c_{23} k l_m, \\
 t_{2,1} &= c_{13} l_p, \quad t_{2,2} = -\frac{1}{r} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 a_{55} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 2a_{55}, \\
 t_{2,4} &= -\frac{c_{12}}{r} l_p + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 2k l_m, \\
 t_{2,5} &= c_{11} l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 c_{13} r l_m^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{c_{23}}{r} k^2 - \\
 &- \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_3(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{1}{r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2,6} &= -\frac{c_{12} + c_{66}}{r} kl_p, & t_{2,7} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{36}}{r}, & t_{2,8} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2a_{55} rl_m, \\
t_{2,10} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{26}}{r^2} - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2rl_m^2, \\
t_{2,11} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) 2 \frac{c_{16}}{r} kl_m + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_4(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 l_m, \\
t_{2,12} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) c_{16} l_m^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{c_{26}}{r^2} k^2, \\
t_{3,1} &= -\frac{c_{23}}{r} k, & t_{3,3} &= -\frac{2}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 a_{44} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 2a_{44} k, \\
t_{3,4} &= \frac{c_{22}}{r^2} k - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{2c_{23}}{r} k - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{2k^2}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{1}{r}, \\
t_{3,5} &= -\frac{c_{12} + c_{66}}{r} kl_p, \\
t_{3,6} &= c_{66} l_p^2 + \frac{c_{22}}{r^2} k^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 c_{13} rl_m^2 - \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \sigma_{rr}^0 \frac{c_{23}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_2(p, m_1, m) \tau_{r\theta}^0 \frac{3k}{r}, \\
t_{3,7} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, & t_{3,9} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2a_{44} rl_m, \\
t_{3,10} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 2kl_m, \\
t_{3,11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(c_{16} l_m^2 + \frac{c_{26}}{r^2} k^2 \right), & t_{3,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{c_{26}}{r} kl_m - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_5(p, m_1, m) \tau_{rz}^0 3l_m, \\
, & & & & & \\
t_{4,1} &= c_{33}, & t_{4,4} &= \frac{c_{23}}{r}, & t_{4,5} &= -c_{13} l_p, & t_{4,6} &= k \frac{c_{23}}{r}, & t_{4,11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{36}}{r}, \\
, & & t_{4,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, & t_{5,2} &= a_{55}, & t_{5,4} &= -l_p, & t_{5,9} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45},
\end{aligned}$$

$$t_{6,3} = a_{44}, \quad t_{6,4} = \frac{k}{r}, \quad t_{6,6} = \frac{1}{r}, \quad t_{6,8} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}. \quad (\text{A.1})$$

Тут $l_m = \frac{m\pi}{L}$; $l_p = \frac{p\pi}{L}$; L – довжина твірної p , m , m_1 – хвильові числа в рядах Фур'є (3.95).

Функції $\varphi(p, m)$ та $\varphi(m, p)$ залежать від цілих числових параметрів і визначаються формулами (2.16).

Функції $\varphi_2(p, m_1, m)$, $\varphi_3(p, m_1, m)$, $\varphi_4(p, m_1, m)$ і $\varphi_5(p, m_1, m)$ залежать від цілих чисельних параметрів p , m_1 та m та визначаються формулами:

$$\varphi_2(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m + m_1 - p} + \frac{1}{m - m_1 + p} + \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

$$\varphi_3(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m + m_1 - p} - \frac{1}{m - m_1 + p} + \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

якщо p – непарне, $m_1 = 1$, m – непарне,

якщо p – парне, $m_1 = 1$, m – парне.

$$\varphi_4(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m + m_1 - p} + \frac{1}{m - m_1 + p} - \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

$$\varphi_5(p, m_1, m) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{m + m_1 - p} + \frac{1}{m - m_1 + p} + \frac{1}{-m + m_1 + p} - \frac{1}{m + m_1 + p} \right);$$

якщо p – непарне, $m_1 = 2$, m – парне,

якщо p – парне, $m_1 = 2$, m – непарне.

