

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Геометричні характеристики плоских перерізів
Розтягування (стискування) стержнів
Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах
Пряме плоске згинання балок**

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку підготовки 6.060101 «Будівництво»

Київ 2015

УДК 539.3
ББК 30.121
О-61

Укладач: доц. Григор'єва Л. О., канд. фіз.-мат. наук;

Рецензент Шкельов Л.Т., канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск А.М. Станкевич, канд. техн. наук,
доцент

Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 2 від 1 жовтня 2014 року.

Видається в авторській редакції.

Опір матеріалів. Геометричні характеристики плоских перерізів.
Об1 Розтягування (стискування) стержнів. Побудова епюр
внутрішніх зусиль в стержневих системах. Пряме плоске згинання балок: Методичні рекомендації, завдання та приклади до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку підготовки 6.060101 «Будівництво» / Уклад. Л. О. Григор'єва. – К.: КНУБА, 2015.-64 с.

Методичні рекомендації містять теоретичні відомості, приклади та завдання для розрахунково-графічних робіт з опору матеріалів по темах: геометричні характеристики плоских перерізів, розтягування (стискування) стержнів, побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах, пряме плоске згинання балок.

Призначено для студентів санітарно-технічного факультету, але можуть використовуватися студентами інших факультетів будівельних спеціальностей.

Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	5
Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного перерізу.....	8
Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного складного перерізу.....	10
2. Розтягування (стискування) стержнів.....	15
Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони.....	17
Задача 2.2. Розрахунок статично-визначеної стержневої системи.....	19
3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах.....	21
Задача 3.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок.....	26
Задача 3.2. Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоскої рами.....	28
Задача 3.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в криволінійних стержнях.....	30
Задача 3.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в горизонтальних рамах під дією вертикального навантаження.....	31
4. Пряме плоске згинання балок.....	33
Задача 4.1. Розрахунок статично визначеної балки.....	37
Список рекомендованої літератури.....	45
Додатки.....	46

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок.

Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Розв'язання задач оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів. До кожної РГР додається титульний лист, зразок якого приведений у дод. 1. При здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

1. Геометричні характеристики плоских перерізів.

Теоретичні відомості.

Основними геометричними характеристиками плоского перерізу, віднесеного до правосторонньої системи координат yOz , є:

- площа $A = \iint da$;
- статичні моменти $S_y = \iint z dA$, $S_z = \iint y dA$;
- осьові моменти інерції $I_y = \iint z^2 dA$, $I_z = \iint y^2 dA$;
- відцентровий момент інерції $I_{yz} = \iint yz dA$.

В полярній системі координат r, φ вводиться полярний момент інерції $I_p = \iint r^2 dA$.

Центр ваги перерізу знаходиться в точці C з координатами

$$c_y = S_z / A, \quad c_z = S_y / A. \quad (1.1)$$

Координатні вісі y_c, z_c , що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральною вісями*. Статичні моменти відносно центральних вісей $S_y = S_z = 0$.

При паралельному переносі системи координат

$$y = y_c + c_y, \quad z = z_c + c_z \quad (1.2)$$

моменти інерції плоскої фігури в новій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + c_z^2 A, & I_z &= I_{z_c} + c_y^2 A, \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + c_y c_z A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При повороті системи координат на кут α проти годинникової стрілки

$$\bar{y} = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad \bar{z} = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.4)$$

моменти інерції перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система координат u, v , з початком в центрі ваги перерізу, в якій

відцентровий момент інерції $I_{uv} = 0$, називається *головною центральною системою координат*. Її положення відносно вихідної центральної системи координат yCz визначається кутом α_0

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (1.6)$$

Якщо $I_y = I_z$, то або всі вісі головні (при $I_{yz} = 0$) або $\alpha_0 = \pi/4$ (при $I_{yz} \neq 0$). Після визначення кута α_0 головні осьові моменти інерції I_u , I_v знаходяться за першими двома формулами (1.5). Третє рівняння (1.5) можна використовувати для перевірки.

Осьові моменти інерції в головній системі координат набувають екстремальних значень (найбільше і найменше з усіх можливих). Ці величини визначаються з квадратного рівняння і дорівнюють

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (1.7)$$

Головні радіуси інерції i_u та i_v визначаються за формулами

$$i_u = \sqrt{I_u / A}, \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (1.8)$$

За їх допомогою будується еліпс інерції

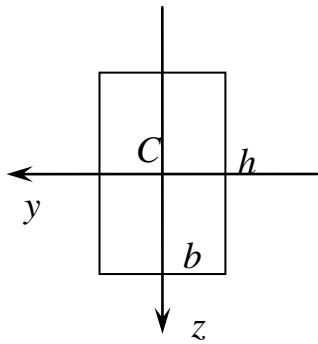
$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (1.9)$$

Головні моменти опору визначаються за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}, \quad (1.10)$$

де u_{\max} , v_{\max} – відповідно відстані до найвіддаленіших точок від осей v та u .

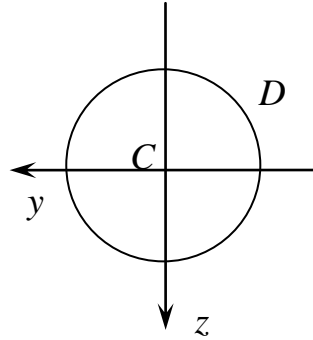
Геометричні характеристики простих фігур. Для багатьох фігур головні центральні координати, площа і моменти інерції визначені шляхом інтегрування по площі і приведені в навчальній та довідниковій літературі. Для найпростіших фігур маємо наступні характеристики:



$$A = bh$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

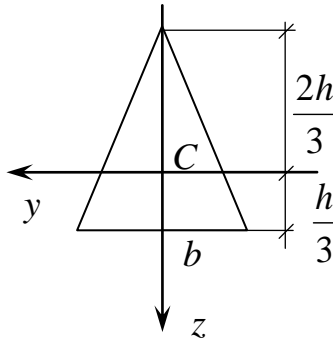
$$I_z = \frac{b^3h}{12}$$



$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

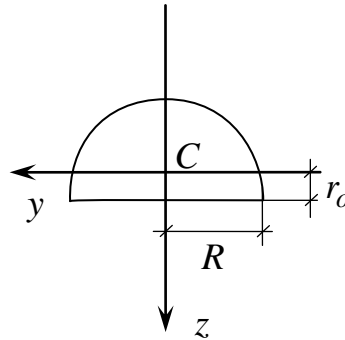
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$A = bh/2$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{48}$$

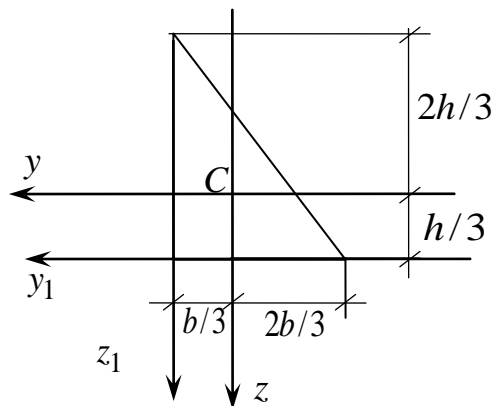


$$r_o = \frac{4R}{3\pi}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_y = 0,11R^4$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$A = bh/2$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{y_1z_1} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Для прокатних балок (двотавр, швелер, кутик) геометричні характеристики беруться з таблиць сортаменту.

Для складних перерізів координати центру ваги $C(C_{0y}, C_{0z})$ в довільній початковій системі координат y_0, z_0 знаходяться за формулами

$$C_{0y} = \frac{\sum y_{0i} A_i}{A}, \quad C_{0z} = \frac{\sum z_{0i} A_i}{A}, \quad A = \sum A_i, \quad (1.11)$$

де y_{0i}, z_{0i} – координати центру ваги i -тої фігури, A – загальна площа перерізу. Вводимо центральну систему координат yCz , паралельну до y_0, z_0 , та знаходимо координати центрів ваги складових фігур за формулами паралельного переносу:

$$c_{yi} = y_{0i} - C_{0y}, \quad c_{zi} = z_{0i} - C_{0z}. \quad (1.12)$$

Моменти інерції для складного перерізу обчислюються за формулами

$$I_y = \sum (I_{yi} + c_{zi}^2 A_i), \quad I_z = \sum (I_{zi} + c_{yi}^2 A_i),$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_iz_i} + c_{yi} c_{zi} A_i). \quad (1.13)$$

В формулах (1.11), (1.13) площа та моменти інерції для “вирізаних” складових перерізу беруться зі знаком “мінус”.

Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу

Для заданого поперечного перерізу визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції та моменти опору. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 4.

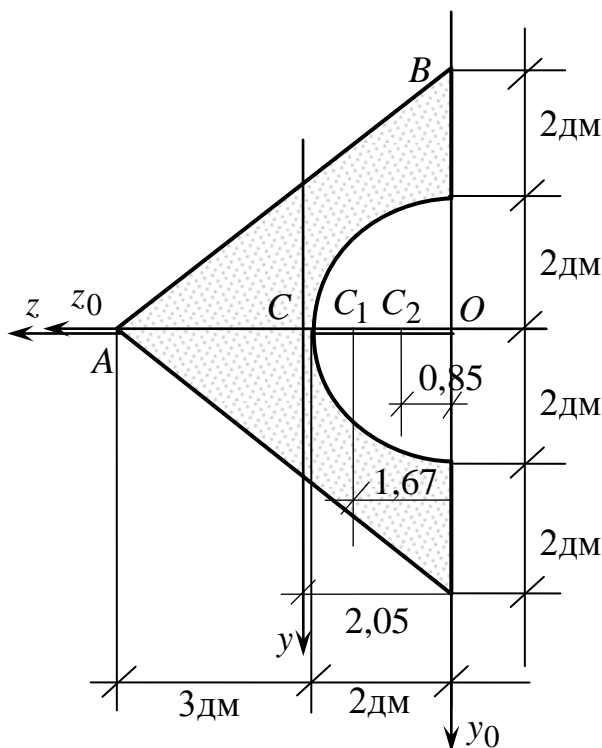


Рис. 1.1

П р и к л а д. Для заданого на рис. 1.1 поперечного перерізу знайти моменти опору.

Р о з в ’ я з о к. Бачимо, що переріз має одну вісь симетрії, що лежить горизонтально. Розбиваємо переріз на прості фігури так, щоб вісь симетрії була віссю симетрії для складових, і визначаємо їх геометричні характеристики:

1) для рівнобедреного трикутника з основою $b = 8 \text{ дм}$ та висотою $h = 5 \text{ дм}$ центр ваги C_1 лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані

$$y_{10} = h/3 = 1,67 \text{ дм від основи,}$$

$$A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3 h}{48} = \frac{8^3 \cdot 5}{48} = 53,3 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z_1} = \frac{h^3 b}{36} = \frac{5^3 \cdot 8}{36} = 27,8 \text{ дм}^4;$$

2) для півкола з радіусом $R = 2\text{дм}$ центр ваги C_2 лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані $y_{20} = \frac{4R}{3\pi} = 0,85\text{дм}$ від основи,

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28\text{см}^2, \quad I_{y_2} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28\text{дм}^4,$$

$$I_{z_2} = 0,11R^4 = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76\text{дм}^4.$$

Вводимо початкову систему координат y_0, z_0 та визначаємо координату y_{C0} центра ваги складного перерізу ($z_{C0} = 0$ в силу симетрії):

$$y_{C0} = \frac{y_{10}A_1 - y_{20}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1,67 \cdot 20 - 0,85 \cdot 6,28}{20 - 6,28} = \frac{33,4 - 5,34}{13,72} = 2,05\text{дм}$$

Позначаємо на рис. 1.1 центр ваги C та вводимо головну центральну систему координат yCz . Координати точок C_1, C_2 в головній системі координат дорівнюють

$$C_{y1} = y_{10} - y_{C0} = 1,67 - 2,05 = -0,38\text{дм}; \quad C_{z1} = 0;$$

$$C_{y2} = y_{20} - y_{C0} = 0,85 - 2,05 = -1,2\text{дм}; \quad C_{z2} = 0.$$

За допомогою формул паралельного переносу знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y1} + C_{z1}^2 \cdot A_1 - I_{y2} - C_{z2}^2 \cdot A_2 = 53,3 - 6,28 = 47\text{дм}^4;$$

$$I_z = I_{z1} + C_{y1}^2 \cdot A_1 - I_{z2} - C_{y2}^2 \cdot A_2 = 27,8 + (-0,38)^2 \cdot 20 - 1,76 - (-1,2)^2 \cdot 6,28 = 27,8 + 2,89 - 1,76 - 9,04 = 19,89 \approx 20\text{дм}^4.$$

Знаходимо координати найбільш віддалених від осей точок перерізу та підставляємо їх в формули для моментів опору:

$$y_{\max} = y_A = 5 - 2,05 = 2,95\text{дм}; \quad z_{\max} = z_B = 4\text{дм};$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{47}{4} = 11,75 \text{ дм}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20}{2,95} = 6,8\text{дм}^3.$$

Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик складного несиметричного поперечного перерізу

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2,3.

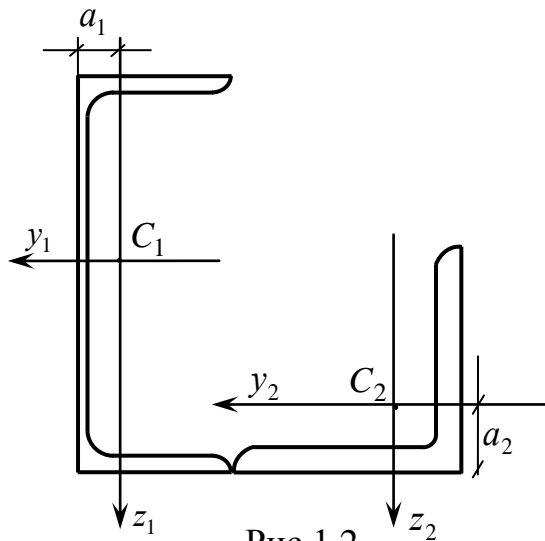


Рис.1.2

П р и к л а д. Для складного поперечного перерізу, що складається із швелера №20 і рівнобічного кутика $125 \times 125 \times 14$ мм, розташованих як зазначено на рис.1.2, визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти та радіуси інерції, побудувати еліпс інерції, знайти моменти опору.