(A.2)

ДОДАТОК Б

Ненульові елементи матриці $T(r, \lambda)$ для систем рівнянь стійкості циліндричної оболонки (5.101), (5.105)

$$\begin{aligned}
 t_{1,1} = & -\frac{c_{23} + 1}{r} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}}}{2} c_{33} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{33} - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{33} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2rc_{33}l_m - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2rc_{33}l_m - a_0^{\tau_{r\theta}} c_{33}k - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] 2c_{33}k - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_7(p, m, i) \right] 2c_{33}k,
 \end{aligned}$$

$$t_{1,2} = l_p, \quad t_{1,3} = -\frac{k}{r},$$

$$\begin{aligned}
 t_{1,4} = & \frac{c_{22}}{r^2} - a_0^{\sigma_{rr}} \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} - \\
 & - \frac{a_0^{\sigma_{rr}}}{2} c_{13}rl_p^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{13}rl_m^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{13}rl_m^2 - \\
 & - \frac{a_0^{\sigma_{rr}}}{2} k^2 \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] k^2 \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] k^2 \frac{c_{23}}{r} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36}kl_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36}kl_m - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{23}l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{23}l_m - \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{zr}} \varphi_9(p, m, i) \right] l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{zr}} \varphi_4(p, m, i) \right] l_m - \\
 & - a_0^{\tau_{r\theta}} k \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] 2k \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_7(p, m, i) \right] 2k \frac{c_{23}}{r} - \\
 & - \frac{a_0^{\tau_{r\theta}}}{2} \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{k}{r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{1,5} = & -l_p \frac{c_{12}}{r} + \frac{a_0^{\sigma_{rr}}}{2} c_{13} l_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{13} l_m + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{13} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_9(p, m, i) \right] k \frac{c_{36}}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_4(p, m, i) \right] k \frac{c_{36}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2rc_{13} l_m^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2rc_{13} l_m^2 + a_0^{\tau_{rz}} k c_{36} l_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_3(p, m, i) \right] k c_{36} l_p + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_7(p, m, i) \right] k c_{36} l_p + a_0^{\tau_{r\theta}} k c_{13} l_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] 2k c_{13} l_p + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_7(p, m, i) \right] 2k c_{13} l_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_9(p, m, i) \right] k \frac{2c_{36}}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_4(p, m, i) \right] k \frac{2c_{36}}{r}, \\
t_{1,6} = & k \frac{c_{22}}{r^2} + \frac{a_0^{\sigma_{rr}}}{2} \frac{3kc_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{3kc_{23}}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{3kc_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}} \varphi_9(p, m, i) \right] 3c_{36} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}} \varphi_4(p, m, i) \right] 3c_{36} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{23} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{23} k l_m + a_0^{\tau_{rz}} r c_{36} l_p^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}} \varphi_3(p, m, i) \right] 2rc_{36} l_p^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}} \varphi_7(p, m, i) \right] 2rc_{36} l_p^2 + a_0^{\tau_{r\theta}} k^2 \frac{2c_{23}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] k^2 \frac{2c_{23}}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_7(p, m, i) \right] k^2 \frac{2c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m + \frac{a_0^{\tau_{r\theta}}}{2} \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r}, \\
t_{1,7} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{33} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{33} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\tau_{rz}^0} \varphi(p, m) c_{33} r l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{33} r l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{33} r l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2c_{33} k - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2c_{33} k, \\
t_{1,10} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{13} r l_m^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{13} r l_m^2 - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] k^2 \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] k^2 \frac{c_{23}}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\sigma_{rr}^0} \varphi(p, m) c_{36} k l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\tau_{rz}^0} \varphi(p, m) c_{23} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{23} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{23} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_0^{\tau_{rz}^0}}{2} \varphi(p, m) l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} k - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} k - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{k}{r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{1,11} = & \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{26}}{r^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \varphi(p, m) \frac{c_{36}}{r} k - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] \frac{c_{36}}{r} k - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] \frac{c_{36}}{r} k + \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\tau_{rz}^0} \varphi(p, m) r c_{13} l_m^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2r c_{13} l_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2r c_{13} l_m^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2c_{13} k l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2c_{13} k l_m + \\
& + a_0^{\tau_{r\theta}^0} \frac{c_{36}}{r} k^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2 \frac{c_{36}}{r} k^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2 \frac{c_{36}}{r} k^2, \\
t_{1,12} = & \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{3c_{23}}{r} k - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{3c_{23}}{r} k - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \varphi(p, m) 3c_{36} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 3c_{36} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 3c_{36} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\tau_{rz}^0} \varphi(p, m) c_{23} k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{23} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{23} k l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2r c_{36} l_m^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2r c_{36} l_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} k^2 + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{\tau_{r\theta}^0} \varphi(p, m) c_{36} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r},$$