Р о з в ' я з о к. Задачу розв'язуємо, дотримуючись наступного порядку обчислень.

1. Розбиваємо переріз на прості фігури (у нашому випадку швелер і кутик). Вводимо локальні системи координат із початком у центрах ваги простих фігур. Проводимо паралельні між собою вісі y_1, z_1 (для швелера) і y_2, z_2 (для кутика). Випишуємо геометричні характеристики складових перерізу із таблиць сортаменту:

швелер №20 : $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$, $h_1 = 20 \text{ см}$, $b_1 = 7,6 \text{ см}$, $a_1 = 2,07 \text{ см}$,

$$I_{y_1} = 1520 \text{ см}^4, I_{z_1} = 113 \text{ см}^4, I_{y_1 z_1} = 0.$$

кутик $125 \times 125 \times 14$ мм : $A_2 = 33,4 \text{ см}^2$, $b_2 = 12,5 \text{ см}$,
 $a_2 = 3,61 \text{ см}$, $I_{y_2} = I_{z_2} = 482 \text{ см}^4$, $I_{y_2 z_2} = 282 \text{ см}^4$.

Знак відцентрового моменту інерції для рівнобічного кутика вибираємо з умови, що полицки дають більший внесок у момент (знаки моментів полицок легко визначити по рисунку: у нашому випадку полицки лежать у першому і третьому квадрантах, де добуток $y_2 z_2 > 0$, отже $I_{y_2 z_2} > 0$).

Зображуємо переріз на рис. 1.3 відповідно до вибраного масштабу (рис.1.3).

2. Для визначення положення центру ваги перерізу вибираємо за початкову одну із введених на рис. 1 систем координат, наприклад, систему (y_1, z_1) . Визначаємо координати центрів ваги складових фігур в вибраній системі координат (перший індекс відповідає номеру системи координат, другий індекс – номеру фігури):

$$y_{11} = 0, \quad z_{11} = 0,$$

$$y_{12} = -b_1 - b_2 + a_1 + a_2 = -7,6 - 12,5 + 2,07 + 3,61 = -14,42 \text{ см},$$

$$z_{12} = h_1 / 2 - a_2 = 20 / 2 - 3,61 = 6,39 \text{ см}.$$

Площа поперечного перерізу $A = A_1 + A_2 = 23,4 + 33,4 = 56,8 \text{ см}^2$.

Визначаємо координати y_{1C}, z_{1C} центру ваги перерізу в системі координат (y_1, z_1) :

$$y_{1C} = \frac{\sum y_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{11} A_1 + y_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 - 14,42 \cdot 33,4}{56,8} = -8,48 \text{ см},$$

$$z_{1C} = \frac{\sum z_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{z_{11} A_1 + z_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 6,39 \cdot 33,4}{56,8} = 3,76 \text{ см}.$$

Позначаємо на рис. 2 центр ваги складного перерізу C і вводимо центральну систему координат yCz паралельно до початкової системи y_1, z_1 .

3. Знаходимо координати c_{y_i}, c_{z_i} центрів ваги простих фігур C_1, C_2 в осях y, z :

$$c_{y1} = y_{11} - y_{1C} = 0 + 8,48 = 8,48 \text{ см},$$

$$c_{z1} = z_{11} - z_{1C} = 0 - 3,76 = -3,76 \text{ см},$$

$$c_{y2} = y_{12} - y_{1C} = -14,42 + 8,48 = -5,94 \text{ см},$$

$$c_{z2} = z_{12} - z_{1C} = 6,39 - 3,76 = 2,63 \text{ см}.$$

Проведемо перевірку правильності положення знайденого центру ваги перерізу. Обчислюємо статичні моменти площі перерізу відносно центральних осей y, z (вони повинні дорівнювати нулеві):

$$S_y = \sum c_{z_i} A_i = c_{z1} A_1 + c_{z2} A_2 = -3,76 \cdot 23,4 + 2,63 \cdot 33,4 = -87,98 + 87,84 = -0,14 \text{ см}^3 \approx 0,$$

$$S_z = \sum c_{y_i} A_i = c_{y1} A_1 + c_{y2} A_2 = 8,48 \cdot 23,4 - 5,94 \cdot 33,4 = 198,43 - 198,39 = -0,034 \text{ см}^3 \approx 0.$$

4. Знаходимо осьові і відцентровий моменти інерції перерізу відносно центральних осей y, z :

$$I_y = \sum (I_{y_i} + c_{z_i}^2 A_i) = (I_{y_1} + c_{z1}^2 A_1) + (I_{y_2} + c_{z2}^2 A_2) = 1520 + (-3,76)^2 \cdot 23,4 + 482 + 2,63^2 \cdot 33,4 = 1520 + 330,8 + 482 + 231 = 2563,8 \text{ см}^4 \approx 2564 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \sum (I_{z_i} + c_{yi}^2 A_i) = (I_{z_1} + c_{y1}^2 A_1) + (I_{z_2} + c_{y2}^2 A_2) = 113 + 8,48^2 \cdot 23,4 +$$

$$+ 482 + (-5,94)^2 \cdot 33,4 = 113 + 1682,7 + 482 + 1178,5 = 3456,2 \text{ см}^4 \approx 3456 \text{ см}^4,$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + c_{zi} c_{yi} A_i) = (I_{y_1 z_1} + c_{z1} c_{y1} A_1) + (I_{y_2 z_2} + c_{z2} c_{y2} A_2) = 0 +$$

$$+ 8,48 \cdot (-3,76) \cdot 23,4 + 282 + (-5,94) \cdot 2,63 \cdot 33,4 = -746,1 + 282 - 521,8 = -986 \text{ см}^4.$$

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції, для чого знаходимо кут α_0

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = \frac{2 \cdot (-986)}{3456 - 2564} = \frac{-1972}{892} = -2,2108$$

$$2\alpha_0 = -65,66^\circ, \quad \alpha_0 = -32,83^\circ.$$

Знаходимо значення тригонометричних функцій

$$\sin \alpha_0 = \sin(-32,83^\circ) = -0,5422, \quad \cos \alpha_0 = \cos(-32,83^\circ) = 0,8403,$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin(-65,66^\circ) = -0,9111, \quad \cos 2\alpha_0 = \cos(-65,66^\circ) = 0,4121,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg}(-32,83^\circ) = -0,6452.$$

6. Обчислюємо головні осьові моменти інерції різними способами:

$$\text{а) } I_u = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot 0,8403^2 +$$

$$+ 3456 \cdot (-0,5422)^2 - (-986) \cdot (-0,9111) = 1810,45 + 1016 - 898,34 = 1927,8 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_y \sin^2 \alpha_0 + I_z \cos^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot (-0,5422)^2 +$$

$$+ 3456 \cdot 0,8403^2 - 986 \cdot (-0,9111) = 753,77 + 2440,3 + 898,34 = 4092,4 \text{ см}^4;$$

$$\text{б) } I_u = I_y - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 2564 - (-986) \cdot (-0,6452) = 1927,8 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_z + I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 3456 + (-986) \cdot (-0,6452) = 4092,2 \text{ см}^4;$$

в) моменти інерції відносно головних центральних осей повинні співпадати з екстремальними значеннями осьових моментів інерції:

$$I_{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{2564 + 3456}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2564 - 3456}{2}\right)^2 + (-986)^2} =$$

$$= 3010 \pm \sqrt{198916 + 972196} = 3010 \pm 1082,2$$

$$I_{\max} = 4092,2 \text{ см}^4 = I_v, \quad I_{\min} = 1927,8 \text{ см}^4 = I_u.$$

Для перевірки обчислимо також відцентровий момент інерції (він повинен дорівнювати нулю)

$$I_{uv} = I_{yz} \cos 2\alpha_0 + (I_y - I_z) \frac{\sin 2\alpha_0}{2} = -986 \cdot 0,4121 +$$

$$+ (2564 - 3456) / 2 \cdot (-0,9111) = -406,33 + 406,35 = 0,02 \text{ см}^4 \approx 0.$$

На рисунку проводимо головні центральні вісі інерції, повернуті на кут $\alpha_0 = -32,83^\circ$ проти годинникової стрілки (тобто на кут $32,83^\circ$ за годинниковою стрілкою) від центральних осей y, z .

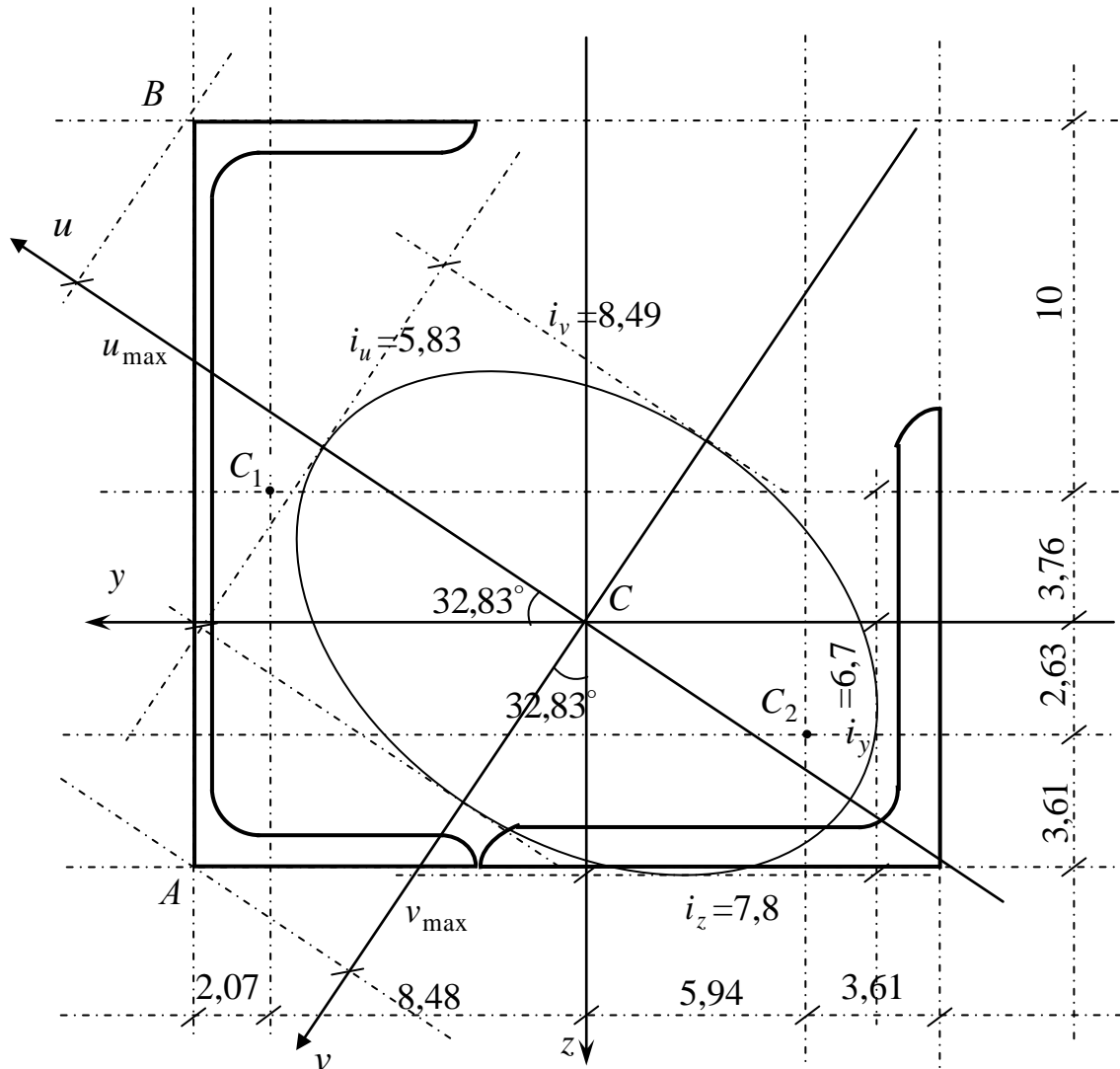


Рис. 1.3

7. Обчислюємо головні радіуси інерції

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{1927,8}{56,8} = 34 \text{ см}^2, \quad i_u = 5,83 \text{ см},$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{4092,2}{56,8} = 72 \text{ см}^2, \quad i_v = 8,49 \text{ см}$$

і будуюмо еліпс інерції

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1.$$

Маючи побудований еліпс інерції, можна графічно визначити осьові моменти інерції перерізу відносно довільної центральної системи координат. Вимірюємо на рисунку значення радіусів інерції i_y та i_z відносно осей z і y (для цього треба провести паралельні цим осям дотичні до еліпса інерції і виміряти відстань між осями і дотичними)

$$i_y = 6,7 \text{ см}, \quad i_z = 7,8 \text{ см}.$$

По вимірних радіусах інерції обчислимо осьові моменти інерції відносно центральних осей

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 6,7^2 \cdot 56,8 = 2550 \text{ см}^4, \quad I_z = i_z^2 \cdot A = 7,8^2 \cdot 56,8 = 3456 \text{ см}^4$$

і порівняємо з визначеними раніше значеннями

$$I_y = 2564 \text{ см}^4, \quad I_z = 3456 \text{ см}^4.$$

Невеликі розбіжності свідчать про правильність аналітичних обчислень і геометричних побудов.

8. Визначаємо головні моменти опору відносно осей u, v за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}},$$

в яких u_{\max} – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі v , v_{\max} – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі u .

Для визначення u_{\max} , v_{\max} знаходимо координати точок A і B у центральній системі координат y, z , а потім скористаємося формулами перетворення координат при повороті координатних осей

$$u_A = y_A \cos \alpha_0 + z_A \sin \alpha_0, \\ v_A = -y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0.$$

Для точки A знаходимо:

$$y_A = 2,07 + 8,48 = 10,55 \text{ см}, \quad z_A = 3,61 + 2,63 = 6,24 \text{ см},$$

$$v_{\max} = |-y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0| = |-10,55 \cdot (-0,5422) + 6,24 \cdot 0,8403| = 5,72 + 5,24 = 10,96 \text{ см}.$$

Для точки B знаходимо:

$$y_B = y_A = 10,55 \text{ см}, \quad z_B = -10 - 3,76 = -13,76 \text{ см},$$

$$u_{\max} = |y_B \cos \alpha_0 + z_B \sin \alpha_0| = |10,55 \cdot 0,8403 - 13,76 \cdot (-0,5422)| = 8,86 + 7,46 = 16,32 \text{ см.}$$

Вимірюємо на рис. 1.3 значення u_{\max} , v_{\max} в масштабі:

$$u_{\max} \approx 16 \text{ см}, \quad v_{\max} \approx 11 \text{ см},$$

що відповідає обчисленим величинам.

Обчислюємо моменти опору відносно головних осей

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{1928}{10,96} = 176 \text{ см}^3, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{4092}{16,3} = 251 \text{ см}^3.$$

2. Розтягування (стискування) стержнів. Розрахунок стержневих систем.

Теоретичні відомості. При одноосному навантаженні стержня рівнодійна внутрішніх сил в заданому перерізі називається *поздовжньою силою* N . Для визначення сили N використовується метод перерізів: стержень розрізається на дві частини, одна з яких відкидається; вплив відкинутої частини на ту, що залишилась, замінюють зусиллям N . Значення зусилля N визначається з рівняння рівноваги для частини стержня, що залишилась, і залежить від зовнішніх сил, в тому числі власної ваги.

При навантаженні стержня зосередженими поздовжніми силами без врахування власної ваги поздовжня сила N залишається постійною в довільному перерізі ділянки стержня між точками прикладання сил. Зусилля N дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відрізану частину стержня. N додатне, якщо ділянка розтягнута (діє від перерізу), і від'ємне, якщо ділянка стиснута (діє до перерізу).

Графік, що показує зміну N по довжині стержня, називається епюрою поздовжніх сил (епюрою N).

При розрахунках на розтягування (стискування) стержнів вважаємо, що для поперечних перерізів стержня виконується *гіпотеза плоских перерізів*: плоскі поперечні перерізи стержня в процесі деформування рухаються як жорсткі тіла, залишаючись плоскими та перпендикулярними до деформованої вісі стержня.

Нормальне напруження в конкретному перерізі стержня з врахуванням гіпотези плоских перерізів визначається за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A – площа поперечного перерізу. Графік, що показує зміну нормальних напружень по довжині стержня, називається епюрою нормальних напружень (епюрою σ).

Переріз, в якому нормальне напруження має найбільше абсолютне значення ($\sigma = \sigma_{\max}$), називається небезпечним.

В межах пружності $\sigma \leq \sigma_e$ виконується закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

де E – модуль Юнга (модуль пружності першого роду), $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ – відносна поздовжня деформація.

Видовження $u_l = \Delta$ ділянки стержня довжиною l зі сталою жорсткістю на розтяг EA під дією сталої сили N знаходиться за формулою

$$\Delta = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.3)$$

Умова міцності при осьовому розтягуванні або стискуванні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.4)$$

де σ_{adm} – допустимі нормальні напруження для конкретного матеріалу.

Для крихких матеріалів (камінь, бетон, цегла) допустимі значення нормальних напружень на розтягування та стискування суттєво відрізняються, тому оцінка міцності для розтягнутих і стиснутих ділянок проводиться окремо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &\leq \sigma_{adm}^+, \\ \sigma_{\max}^- &\leq \sigma_{adm}^-. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При перевірці міцності допускається перенапруження

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% \leq 5\%. \quad (2.6)$$

При підборі перерізу необхідна площа поперечного перерізу знаходиться за допомогою виразу

$$A_{нб} = \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}}. \quad (2.7)$$

Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони. Перевірити міцність заданої в дод. 5 ступінчатої кам'яної колони та визначити переміщення її характерних перерізів, якщо модуль Юнга $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допустимі напруження $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$, $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$.

Приклад. Двоступінчата кам'яна колона (площа верхнього перерізу $A_1 = 0,3 \text{ м}^2$, площа нижнього перерізу $A_2 = 0,5 \text{ м}^2$) навантажена

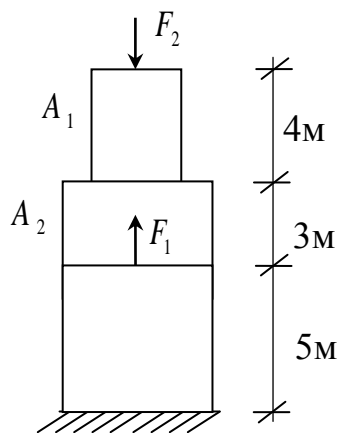


Рис. 2.1

силами $F_1 = 320 \text{ кН}$, $F_2 = 250 \text{ кН}$ (рис.2.1). По-

будувати епюри поздовжньої сили N , нормальних напружень σ та переміщень поперечних перерізів u (модуль Юнга

$E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$). Перевірити міцність колони, якщо допустиме напруження на розтягування

$\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$, на стискування

$\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$.

Розв'язок. 1. Розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сили та зміни площі поперечного перерізу та номеруємо їх, починаючи з вільного кінця (рис.2.3).

З а у в а ж е н н я. Поздовжня сила N завжди діє від перерізу, власна вага Q діє вниз. Тобто якщо стержень закріплений зверху, то відкидається верхня частина стержня, вісь x та сила N спрямовуються вгору.

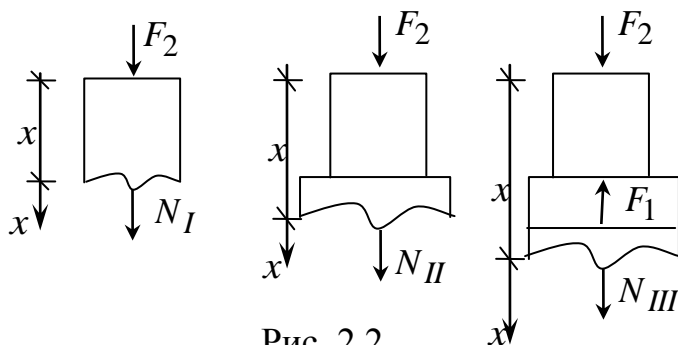


Рис. 2.2

За допомогою методу перерізів знаходимо значення внутрішньої сили N на кожній з ділянок (рис. 2.2):

Рівняння рівноваги для першої та другої ділянок однакові

$$N_I + F_2 = 0, \quad N_{II} + F_2 = 0, \quad N_I = N_{II} = -F_2 = -250 \text{ кН}.$$

Для третьої ділянки маємо $N_{III} + F_2 - F_1 = 0$,
 $N_{III} = F_1 - F_2 = 320 - 250 = 70 \text{ кН}.$

2. Знаходимо нормальні напруження σ на кожній з ділянок:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.3} = -833,3 \text{ кПа} = -0,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.5} = -500 \text{ кПа} = -0,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.5} = 140 \text{ кПа} = 0,14 \text{ МПа}.$$

По знайдених значеннях N та σ на рис. 2.3 будемо епюри :

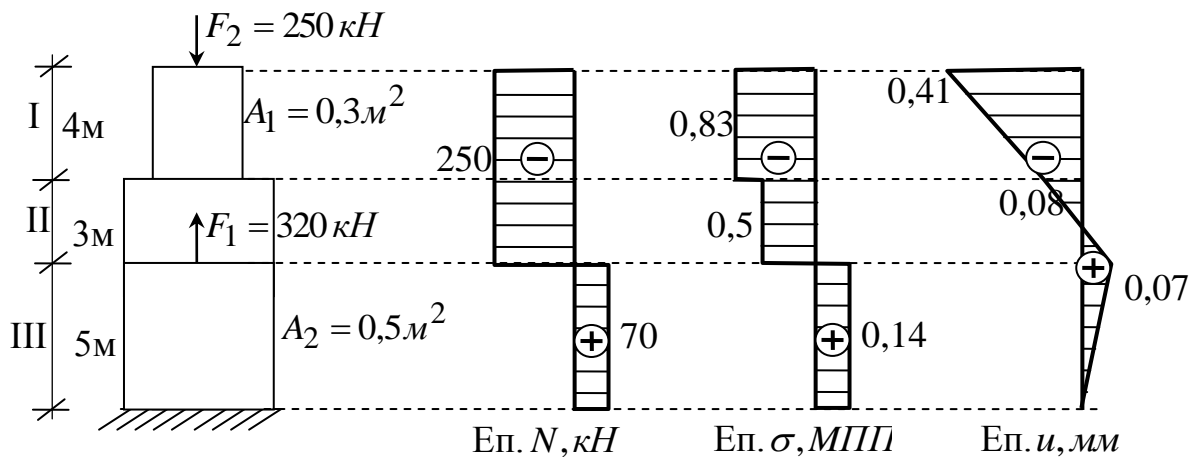


Рис. 2.3

3. Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^- = 0,83 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^+ = 0,14 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}.$$

Міцність колони забезпечено.

4. Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня:

$$\Delta_I = \frac{N_I l_I}{EA_1} = \frac{\sigma_I l_I}{E} = \frac{-0,83 \cdot 4}{0,1 \cdot 10^5} = -3,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,33 \text{ мм};$$

$$\Delta_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EA_2} = \frac{\sigma_{II} l_{II}}{E} = \frac{-0,5 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^5} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{EA_2} = \frac{\sigma_{III} l_{III}}{E} = \frac{0,14 \cdot 5}{0,1 \cdot 10^5} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,07 \text{ мм}.$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0;$$

$$u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 + 0,07 = 0,07 \text{ м};$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = 0,07 - 0,15 = -0,08 \text{ м, ;}$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,08 - 0,33 = -0,41 \text{ м, .}$$

На рис. 2.3 будемо епюру переміщень.

Задача 2.2. Розрахунок статично визначеної стержневої системи.

Стержнева підвіска, що складається з двох шарнірно закріплених стержнів однакового поперечного перерізу (дод. б), навантажена силою F . Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ та визначити переміщення точки В прикладання сили.

П р и к л а д. До шарнірно з'єднаних стержнів 1, 2 однакового поперечного перерізу підвішено вантаж вагою $F = 120 \text{ кН}$. Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ та визначити переміщення точки В прикладання сили.

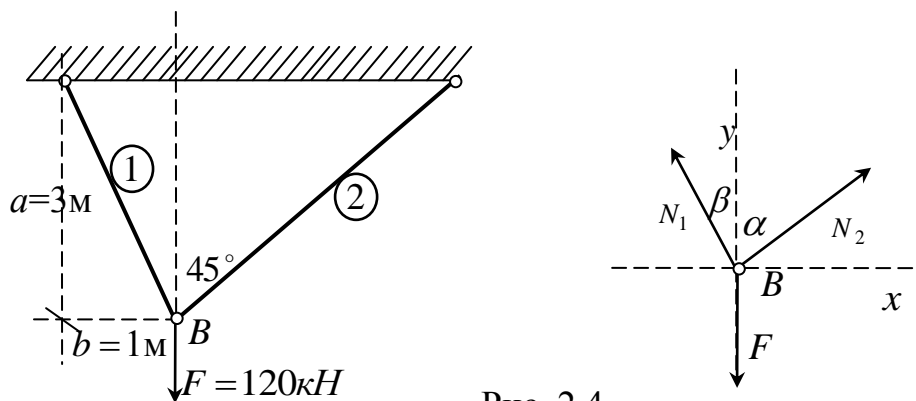


Рис. 2.4

Р о з в' я з а н н я. При такому навантаженні в стержнях 1, 2 виникають внутрішні поздовжні сили N_1, N_2 , які знаходимо з рівняння рівноваги для точки В (рис. 2.4):

$$- N_1 \sin \beta + N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Знайдемо довжини стержнів та тригонометричні значення для кутів:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ м,}$$

$$l_2 = a / \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м,}$$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \beta = b / l_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = a / l_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги:

$$N_1 = N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = N_2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}N_2, \quad \sqrt{5}N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

$$N_2 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - F = 2\sqrt{2}N_2 - F = 0,$$

$$N_2 = \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{120}{2\sqrt{2}} = 42,4 \text{ кН}, \quad N_1 = \sqrt{5}N_2 = \sqrt{5} \cdot 42,4 = 94,9 \approx 95 \text{ кН}.$$

Підбираємо площу поперечних перерізів стержнів

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm} \rightarrow A_{\text{нб}} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{95 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 15,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 158 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{42,4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 7,07 \cdot 10^7 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{158 \cdot 10^6 \cdot 3,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 249,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{70,7 \cdot 10^6 \cdot 4,24}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 149,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

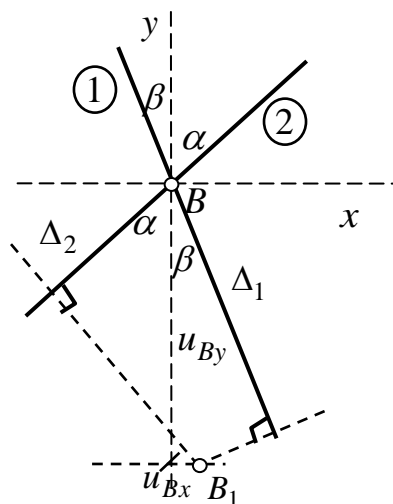


Рис. 2.5

Положення точки B після деформування системи знайдемо за допомогою *методу засічок*: на кожному з стержнів відкладаємо від точки B його видовження (або скорочення) та проводимо перпендикуляри до стержнів в отриманих точках. Точка B переміститься в точку B_1 перетину цих перпендикулярів (див. рис. 2.5). Проекції переміщення точки B u_{Bx}, u_{By} на осі x, y знайдемо за допомогою наступного правила: видовження Δ стержня дорівнює сумі проекцій переміщень u_{Bx}, u_{By} на на-

прямок цього стержня. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} 3u_{By} + u_{Bx} = \Delta_1 \sqrt{10}, \\ u_{By} - u_{Bx} = \Delta_2 \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$u_{By} = \frac{\Delta_2 \sqrt{2} + \Delta_1 \sqrt{10}}{4} = \frac{1,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{10}}{4} = 2,5 \text{ мм},$$

$$u_{Bx} = -\Delta_2 \sqrt{2} + u_{By} = -1,5\sqrt{2} + 2,5 = 0,38 \text{ мм}.$$

Повне переміщення точки B

$$u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,38^2} = 2,53 \text{ мм}.$$

Рисунок для методу засічок потрібно виконувати в масштабі. В такому випадку значення u_{Bx}, u_{By} можна перевірити шляхом безпосереднього вимірювання на рисунку.