$$t_{2,1} = c_{13} l_p,$$

$$\begin{aligned} t_{2,2} = & -\frac{1}{r} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} a_{55} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] a_{55} - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] a_{55} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2ra_{55}l_m + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2ra_{55}l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2ra_{55}l_m - a_0^{\tau_{r\theta}^0} a_{55}k - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2a_{55}k - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2a_{55}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2,3} = & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] a_{45} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] a_{45} - a_0^{\tau_{rz}^0} ra_{45}l_p - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2ra_{45}l_m - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2ra_{45}l_m - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2a_{45}k - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2a_{45}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2,4} = & -\frac{b_{12}}{r} l_p + \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} l_p + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] l_m - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2rl_m^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2rl_m^2 + a_0^{\tau_{r\theta}^0} l_p k + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2l_m k + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2l_m k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2,5} = & c_{11} l_p^2 + k^2 \frac{c_{66}}{r^2} + \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} rc_{13} l_p^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] rc_{13} l_m^2 - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] rc_{13} l_m^2 - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \frac{c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2c_{36} l_m k - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2c_{36} l_m k + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] l_m + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] l_m - \frac{a_0^{\tau_{r\theta}^0}}{2} \frac{k}{r} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] \frac{k}{r},
\end{aligned}$$

$$t_{2,6} = -k \frac{c_{12} + c_{66}}{r} l_p, \quad t_{2,7} = - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{36}}{r},$$

$$\begin{aligned}
t_{2,8} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] a_{55} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] a_{55} + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_0^{\tau_{rz}^0} a_{55} l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2ra_{55} l_m + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2ra_{55} l_m - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2a_{55} k - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2a_{55} k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2,9} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} a_{45} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] a_{45} - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] a_{45} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_m - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_m - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_0^{\tau_{r\theta}^0} a_{45} k - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2a_{45} k - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2a_{45} k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{2,10} &= - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_{26}}{r^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] l_m + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] l_m - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_0^{\tau_{rz}^0} r l_m^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2r l_m^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2rl_m^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] 2kl_m + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] 2kl_m, \\
t_{2,11} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) 2 \frac{kc_{16}}{r} l_m - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] rc_{13} l_m^2 - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] rc_{13} l_m^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_0^{\sigma_{rr}^0} c_{36} kl_m - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] 2c_{36} kl_m - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] 2c_{36} kl_m + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \frac{a_0^{\tau_{rz}^0}}{2} l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_6(p, m, i) \right] l_m + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_8(p, m, i) \right] l_m - \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_2(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_5(p, m, i) \right] \frac{k}{r}, \\
t_{2,12} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) c_{16} l_m^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k^2 \frac{c_{26}}{r^2}, \quad t_{3,1} = -k \frac{c_{23}}{r}, \\
t_{3,2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] a_{45} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] a_{45} + a_0^{\tau_{rz}^0} ra_{45} l_p + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_p + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_p + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2a_{45} k + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2a_{45} k, \\
t_{3,3} &= -\frac{2}{r} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} a_{44} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] a_{44} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] a_{44} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2ra_{44} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2ra_{44} l_m + a_0^{\tau_{r\theta}^0} 2a_{44} k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2a_{44}k + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2a_{44}k, \\
t_{3,4} = & k \frac{c_{22}}{r^2} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{k}{r} \\
& - a_0^{\sigma_{rr}^0} \frac{c_{23}}{r} k - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2 \frac{c_{23}}{r} k - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2 \frac{c_{23}}{r} k + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36}l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36}l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2kl_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2kl_m - a_0^{\tau_{r\theta}^0} \frac{k^2}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2 \frac{k^2}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2 \frac{k^2}{r} - \frac{a_0^{\tau_{r\theta}^0}}{2} \frac{1}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