3. Побудова епюр внутрішніх зусиль

Теоретичні відомості. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балки при плоскому згині. Якщо зовнішнє навантаження лежить в площині, що проходить через одну з головних осей поперечного перерізу та вісь стержня, та перпендикулярне до вісі балки, балка знаходиться в стані *плоского згину*. При цьому в поперечних перерізах виникають поперечна сила Q та згинальний момент M .

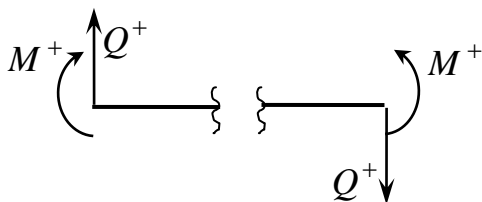


Рис. 3.1

Поперечна сила Q визначається як алгебраїчна сума проекцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки з одного боку від перерізу. Поперечна сила додатна, якщо вона намагається повернути відрізану частину балки

за годинниковою стрілкою.

Згинальний момент M визначається як алгебраїчна сума моментів всіх сил з одного боку від перерізу відносно точки перерізу. Згинальний момент додатній, якщо він стискує верхні волокна балки (зовнішні волокна рами). Додатні напрямки для сил та моментів з одного боку від перерізу ілюструються рис.3.1 (правило знаків).

Побудова епюр починається з визначення *реакцій в'язей*. В розрахункових схемах плоских конструкцій зустрічаються три типи опор:

– шарнірно-рухома опора (рис. 3.2.а), яку можна замінити одні-

єю реакцією R_a , що діє в напрямку обмеження руху балки;

– шарнірно–нерухома опора (рис. 3.2.б), характеризується двома складовими опорної реакції: горизонтальною H_a та вертикальною R_a ;

– жорстке защемлення – опора (рис. 3.2.в) замінюється трьома складовими реакції: горизонтальною силою H_a , вертикальною R_a та реактивним моментом M_a .

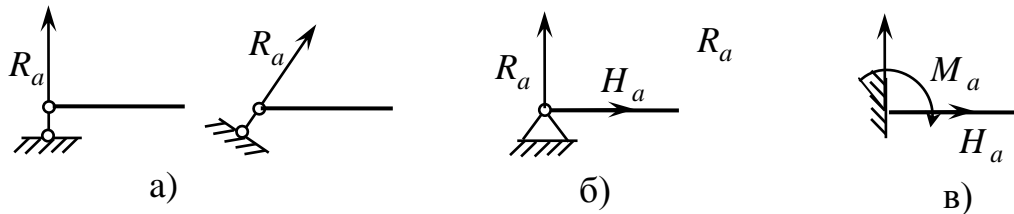


Рис. 3.2

Реакції в'язей визначаються з *рівнянь рівноваги*. Для плоскої системи сил маємо три лінійно–незалежних рівняння рівноваги. Надалі для визначення реакцій шарнірно–закріпленої балки зручно користуватися наступною системою:

$\sum F_x = 0$ – сума проєкцій всіх сил на вісь балки дорівнює нулю;

$\sum M_a = 0$ – сума моментів всіх сил відносно закріплення A дорівнює нулю;

$\sum M_b = 0$ – сума моментів всіх сил відносно закріплення B дорівнює нулю.

Для перевірки правильності знайдених реакцій використовуємо рівняння $\sum F_z = 0$ – сума проєкцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки дорівнює нулю.

Наявність проміжного шарніру додає ще одне рівняння рівноваги: $\sum M_C^l = 0$ або $\sum M_C^r = 0$ – сума моментів всіх сил, що діють зліва (справа) від шарніру C відносно точки C , дорівнює нулю.

Якщо кількість невідомих реакцій співпадає з кількістю рівнянь рівноваги, то конструкція є *статично визначеною*.

Якщо невідомих реакцій більше, ніж рівнянь рівноваги, то конструкція є *статично невизначеною*.

Епюри внутрішніх зусиль будуються шляхом застосування методу перерізів на окремих ділянках балки (див. приклад до задачі 3.1) або в характерних точках (див. приклад до задачі 4.1, рекомендується

для додатків 8-12). Характерними називаються точки прикладання зосереджених сил (включаючи реакції в'язей) або моментів та початку і кінця розподіленого навантаження. Розбиття балки на ділянки також проводиться по характерних точках.

Епюри внутрішніх зусиль будуються на осьовій лінії заданої балки. Додатні значення Q відкладаються вгору від осьової лінії, від'ємні – вниз. Додатні значення згинального моменту M відкладаються вниз від осьової лінії, від'ємні – вгору (епюра M будується на розтягнутих волокнах).

Для згинального моменту M та поперечної сили Q виконуються диференціальні залежності, що випливають з рівняння рівноваги елемента довжиною dx :

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (3.1)$$

З диференціальних залежностей (3.1) та вищенаведених правил визначення внутрішніх зусиль впливають наступні *правила побудови епюр* згинального моменту M та поперечної сили Q :

1. В точці прикладання зосередженої сили на епюрі Q буде розрив на величину цієї сили, на епюрі M спостерігається злом.

2. В точці прикладання зосередженого моменту на епюрі M буде розрив на величину цього моменту, епюра Q неперервна.

3. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, епюра Q буде горизонтальною, епюра M – похилою прямою.

4. На ділянках прикладання рівномірно розподіленого навантаження епюра Q – похила пряма, епюра M – парабола.

5. При $Q > 0$ M зростає, при $Q < 0$ M спадає, при $Q = 0$ на епюрі M виникає екстремум (вершина параболи).

Побудова епюр для плоских рам під дією плоскої системи сил. Рамами називають системи, що складаються з прямолінійних стержнів, жорстко з'єднаних між собою. Вісь рами являє собою ламану лінію, але кожен ділянку можна розглядати як балку. При

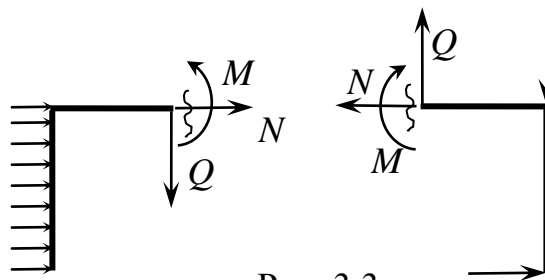


Рис. 3.3

цьому в поперечних перерізах виникають поздовжня сила N , поперечна сила Q та згинальний момент M . Поздовжня сила N визначається як алгебраїчна сума проєкцій всіх сил (включаючи опорні реакції) на вісь балки з одного боку від перерізу (рис. 3.3). Якщо поздовжня сила викликає розтяг ділянки, до вона додатна, і навпаки. Поперечна сила Q – алгебраїчна сума проєкцій всіх прикладених до відрізаної частини рами сил на перпендикуляр до вісі, знак “+” в випадку, якщо сила повертає відрізану частину за годинниковою стрілкою. Згинальний момент M шукаємо як алгебраїчну суму моментів всіх сил, що діють з одного боку від перерізу, відносно точки перерізу; знак “+” маємо, коли стискаються зовнішні волокна рами. Для побудови епюр знаходимо значення N, Q, M в характерних перерізах, а потім з’єднують знайдені точки згідно до правил побудови епюр. Додатні значення N, Q відкладаються з зовнішнього боку рами, від’ємні – з внутрішнього. Еюра M будується на розтягнутих волокнах.

Побудова епюр для плоских криволінійних стержнів. В поперечних перерізах плоского криволінійного бруса діють, як і в рамах, зусилля N, Q, M . Найчастіше розглядаються стержні малої кривизни, вісь яких є дугою кола ($h/R < 1/5$, h – висота поперечного перерізу, R – радіус кола). В такому випадку зручно вводити полярну систему координат, і внутрішні зусилля будуть функціями від кута φ : $N(\varphi), Q(\varphi), M(\varphi)$.

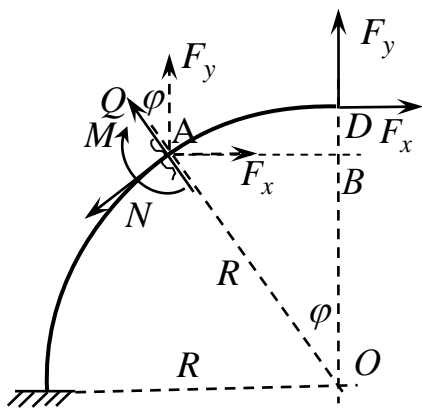


Рис. 3.4

Зусилля в перерізі φ (рис. 3.4) знаходяться з рівнянь рівноваги для відрізаної частини: сума проєкцій всіх сил на нормаль до перерізу (дотичну до кола)

$$N(\varphi) - F_y \sin \varphi - F_x \cos \varphi = 0,$$

сума проєкцій всіх сил на перпендикуляр до вісі (на радіус кола)

$$Q(\varphi) + F_y \cos \varphi - F_x \sin \varphi = 0,$$

сума моментів всіх сил відносно точки перерізу (точки А)

$$-M(\varphi) + F_y \cdot AB - F_x \cdot BD = -M(\varphi) + F_y \cdot R \sin \varphi - F_x \cdot (R - R \cos \varphi) = 0.$$

Таким чином, для стержня, навантаженого силами F_x, F_y (рис.3.4) внутрішні зусилля визначатимуться за формулами

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= F_y \sin \varphi + F_x \cos \varphi, & Q(\varphi) &= -F_y \cos \varphi + F_x \sin \varphi, \\ M(\varphi) &= F_y \cdot R \sin \varphi - F_x R \cdot (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Якщо ділянка стержня навантажена рівномірно розподіленим по дузі кривої навантаженням q , то рівнодійна від нього дорівнює добутку навантаження q на довжину хорди, що стягує цю дугу, і прикладена посередині цієї хорди перпендикулярно до неї (рис. 3.5)

Внутрішні зусилля в криволінійному стержні задовольняють диференціальним залежностям, що впливають з рівнянь рівноваги для елементарної ділянки:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= -Q; & \frac{dQ}{d\varphi} &= N + qR; \\ \frac{dM}{d\varphi} &= -QR. \end{aligned} \quad (3.3)$$

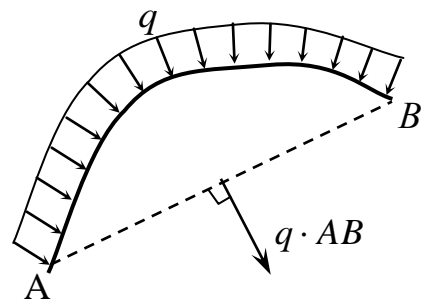


Рис. 3.5

Для побудови епюр обчислюємо значення внутрішніх зусиль в перерізах з певним кроком по φ (наприклад, з кроком $\pi/6$). Знайдені значення внутрішніх зусиль відкладаються на епюрах по нормалі до дуги кола. Додатні значення сил відкладаємо на зовнішніх волокнах стержня, епюра моментів будується на розтягнутих волокнах. В точках прикладання зосереджених сил повинен бути скачок на епюрах сил, в точці прикладання зосередженого моменту— скачок на епюрі моментів. На ділянках, де $Q=0$, M стала; в точці, де $Q=0$, на епюрі M маємо екстремум.

Побудова епюр для плоскої рами під дією вертикального навантаження.

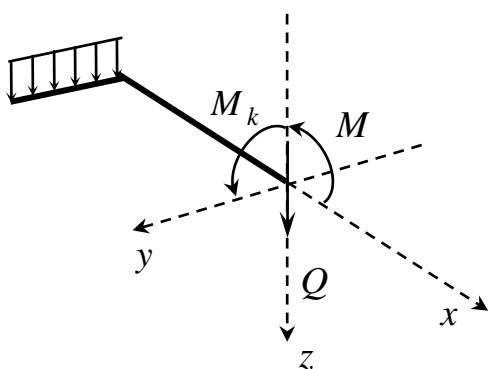


Рис. 3.6

При такому навантаженні в перерізах рами виникають поперечна сила Q , згинальний момент M та крутильний момент M_k . Вони знаходяться як алгебраїчна сума сил та моментів зовні-

шніх сил, що діють з одного боку від перерізу. Будемо вважати, що згинальний момент M додатній, якщо він стискує верхні волокна балки; крутильний момент додатній, якщо він закручує відрізану частину проти годинникової стрілки (рис 3.6). При повороті вісі рами на 90° крутильний момент стає згинальним, а згинальний стає крутильним. Поперечна сила та згинальний момент на кожній з ділянок задовольняють рівнянням рівноваги (3.1) та правилам побудови епюр.