$$t_{3,5} = -\frac{c_{12} + c_{66}}{r} kl_p,$$

$$\begin{aligned}
t_{3,6} = & c_{66}l_p^2 + k^2 \frac{c_{22}}{r^2} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \frac{1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r} - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} c_{13}rl_p^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{13}r - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{13}r - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \frac{c_{23}}{r} k^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36}kl_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36}kl_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 3l_m -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 3l_m + \frac{a_0^{\tau_{r\theta}^0}}{2} \frac{3k}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{3k}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{3k}{r},
\end{aligned}$$

$$t_{3,7} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{33} l_m,$$

$$\begin{aligned}
t_{3,8} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{a_0^{\sigma_{rr}^0}}{2} a_{45} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] a_{45} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] a_{45} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_m + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2ra_{45} l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_0^{\tau_{r\theta}^0} a_{45} k + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2a_{45} k + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2a_{45} k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{3,9} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] a_{44} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] a_{44} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_0^{\tau_{rz}^0} ra_{44} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2ra_{44} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2ra_{44} l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] 2ka_{44} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] 2ka_{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{3,10} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{c_{26}}{r} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{k}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2kc_{23}}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2kc_{23}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_0^{\sigma_{rr}^0} c_{36} l_m +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36} l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36} l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_0^{\tau_{rz}^0} k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{2k^2}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{2k^2}{r} - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

$$t_{3,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(c_{16} l_m^2 + k^2 \frac{c_{26}}{r^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
t_{3,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{k c_{26}}{r} l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{1}{r} + \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{1}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] c_{13} r l_m^2 - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] c_{13} r l_m^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} k^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{c_{23}}{r} - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_0^{\sigma_{rr}^0} c_{36} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\sigma_{rr}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 2c_{36} k l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \frac{a_0^{\tau_{rz}^0}}{2} 3l_m - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_9(p, m, i) \right] 3l_m - \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{rz}^0} \varphi_4(p, m, i) \right] 3l_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_3(p, m, i) \right] \frac{3k}{r} + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^{\tau_{r\theta}^0} \varphi_7(p, m, i) \right] \frac{3k}{r},
\end{aligned}$$

$$t_{4,1} = c_{33}, \quad t_{4,4} = \frac{c_{23}}{r}, \quad t_{4,5} = -c_{13} l_p, \quad t_{4,6} = k \frac{c_{23}}{r}, \quad t_{4,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_{36}}{r},$$

$$\begin{aligned}
t_{4,12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_{36} l_m, & t_{5,2} &= a_{55}, & t_{5,4} &= -l_p, & t_{5,9} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \\
t_{6,3} &= a_{44}, & t_{6,4} &= \frac{k}{r}, & t_{6,6} &= \frac{1}{r}, & t_{6,8} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}.
\end{aligned} \tag{Б.1}$$

Тут $l_m = \frac{m\pi}{L}$; $l_p = \frac{p\pi}{L}$; L – довжина твірної p , m – хвильові числа в рядах Фур'є (3.99), i – кількість членів рядів (3.100).

Функції $\varphi(p, m)$ та $\varphi(m, p)$ залежать від цілих числових параметрів i визначаються формулами (2.16).

Функції $\varphi_2(p, m, i)$, $\varphi_3(p, m, i)$, $\varphi_4(p, m, i)$, $\varphi_5(p, m, i)$, $\varphi_6(p, m, i)$, $\varphi_7(p, m, i)$, $\varphi_8(p, m, i)$, $\varphi_9(p, m, i)$ залежать від цілих чисельних параметрів p , m та i та визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
\varphi_2(p, m, i) &= \frac{1}{2L} \left[\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) + \right. \\
&+ \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \sin\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) + \\
&\left. + \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) + \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(p, m, i) &= \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \sin\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) + \right. \\
&+ \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) + \\
&\left. + \frac{1}{l_i + l_m - l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{l_i - l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) + \right. \\ & + \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \sin\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) + \\ & \left. + \frac{1}{l_i + l_m - l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_8(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) + \right. \\ & + \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \sin\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) + \\ & \left. + \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \sin\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_5(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) - 1 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \left(\cos\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) - 1 \right) - \\ & - \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) - 1 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) - 1 \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_6(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi\right) - 1 \right) - \right. \\ & - \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \left(\cos\left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) - 1 \right) + \\ & + \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi\right) - 1 \right) - \\ & \left. - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \left(\cos\left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi\right) - 1 \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_7(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[-\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi \right) - 1 \right) - \right. \\
& - \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \left(\cos \left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi \right) - 1 \right) - \\
& - \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi \right) - 1 \right) + \\
& \left. + \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi \right) - 1 \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_9(p, m, i) = & \frac{1}{2L} \left[\frac{1}{l_i + l_m - l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi - p\pi \right) - 1 \right) - \right. \\
& - \frac{1}{-l_i + l_m + l_p} \left(\cos \left(-\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi \right) - 1 \right) - \\
& - \frac{1}{l_i - l_m + l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} - m\pi + p\pi \right) - 1 \right) - \\
& \left. - \frac{1}{l_i + l_m + l_p} \left(\cos \left(\frac{2\pi i L}{N \cdot z_{ed}} + m\pi + p\pi \right) - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

(B.2)



«Затверджую»
Головний конструктор
ДП «АНТОНОВ»,
кандидат технічних наук
Семенець О.І.
«21» 02 2024 р.

АКТ

стосовно можливого впровадження (використання) в Державному підприємстві «АНТОНОВ» результатів дисертаційної роботи Подворного Андрія Володимировича на тему: **«Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці»**.

Комісія в складі:

Заступника головного конструктора, к.т.н., доцента Василевського Є.Т. – голова комісії і членів комісії: - провідного інженер-конструктора, к.т.н., доцента Мерзлюка В.В. **встановила**, що наукові положення і результати дисертаційної роботи: **«Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці»** направлені на оптимізацію конструкції і забезпечення її достатньої міцності можуть бути використані на ДП «АНТОНОВ» при проведенні досліджень, що виконуються з метою:

- обґрунтування і оптимізація вибору виду конструкції, проектуванні та розрахунку на стійкість композитних оболонкових систем (обтічники, створки, зализи, тощо);
- доводці і оптимізації конструкції з забезпеченням необхідної міцності агрегатів із композитних матеріалів для пасажирських і вантажних літаків;
- розробці термонавантажених відсіків силових установок і допоміжних силових установок.

До основних результатів, які можуть знайти використання слід віднести:

- використання виведеної системи тривимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що в рамках теорії пружності анізотропного тіла описують деформування, динаміку та стійкість анізотропних циліндричних оболонок. Ця система, в подальшому, приведена до одновимірної при використанні процедури методу Бубнова-Галеркіна. В результаті отримані одновимірні системи звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь, що описують деформування, динаміку товстостінних анізотропних циліндричних оболонок. Зазначені системи рівнянь, при забезпеченні відповідних умов, дозволяють реалізовувати задачі розрахунків напружено-деформованих станів як від дії різноманітного зовнішнього навантаження, так і враховувати зміну температурного поля, а також здійснювати знаходження частот вільних коливань товстостінних анізотропних циліндричних оболонок.