Внутрішні зусилля при просторовому навантаженні. При просторовому навантаженні внутрішні зусилля в поперечних перерізах стержнів зводяться до головного вектору \vec{F} і головного моменту \vec{M} . Введемо систему координат: вісь x направлена вздовж вісі стержня, осі y, z є головними центральними вісями поперечного перерізу.

Проектуючи головний вектор \vec{F} і головний момент \vec{M} на вісі x, y, z , отримуємо шість складових внутрішніх зусиль: поздовжня сила N , поперечні (перерізуючі) сили Q_y, Q_z , згинальні моменти M_y, M_z та крутильний момент $M_k = M_x$ (рис. 3.7). Поздовжня сила N додатня, якщо вона викликає розтягування; поперечні сили Q_y, Q_z додатні, якщо вони повертають відрізану частину стержня за годинниковою стрілкою при спостереженні з боку вісей z, y відповідно; моменти M_x, M_y, M_z будемо вважати додатніми, якщо вони діють проти годинникової стрілки при спостереженні з боку осей x, y, z відповідно. Внутрішні зусилля визначаються з рівнянь рівноваги відрізаної частини балки або як алгебраїчна сума проєкцій сил на відповідну вісь чи моментів відносно відповідної вісі.

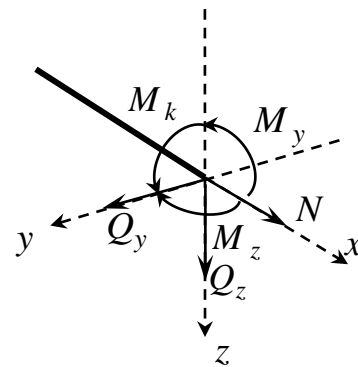


Рис. 3.7

Проектуючи головний вектор \vec{F} і головний момент \vec{M} на вісі x, y, z , отримуємо шість складових внутрішніх зусиль: поздовжня сила N , поперечні (перерізуючі) сили Q_y, Q_z , згинальні моменти M_y, M_z та крутильний момент $M_k = M_x$ (рис. 3.7). Поздовжня сила N додатня, якщо вона викликає розтягування; поперечні сили Q_y, Q_z додатні, якщо вони повертають відрізану частину стержня за годинниковою стрілкою при спостереженні з боку вісей z, y відповідно; моменти M_x, M_y, M_z будемо вважати додатніми, якщо вони діють проти годинникової стрілки при спостереженні з боку осей x, y, z відповідно. Внутрішні зусилля визначаються з рівнянь рівноваги відрізаної частини балки або як алгебраїчна сума проєкцій сил на відповідну вісь чи моментів відносно відповідної вісі.

Задача 3.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль для балок. Для заданих балок (дод. 7-12) побудувати епюри внутрішніх зусиль.

П р и к л а д. Для консольної балки (рис. 3.8) (дод.7) визначити внутрішні зусилля методом перерізів на ділянках та побудувати їх епюри.

Р о з в' я з а н н я. Для консольної балки визначати реакції в'язей

не обов'язково, тому будемо будувати епюри починаючи з незакріпленого кінця. Водимо вісь x зправа наліво та розбиваємо стержень на ділянки характерними точками. На кожній з ділянок робимо умовний переріз та прикладаємо поперечну силу $Q(x)$ та згинальний момент $M(x)$ згідно до правила знаків (рис. 3.1). Інших внутрішніх сил не буде, оскільки балка знаходиться в стані плоского згину. Записуємо систему рівнянь рівноваги для відрізаної частини (рис. 3.9), що складатиметься з суми проєкцій всіх сил на вертикальну вісь та суми моментів всіх сил відносно точки перерізу, та знаходимо $Q(x)$ та $M(x)$ на кожній з ділянок. В отримані вирази підставляємо координати початку та кінця ділянки.

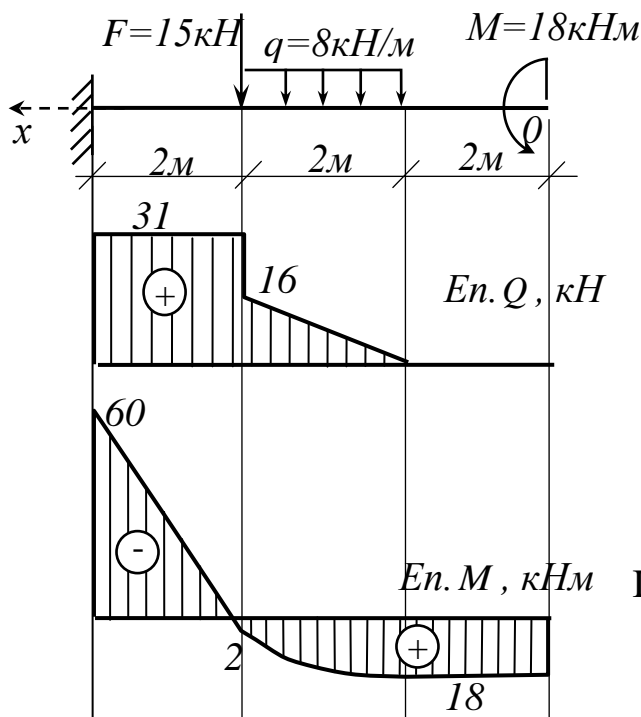


Рис. 3.8

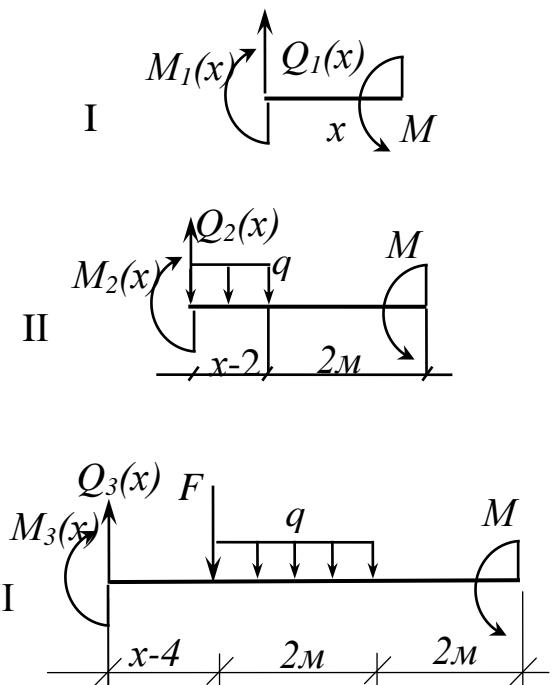


Рис. 3.9

$$\begin{aligned}
 \text{I) } 0 \leq x < 2: \quad Q_1(x) &= 0, \quad -M_1(x) + M = 0, \quad M_1(x) = M = 18 \text{ кНм}; \\
 \text{II) } 2 < x < 4: \quad -Q_2(x) + q(x-2) &= 0, \quad -M_2(x) - q \frac{(x-2)^2}{2} + M = 0, \\
 Q_2(x) = q(x-2) &= 8(x-2), \quad Q_2(2) = 0, \quad Q_2(4) = 8(4-2) = 16 \text{ кН}, \\
 M_2(x) = -q \frac{(x-2)^2}{2} + M &= -8 \frac{(x-2)^2}{2} + 18 = -4(x-2)^2 + 18, \\
 M_2(2) &= 18 \text{ кНм}; \quad M_2(4) = -4(4-2)^2 + 18 = 2 \text{ кНм}; \\
 \text{III) } 4 < x < 6: \quad -Q_3(x) + q \cdot 2 + F &= 0,
 \end{aligned}$$

$$-M_3(x) - F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = 0,$$

$$Q_3(x) = 2q + F = 2 \cdot 8 + 15 = 31 \text{ кНм},$$

$$M_3(x) = -F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = -15(x-4) - 8 \cdot 2(x-3) + 18 = -31x + 126,$$

$$M_3(4) = -31 \cdot 4 + 126 = 2 \text{ кНм}; \quad M_3(6) = -31 \cdot 6 + 126 = -60 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри для поперечної сили $Q(x)$ та згинального моменту $M(x)$ по отриманих значеннях.

Задача 3.2. Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоскої рами.

Для заданої плоскої рами під дією плоскої системи сил (дод. 13, 14) побудувати епюри поздовжньої сили N , поперечної сили Q та згинального моменту M .

П р и к л а д. Для плоскої рами (рис. 3.10) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

Р о з в' я з а н н я. Рама шарнірно закріплена. Відкидаємо в'язі та прикладаємо невідомі реакції: V_A вздовж вісі шарнірного закріплення, V_B, H_B – горизонтальна складова реакції R_B в шарнірно-нерухомій опорі. Отримуємо схему балки на рис. 3.11.

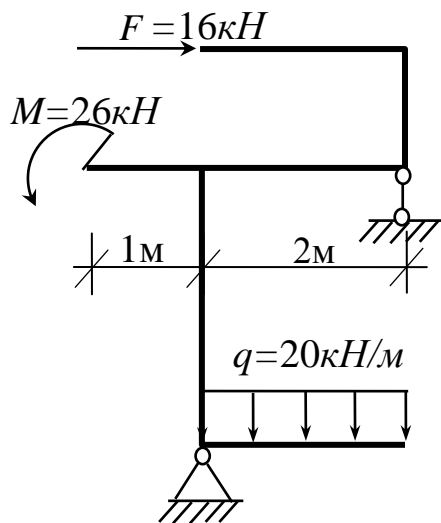


Рис. 3.10

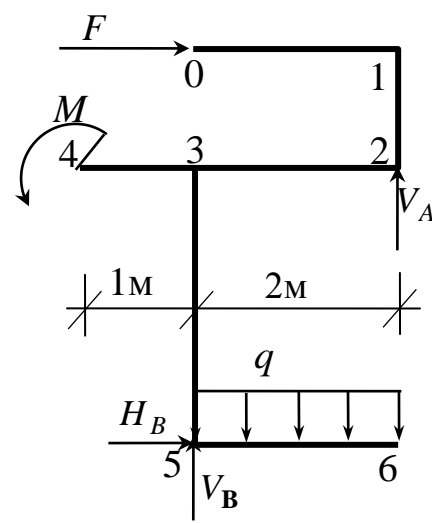


Рис. 3.11

Запишемо систему рівнянь рівноваги та знаходимо реакції в'язей:

$$\sum F_x = F + H_B = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = -F = -16 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 4,5 + M + V_A \cdot 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_A = (q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 4,5 - M) / 2 = (20 \cdot 2 \cdot 1 + 16 \cdot 4,5 - 26) / 2 = 43 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -F \cdot 1,5 + M + H_B \cdot 3 - V_B \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_B = (-F \cdot 1,5 + M + H_B \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1) / 2 = (-16 \cdot 1,5 + 26 - 16 \cdot 3 + 20 \cdot 2 \cdot 1) / 2 = -3 \text{ кН}.$$

Вводимо нумерацію характерних точок від 0 до 6. Для кожного з стержнів рами шукаємо внутрішні зусилля N , Q , M як описано вище.

$$\text{Стержень 0-1: } N_{0-1} = -16 \text{кН}, \quad Q_{0-1} = 0, \quad M_{0-1} = 0;$$

$$\text{Стержень 1-2: } N_{1-2} = 0, \quad Q_{1-2} = 16 \text{кН},$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = F \cdot 1,5 = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{кНм};$$

$$\text{Стержень 2-3: } N_{2-3} = 16 \text{кН}, \quad Q_{2-3} = -V_A = -43 \text{кН},$$

$$M_2 = -F \cdot 1,5 = -16 \cdot 1,5 = -24 \text{кНм},$$

$$M_3 = -F \cdot 1,5 + V_A \cdot 2 = -16 \cdot 1,5 + 43 \cdot 2 = 62 \text{кНм};$$

$$\text{Стержень 4-3: } N_{4-3} = 0, \quad Q_{4-3} = 0, \quad M_{4-3} = -M = -26 \text{кНм};$$

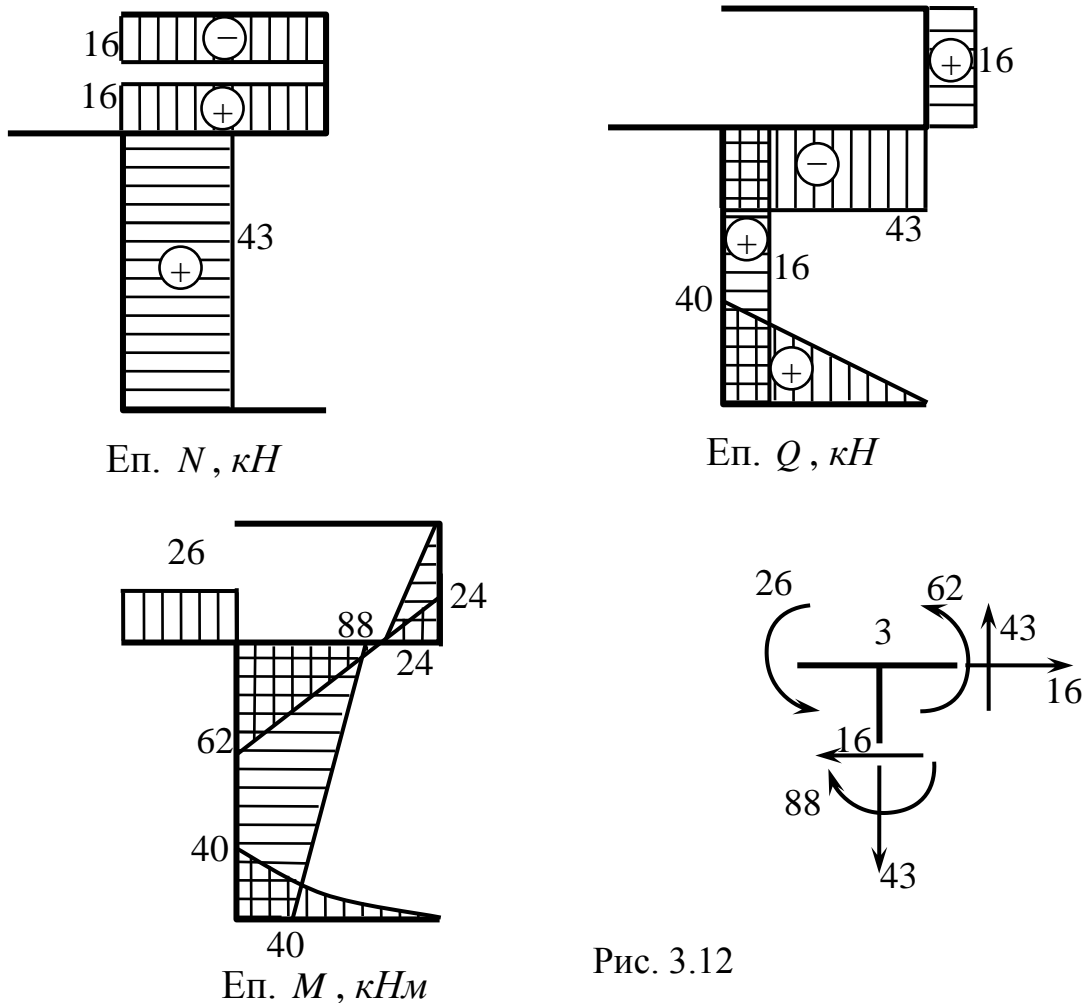
$$\text{Стержень 6-5: } N_{6-5} = 0, \quad Q_6 = 0, \quad Q_5 = q \cdot 2 = 40 \text{кН},$$

$$M_6 = 0, \quad M_5 = q \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{кНм};$$

$$\text{Стержень 5-3: } N_{5-3} = -V_B + q \cdot 2 = -(-3) + 20 \cdot 2 = 43 \text{кН},$$

$$Q_{5-3} = -H_B = 16 \text{кН}, \quad M_5 = q \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{кНм},$$

$$M_3 = q \cdot 2 \cdot 1 - H_B \cdot 3 = 20 \cdot 2 \cdot 1 - (-16) \cdot 3 = 88 \text{кНм}.$$



Будуємо епюри (рис. 3.12). Епюра M будується на розтягнутих волокнах. По побудованих епюрах робимо перевірку рівноваги вузла 3.

Задача 3.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в криволінійних стержнях.

Для заданого плоского криволінійного стержня під дією плоскої системи сил (дод. 17) побудувати епюри поздовжньої сили N , поперечної сили Q та згинального моменту M .

П р и к л а д. Для плоского криволінійного стержня (рис. 3.13) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

Р о з в' я з а н н я. Вводимо полярну систему координат з нульовою віссю OB . Робимо умовний переріз та прикладаємо невідомі внутрішні зусилля $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$. Розбиваємо стержень на ділянки та для кожної з них записуємо рівняння рівноваги:

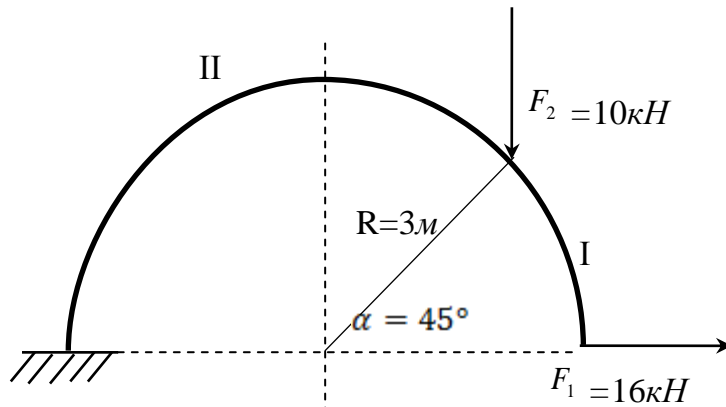


Рис. 3.13

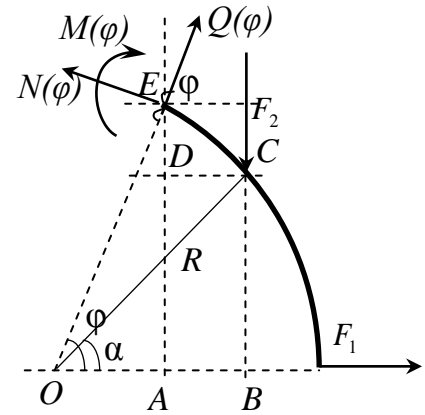


Рис. 3.14

I) $0 \leq \varphi < \alpha$: $-N_I(\varphi) + F_1 \sin \varphi = 0$, $Q_I(\varphi) + F_1 \cos \varphi = 0$,
 $-M_I(\varphi) + F_1 \cdot EA = 0$, $EA = OE \sin \varphi = R \sin \varphi$;

Маємо $N_I(\varphi) = F_1 \sin \varphi$, $Q_I(\varphi) = -F_1 \cos \varphi$, $M_I(\varphi) = F_1 R \sin \varphi$.

II) $\alpha < \varphi < \pi$: $-N_{II}(\varphi) + F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi = 0$, $Q_{II}(\varphi) + F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi = 0$,
 $-M_{II}(\varphi) + F_1 \cdot EA - F_2 \cdot DC = 0$, $DC = OB - OA = R \cos \alpha - R \cos \varphi$;

Маємо: $N_{II}(\varphi) = F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi$, $Q_{II}(\varphi) = -F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi$,

$M_{II}(\varphi) = F_1 R \sin \varphi - F_2 R (\cos \alpha - \cos \varphi)$.

Обчислюємо значення внутрішніх зусиль з кроком $\pi/6$, включаючи кут α , та заповнюємо таблицю:

φ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$N(\varphi)$	$Q(\varphi)$	$M(\varphi)$
$0 \leq \varphi < \alpha$			$16 \sin \varphi$	$-16 \cos \varphi$	$48 \sin \varphi$
0	1	0	0	-16	0
30°	0,866	0,5	8	-13,9	24
45°	0,707	0,707	11,3	-11,3	33,9
$\alpha < \varphi < \pi$			$16 \sin \varphi +$ $+10 \cos \varphi$	$-16 \cos \varphi +$ $+10 \sin \varphi$	$48 \sin \varphi -$ $-30(\cos 45^\circ - \cos \varphi)$
45°	0,707	0,707	18,4	-4,2	33,9
60°	0,5	0,866	18,9	0,7	35,4
90°	0	1	16	10	26,8
120°	-0,5	0,866	8,9	16,7	5,4
150°	-0,866	0,5	-0,7	18,9	-23,2
180°	-1	0	-10	16	-51,2

По знайдених значеннях будуюмо епюри:

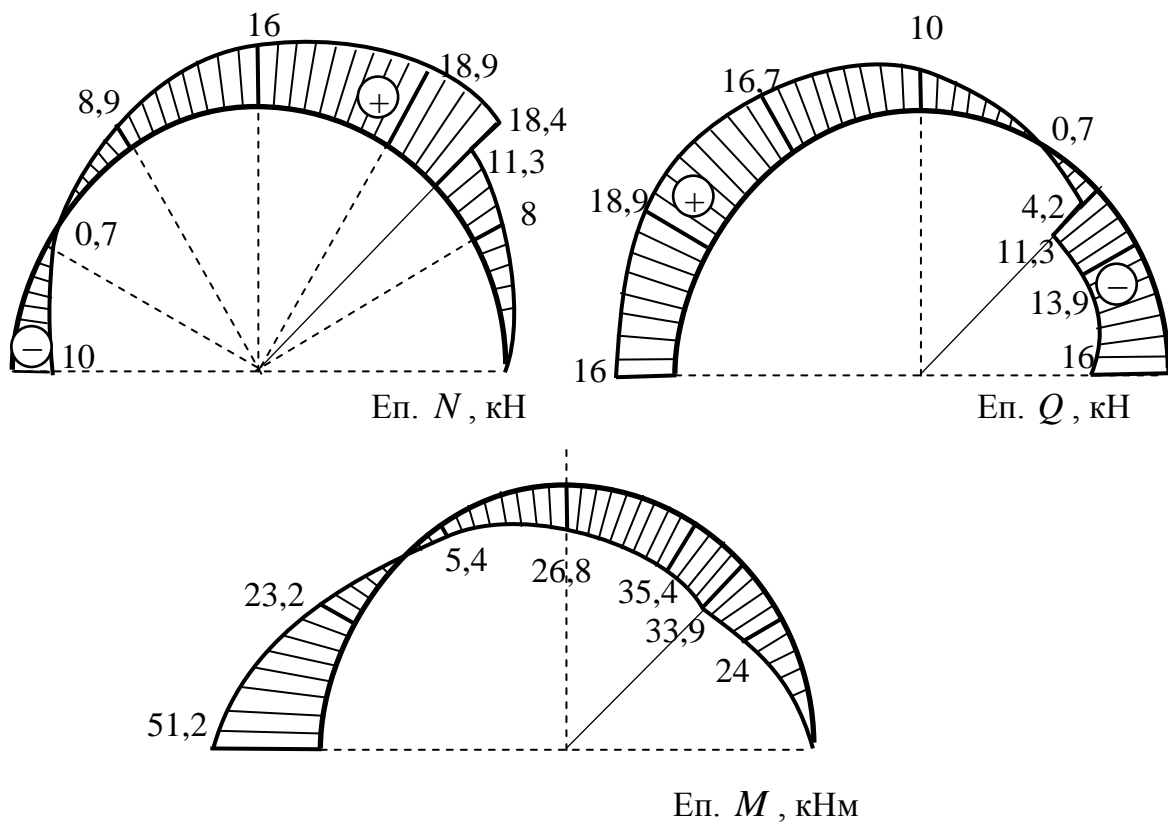


Рис. 3.15

Задача 3.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в горизонтальній рамі під дією вертикального навантаження.

Для заданої плоскої рами під дією вертикального навантаження (дод. 15, 16) побудувати епюри поперечної сили Q , згинального моменту M та крутильного моменту $M_{кр}$.

П р и к л а д. Для плоскої шарнірно закріпленої рами під дією вертикального навантаження (рис. 3.16) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки навантаження прикладене перпендикулярно до площини рами, то горизонтальні реакції в шарнірних закріпленнях нульові. Для знаходження вертикальних реакцій R_A, R_B, R_C запишемо рівняння рівноваги в вигляді суми моментів всіх сил відносно осей, що співпадають з стержнями системи. Для цього вводимо нумерацію точок рами (рис. 3.17).

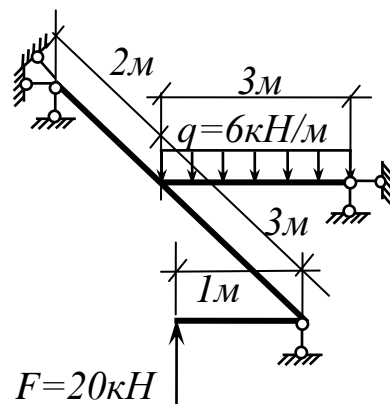


Рис. 3.16

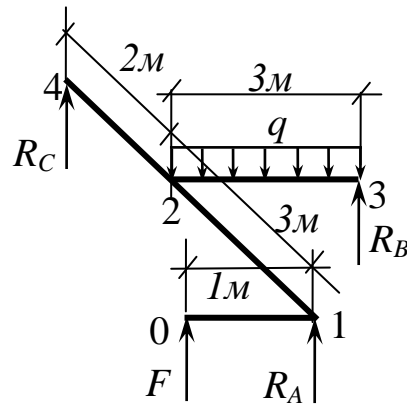


Рис. 3.17

Знаходження реакцій в'язей:

$$\sum M_{1-4} = 0: -F \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 0 \rightarrow R_B = \frac{20 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 15,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_{0-1} = 0: q \cdot 3 \cdot 3 - R_B \cdot 3 - R_C \cdot 5 = 0 \rightarrow R_C = \frac{6 \cdot 3 \cdot 3 - 15,67 \cdot 3}{5} = 1,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_{2-3} = 0: F \cdot 3 + R_A \cdot 3 - R_C \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = \frac{-20 \cdot 3 + 1,4 \cdot 2}{3} = -19,07 \text{ кН}.$$

Перевіряємо рівновагу системи:

$$\sum F_z = 0: R_A + R_B + R_C + F - q \cdot 3 = -19,07 + 15,67 + 1,4 + 20 - 6 \cdot 3 = 0.$$

Для кожного з стержнів системи знаходимо внутрішні зусилля:

Стержень 0-1: $Q_{0-1} = F = 20 \text{ кН}$, $M_0 = 0$, $M_1 = F \cdot 1 = 20 \text{ кНм}$, $M_{кр0-1} = 0$.

Стержень 1-2: $Q_{1-2} = F + R_A = 20 - 19,07 = 0,93 \text{ кН}$,

$M_1 = 0$, $M_2 = (F + R_A) \cdot 3 = 2,8 \text{ кНм}$, $M_{кр1-2} = -F \cdot 1 = -20 \text{ кНм}$.

Стержень 3-2: $Q_3 = -R_B = -15,67 \text{ кН}$, $Q_3 = q \cdot 3 - R_B = 6 \cdot 3 - 15,67 = 2,33 \text{ кН}$,

$a_{ext} = 15,67 / 6 = 2,6 \text{ м}$,

$M_3 = 0$, $M_2 = R_B \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 15,67 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 20 \text{ кНм}$,

$M_{ext} = 15,67 \cdot 2,6 - 6 \cdot 2,6^2 / 2 = 20,46 \text{ кНм}$, $M_{кр3-2} = 0$.