- використання результатів числових досліджень про вплив кута повороту

головних напрямків пружності матеріалу відносно координатних осей конструкції при різних граничних умовах та структурній будові оболонки на її стійкість при дії осьового тиску, зовнішнього тиску, дотичного зусилля, рівномірно розподіленого на одному з країв оболонки (кручення).

- використання комп'ютерних програмних комплексів для ПК в яких реалізовано розроблені алгоритми щодо встановлення параметрів напружено-деформованого стану товстостінної анізотропної циліндричної оболонки виготовленої з композитного матеріалу, який захищений з боку високого температурного поля шаром функціонального градієнтного матеріалу (ФГМ). Це дає змогу застосувати ФГМ з керамічною складовою, який здатний протистояти високотемпературному середовищу завдяки кращим характеристикам термостійкості, що особливо важливо для проектування і оптимізації, в розумінні забезпечення міцності, термостійких відсіків силової установки і допоміжної силової установки;

- розроблені нові методики чисельного розрахунку стосовно деформування, динаміки та стійкості, які дозволяють проводити структурну оптимізацію параметрів анізотропних циліндричних оболонок і в той же час отримувати необхідні дані щодо міцності.

Заст. Головного конструктора,
к.т.н., доцент

Провідний інженер-конструктор,
к.т.н.,



Є.Т. Василевський

В.В. Мерзлюк



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Повітрофлотський пр. 31, м. Київ-37, 03037, тел. (044)241-55-80, факс (044)248-32-65
E-mail: knuba_admin@ukr.net, Web: http:// www.knuba.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070909

20.03.24 № М-1.9/221

На № _____ від _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Подворного А.В. на тему «Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці» у навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА)

Результати дисертаційної роботи Подворного А.В. на тему «Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці», використані у навчальному процесі на кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури (КНУБА) при виконанні кваліфікаційних магістерських робіт 2023-2024 років.

Результати проведених досліджень стали частиною спецкурсів «Іноваційні технології інженерного проектування» та «Сучасні методи розрахунку конструкцій», які викладаються для магістрів спеціальності 131 «Прикладна механіка», на будівельному факультеті КНУБА, освітня програма (спеціалізація) «Промислове та цивільне будівництво». Крім того, матеріали роботи використані при формуванні навчальних та методичних посібників.

**Проректор із наукової роботи та
інноваційної діяльності
(Керівник наукової установи)**

[Handwritten signature]
(підпис)

Олександр КОВАЛЬЧУК
(ім'я, прізвище)





МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
(НУВГП)

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362) 63 30 98, факс (0362) 63 32 09,
e-mail: mail@nuwm.edu.ua, web: https://nuwm.edu.ua
код ЄДРПОУ 02071116

Від 31.01.2024 р. № 011-02 На № _____ від _____

ДОВІДКА

про використання у навчальному процесі
Національного університету водного господарства та природокористування
результатів досліджень,
отриманих при виконанні дисертаційної роботи
Подворного Андрія Володимировича
щодо здобуття наукового ступеня доктора технічних наук
за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка

Результати наукових досліджень здобувача наукового ступеня доктора технічних наук, доцента кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, к.т.н. Подворного А. В., що викладені в його дисертаційній роботі на тему: «Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці», використовуються в навчальному процесі Навчально-наукового інституту будівництва та архітектури. Вони апробовані та запроваджені як рекомендації для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за ОПП «Будівництво та цивільна інженерія», та забезпечують набуття студентами спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» галузі знань 19 «Архітектура та будівництво» сучасних інноваційних компетентностей, сприяють отриманню ними необхідних теоретичних знань і вмінь, при вивченні таких навчальних дисциплін:

- «Теорія пружності та пластичності в розрахунках мостових і тунельних конструкцій»: викладено підходи стосовно встановлення параметрів, що описують напружено-деформований стан товстостінних анізотропних оболонкових конструкцій в просторовій постановці від зовнішніх силових дій;

- «Проектування мостів»: запроваджено методики встановлення характеристик, що описують вільні коливання елементів оболонкових мостових споруд, з метою не допущення впливу на них можливих резонансних коливань.

Проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків Національного університету водного господарства та природокористування
д.е.н., професор



Наталія САВІНА

Виконавець: В. М. Трач 0972891580



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
(НУВГП)

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362) 63 30 98, факс (0362) 63 32 09,
e-mail: mail@nuwm.edu.ua, web: https://nuwm.edu.ua
код ЄДРПОУ 02071116

Від 29.01.2024 № 24-24

На № _____

від _____

ДОВІДКА

про використання результатів досліджень,
отриманих при виконанні дисертаційної роботи
Подворного Андрія Володимировича
щодо здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю
05.23.17 – Будівельна механіка
в науково-дослідних роботах, виконаних у науково-дослідній частині
Національного університету водного господарства та природокористування
Міністерства освіти і науки України за кошти Державного бюджету України

Видана доценту кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, к.т.н., доценту *Подворному Андрію Володимировичу* з підтвердженням того, що результати досліджень викладені в його дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук на тему: *«Деформування, динаміка та стійкість конструктивно анізотропних циліндричних оболонок в просторовій постановці»*, використовувались при виконанні держбюджетних наукових тем в науково-дослідній частині Національного університету водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, а саме:

- *«Розробка теоретичних основ розрахунку статично-невизначених конструкцій з композитних матеріалів при різних режимах навантаження»* (№ держ. реєстрації 0101U001892, терміни виконання 2004–2007 рр.), де автор розробляв підходи до розрахунку оболонкових конструкцій з композитних матеріалів при різних типах закріплення їх торців, різних режимах навантаження та геометрії оболонок;

- *«Розробка змішаного варіаційного принципу та методів розв'язання нелінійних задач механіки композитних оболонок»* (№ держ. реєстрації 0107U004177, терміни виконання 2007–2010 рр.), де автор брав участь у розробці змішаного варіаційного принципу для виведення систем диференціальних рівнянь рівноваги та стійкості композитних оболонкових конструкцій під зовнішнім силовим навантаженням;

- «Побудова канонічної системи рівнянь нелінійної теорії анізотропних оболонок типу Тимошенка і методів розв'язання задач стійкості оболонок з композитів» (№ держ. реєстрації 0110U000818, терміни виконання 2010–2013 рр.), де автор представляв підхід до врахування анізотропії як волокнистих композитних, так і наноматеріалів при розв'язку задач про напружено-деформований стан та стійкість оболонкових конструкцій під зовнішнім навантаженням;

- «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок обертання в уточнених постановках» (номер державної реєстрації 0113U004051, терміни виконання 2013–2015 рр.), де автором висвітлено підхід до розв'язку задач про напружено-деформований стан товстостінних і стійкість нетонких циліндричних оболонок під розподіленим боковим тиском в просторовій постановці при використанні методів аналітичного Бубнова-Гальоркіна та чисельної дискретної ортогоналізації.

- «Розв'язання задач нелінійної механіки анізотропних композитних і нанокompозитних оболонок в уточненій та тривимірній постановках» (номер державної реєстрації 0117U000654, терміни виконання 2017–2019 рр.), де автором представлено підхід до розв'язку задач про напружено-деформований стан товстостінних і стійкість нетонких циліндричних оболонок під розподіленим боковим, осьовим тиском та розподіленим по торцях зсувним навантаженням (крученням) в просторовій постановці при використанні методів аналітичного Бубнова-Гальоркіна та чисельних прямих і дискретної ортогоналізації.

Проректор з наукової роботи
та міжнародних зв'язків
д.е.н., професор



Наталія САВІНА