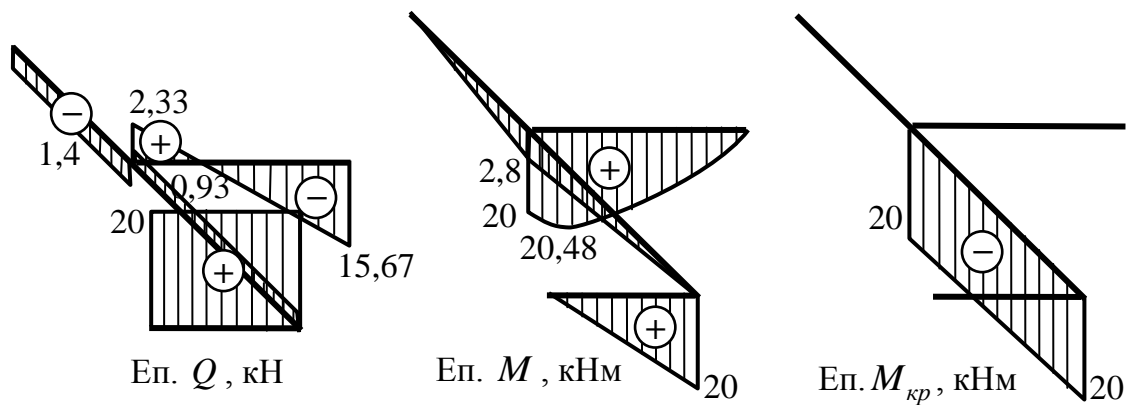


Рис. 3.18

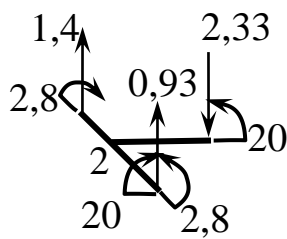


Рис. 3.19

Стержень 4-2: $Q_{4-2} = R_C = 1,4 \text{ кН}$,

$$M_4 = 0, \quad M_2 = R_C \cdot 2 = 1,4 \cdot 2 = 2,8 \text{ кНм},$$

$$M_{кр4-2} = 0.$$

Отримані значення наносимо на епюри (рис. 3.18). По епюрах перевіряємо рівновагу вузла 2 (рис. 3.19).

4. Пряме плоске згинання балки

Теоретичні відомості. Побудова епюр поперечної сили Q та згинального моменту M для статично визначеної балки проводиться за методикою, описаною в п.3.

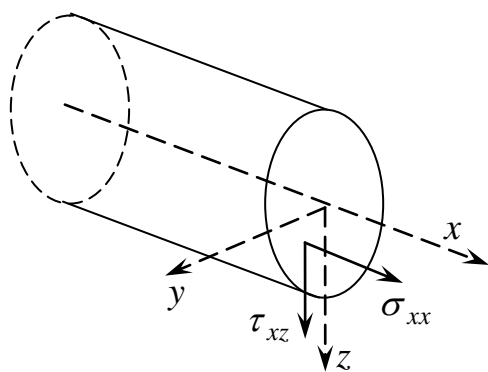


Рис. 4.1

При плоскому згинанні в точках поперечних перерізів балок виникають нормальні напруження $\sigma_{xx}(x, z)$ та дотичні напруження $\tau_{xz}(x, z)$ (Рис. 4.1).

Нормальні напруження σ за законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.1)$$

виражаються через поздовжню де-

формацію

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (4.2)$$

Для знаходження нормальних напружень через внутрішні зусил-

ля користуємося формулою

$$\sigma = \frac{Mz}{I}. \quad (4.3)$$

Тут $I = \iint z^2 dA$ – осьовий момент інерції перерізу відносно вісі y (п.1).

Для визначення дотичних напружень в точках перерізу користуємося формулою Журавського

$$\tau = \frac{QS_y(z)}{Ib(z)}, \quad (4.4)$$

де $S_y(z)$ – статичний момент “відрізаної” частини перерізу, $b(z)$ – ширина перерізу на відстані z від вісі y (Рис. 4.2).

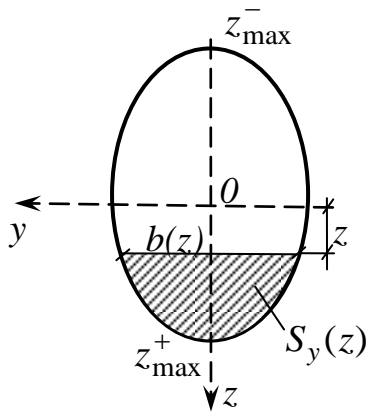


Рис. 4.2

В загальному випадку перевірка міцності балки в різних точках перерізу

проводиться по різному:

– В крайніх точках перерізу ($z = z_{\max}^{\pm}$, рис. 4.2) нормальні напруження набувають максимальних значень $\sigma = \sigma_{\max}^{\pm}$, дотичні напруження $\tau = 0$. Для оцінки міцності користуємося умовою міцності по нормальних напруженнях

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}. \quad (4.5)$$

Максимальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y}, \quad (4.6)$$

де M_{\max} – максимальний згинальний момент (береться по модулю з епюри), $W_y = I_y / z_{\max}$ – момент опору перерізу (для прокатних балок дано в таблицях сортаменту, для інших перерізів рахуємо за формулами п.1).

– На нейтральній лінії $z = 0$ нормальні напруження $\sigma = 0$, дотичні напруження набувають максимальних значень $\tau = \tau_{\max}$. Оцінка міцності проводиться по дотичних напруженнях

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} \quad (4.7)$$

Допустиме дотичне напруження пов'язане з допустимим норма-

льним напруженням приблизною рівністю $\tau_{adm} \approx \sigma_{adm} / \sqrt{3}$. Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{Ib(0)}. \quad (4.8)$$

– В інших точках перерізу $\sigma \neq 0$, $\tau \neq 0$ перевірка міцності проводиться по приведених напруженнях

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}. \quad (4.9)$$

Приведене напруження по різних теоріях міцності має різне значення. Для третьої теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (4.10)$$

для четвертої (енергетичної) теорії

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (4.11)$$

При практичних розрахунках підбір перерізу проводиться за умовою міцності по нормальних напруженнях (4.5), (4.6), а умови (4.7), (4.9) перевіряються.

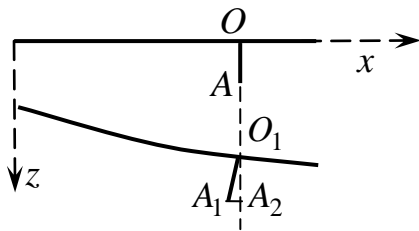


Рис. 4.3

Розглянемо деформований стан балки. Нехай відрізок OA поперечного перерізу при деформуванні прийняв положення O_1A_1 (рис. 4.3). На рисунку $OO_1 = w$ – прогин балки, $\angle A_1O_1A_2 = \frac{dw}{dx} = \varphi$ – кут повороту перерізу балки.

Згинальний момент M та прогин w пов'язані диференціальним співвідношенням

$$M = -EI \frac{d^2w}{dz^2}, \quad (4.12)$$

яке називається *рівнянням зігнутої осі балки*.

Для знаходження переміщень через відомі внутрішні зусилля будемо застосовувати *метод початкових параметрів* (МПП).

Прогин балки $w(x)$ та кути повороту поперечних перерізів $\varphi(x) = \frac{dw}{dx}$ при постійній жорсткості балки EI визначаються за формулами

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - M_0x - Q_0\frac{x^2}{2} + \sum M(x - x_m) + \sum P\frac{(x - x_p)^2}{2} + \sum q\left[\frac{(x - x_{qn})^3}{6} - \frac{(x - x_{qk})^3}{6}\right]; \quad (4.13)$$

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} + \sum M\frac{(x - x_m)^2}{2} + \sum P\frac{(x - x_p)^3}{6} + \sum q\left[\frac{(x - x_{qn})^4}{24} - \frac{(x - x_{qk})^4}{24}\right]. \quad (4.14)$$

Рівняння методу початкових параметрів (4.13), (4.14) впливають з рівнянь (3.1) та (4.12) шляхом послідовного інтегрування з врахуванням початкових умов. Додатні напрями M , P , q показані на рис. 4.4. Початок відліку координат x знаходиться на лівому кінці балки.

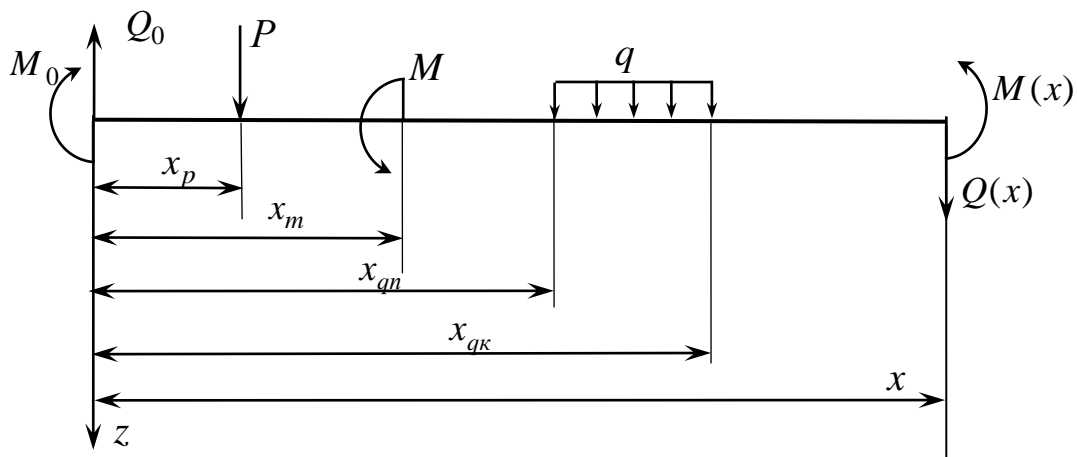


Рис. 4.4

Правило знаків для рівнянь (4.13), (4.14) можна також сформулювати в наступному вигляді: якщо силовий фактор утворює додатній момент (стискує верхні волокна), то цей фактор входить в рівняння МПП з знаком “-”, і навпаки.

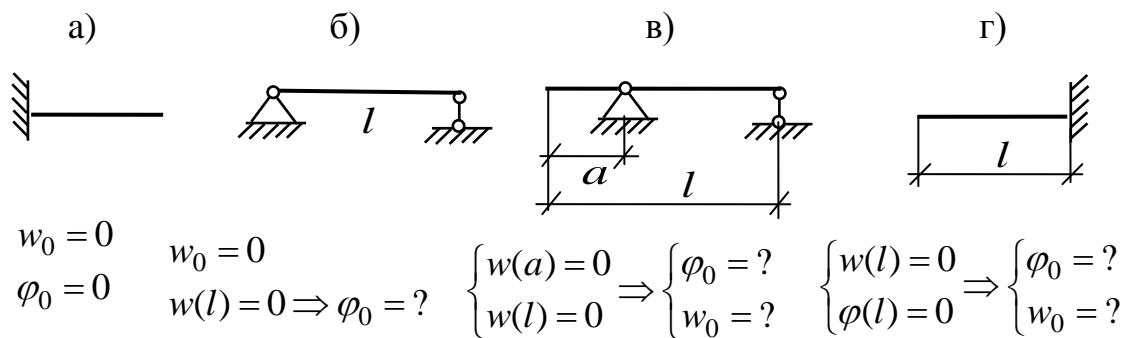


Рис. 4.5

Величини w_0, φ_0, Q_0, M_0 , які є значеннями відповідних функцій при $x=0$, називаються *початковими параметрами*. Значення Q_0 та M_0 беруться з епюр $Q(x)$ та $M(x)$, значення w_0 та φ_0 визначаються з умов закріплення балки. Можливі випадки показані на рис. 4.5. Невідомі початкові параметри для закріплень б), в), г) визначаються з відповідних граничних умов за допомогою рівнянь (4.13), (4.14), записаних в точках закріплення.

При застосуванні рівнянь (4.13), (4.14) враховуються лише ті силові фактори, що лежать зліва від точки x (якщо x менше за координату прикладання силового фактору, то цей доданок не враховується).

Задача 4.1. Розрахунок статично визначеної балки.

Для заданої в дод.18 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати круглий, прямокутний ($h = 2b$) і двотавровий поперечні перерізи. Провести повну перевірку міцності для підібраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки. Перевірити жорсткість балки.

П р и к л а д. Для заданої на рис.4.6 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати круглий, прямокутний ($h = 2b$) і двотавровий поперечні перерізи. Провести повну перевірку міцності для підібраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки. Дано: $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$,

$$\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Р о з в ' я з о к.

1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 4 - M + V_B \cdot 7 = 0,$$

$$V_B = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 25}{7} = 17,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + F \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 6 - V_A \cdot 7 = 0,$$

$$V_A = \frac{-25 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 6}{7} = 33,7 \text{ кН}.$$

Перевірка: $\sum F_z = q \cdot 6 + F - V_A - V_B = 6 \cdot 6 + 15 - 17,3 - 33,7 = 0$.

Малюємо під балкою її схему. Будуємо епюри Q та M . Для цього розбиваємо балку на три ділянки, визначаємо $Q(x)$ та $M(x)$ в характерних точках і будуємо епюри зліва направо.

$$Q(0) = 0 \text{ кН};$$

$$Q^l(2) = -q \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кН}; \quad Q^{np}(2) = Q^l(2) + V_A = -12 + 33,7 = 21,7 \text{ кН};$$

$$Q^l(6) = -q \cdot 6 + V_A = -6 \cdot 6 + 33,7 = -2,3 \text{ кН}; \quad Q^{np}(6) = Q^l(6) - F = -2,3 - 15 = -17,3 \text{ кН};$$

$$Q(8) = -17,3 \text{ кН}.$$

$$M(0) = 0; \quad M(1) = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -6 \cdot 0,5 = -3 \text{ кНм};$$

$$M(2) = -q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм};$$

$$M(6) = -q \cdot 6 \cdot 3 + V_A \cdot 4 = -6 \cdot 18 + 33,7 \cdot 4 = 26,8 \text{ кНм};$$

$$M(8) = -q \cdot 6 \cdot 6 + V_A \cdot 7 - F \cdot 3 = -6 \cdot 36 + 33,7 \cdot 7 - 15 \cdot 3 = -25,1 \approx -25 \text{ кНм}.$$

В перерізі, де $Q = 0$, згинальний момент приймає екстремальне значення M_{ext} . Для визначення координати точки екстремуму розглянемо прямокутний трикутник з катетами $Q^{np}(2) = 21,7 \text{ кН}$ та a_{ext} . Тангенс кута нахилу гіпотенузи дорівнює розподіленому навантаженню q . Маємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q^{np}(2)}{a_{ext}} = q, \quad a_{ext} = \frac{Q^{np}(2)}{q} = \frac{21,7}{6} = 3,6 \text{ м}, \quad x_{ext} = 2 + 3,6 = 5,6 \text{ м}.$$

$$\text{Отже, } M_{ext} = M(5,6) = -6 \cdot \frac{5,6^2}{2} + 33,7 \cdot 3,6 = -94,1 + 121,3 = 27,2 \text{ кНм}.$$

Максимальні значення перерізуючої сили і згинального моменту знаходимо з епюр:

$$Q_{\max} = 21,7 \text{ кН при } x = 2 \text{ м}, \quad M_{\max} = 27,2 \text{ кНм при } x_{ext} = 5,6 \text{ м}.$$

Підбираємо переріз з умови міцності по нормальних напруженнях:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}. \quad \text{Знаходимо необхідний момент опору:}$$

$$W_{нб} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 170 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 170 \text{ см}^3.$$

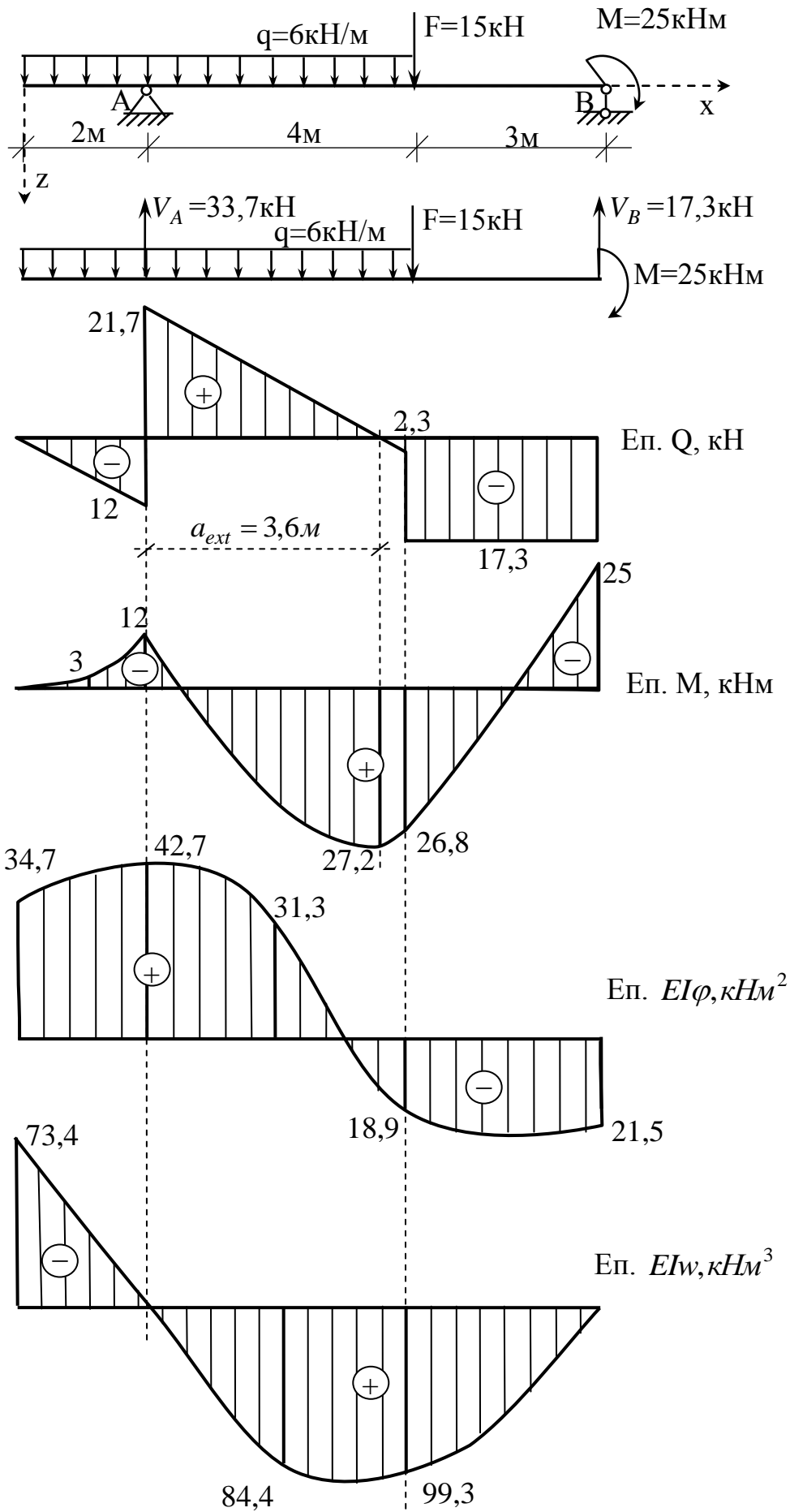


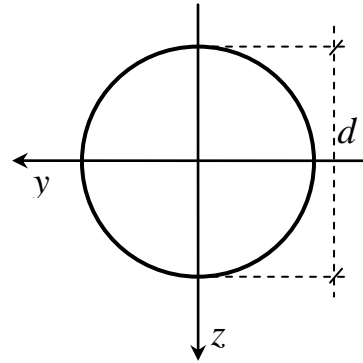
Рис. 4.6

а) підбір круглого перерізу

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = W_{нб};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_{нб}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 170}{3,14}} = 12 \text{ см};$$

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ см}^2.$$

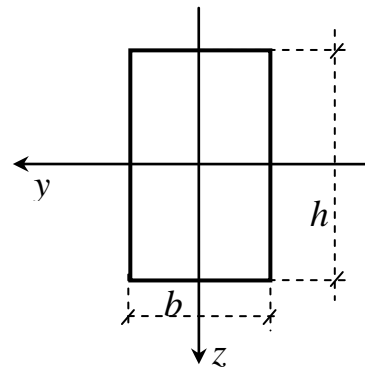


б) підбір прямокутного перерізу $h = 2b$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = W_{нб};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_{нб}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 170}{2}} = 6,3 \text{ см};$$

$$A_{пр} = bh = 2b^2 = 2 \cdot 6,3^2 = 79,4 \text{ см}^2.$$

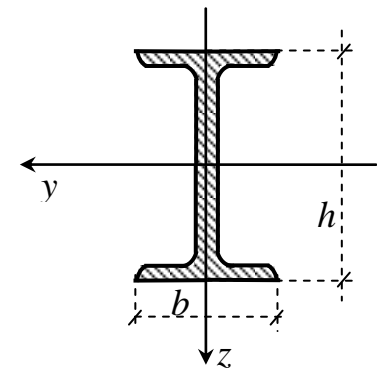


в) Підбір двотаврового перерізу. З таблиць сортаменту беремо двотавр № 20, для якого

$$W_y = 184 \text{ см}^3, \quad I_y = 1840 \text{ см}^4, \quad A = 26,8 \text{ см}^2,$$

$$h = 20 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см}, \quad d = 0,52 \text{ см},$$

$$t = 0,84 \text{ см}, \quad S_y = S_{\max} = 104 \text{ см}^3.$$



Порівняємо площі підібраних перерізів:

$$A_{кр} : A_{пр} : A_{дв} = 113 : 79,4 : 26,8 = 4,2 : 3 : 1.$$

Отже, двотавр є найбільш раціональним з запропонованих перерізів.

2. Виконуємо перевірку міцності підібраної двотаврової балки:

а) максимальне нормальне напруження визначаємо в перерізі $x = 5,6 \text{ м}$, оскільки в цій точці балки $M(5,6) = M_{\max} = 27,2 \text{ кНм}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 148 \cdot 10^6 \text{ Па} = 148 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{160 - 148}{160} \cdot 100\% = 7,5\%, \text{ що допустимо.}$$

б) максимальне дотичне напруження визначаємо в перерізі $x = 2 \text{ м}$, оскільки

ки в цій точці балки $Q(2) = Q_{\max} = 21,7 \text{ кНм}$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \frac{21,7 \cdot 104}{0,52 \cdot 1840} \cdot 10^{3-6+2+8} =$$

$$= 23,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,6 \text{ МПа} \leq \tau_{adm} = 100 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{100 - 23,6}{100} \cdot 100\% = 76,4\%.$$

в) Перевірка міцності в точках, де $\sigma \neq 0$ і $\tau \neq 0$, виконується з використанням умови міцності для приведенного напруження $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$.

В перерізі $x = 6 \text{ м}$ момент $M = 26,8 \text{ кНм}$, перерізуюча сила $Q = 17,3 \text{ кН}$. В точці 2 (для стійки)

$$\sigma = \frac{M \cdot (h/2 - t)}{I_y} = \frac{26,8 \cdot 10^3 \cdot (10 - 0,84) \cdot 10^{-2}}{1840 \cdot 10^{-8}} = 133,4 \text{ МПа},$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{17,3 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 14,5 \text{ МПа},$$

оскільки статичний момент полиці двотавру відносно нейтральної осі

$$S_n = bt \frac{h-t}{2} = 10 \cdot 0,84 \frac{20 - 0,84}{2} = 80,5 \text{ см}^3.$$

Для пластичних матеріалів по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{133,4^2 + 3 \cdot 14,5^2} \approx 136 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

3. Будуємо епюри σ та τ (рис.3).

Епюра нормальних напружень $\sigma = \frac{Mz}{I}$ (пряма лінія) будується по висоті

перерізу $x = 5,6 \text{ м}$, в якому виникають максимальні згинальні моменти. На проєкціях точок $z = \pm h/2$ на вісь епюри відкладаємо значення $\sigma_{\max} = 148 \text{ МПа}$ («плюс» на розтягнутих волокнах).

Для побудови епюри дотичних напружень $\tau = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$ (для стійки двотавра

має форму параболи) в перерізі $x = 2 \text{ м}$, в якому виникають максимальні поперечні сили, знаходимо значення τ в характерних точках перерізу за формулою Журавського

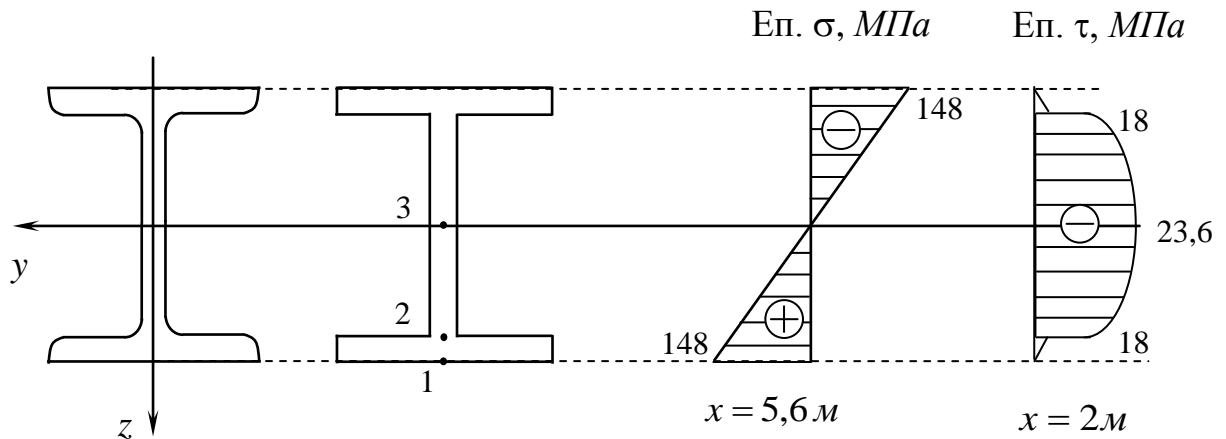
В точці 1 $S_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$.

В точці 2 (для стійки)

$$\tau_2 = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \frac{21,7 \cdot 80,5}{0,52 \cdot 1840} \cdot 10^{3-6+2+8} = 18,2 \text{ МПа} .$$

В точці 3 $\tau_3 = \tau_{\max} = 23,6 \text{ МПа} .$

Знаки на епюрах σ і τ визначаються по епюрах $M(x)$ та $Q(x)$ і формулах для напружень.



4. Обчислюємо переміщення балки методом початкових параметрів. Запишемо формули МПП для прогину і кута повороту перерізу балки:

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0 x - V_A \frac{(x-2)^3}{6} + F \frac{(x-6)^3}{6} + q \frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - V_A \frac{x^2}{2} + F \frac{(x-6)^2}{2} + q \frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

При обчисленні $w(x)$, $\varphi(x)$ в точці x_k в цих формулах враховуємо тільки силові фактори, що лежать лівіше від x_k . Момент M та реакція V_B не входять в рівняння МПП, оскільки вони прикладені в крайній правій точці балки.

Для визначення початкових параметрів w_0, φ_0 записуємо рівняння прогинів в точках закріплення балки (при $x=2\text{ м}$ прогин $w(2)=0$, при $x=9\text{ м}$ прогин $w(9)=0$).

Отримуємо систему рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} EIw(2) = EIw_0 + 2EI\varphi_0 + 6 \frac{2^4}{24} = 0; \\ EIw(9) = EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 33,7 \frac{(9-2)^3}{6} + 15 \frac{(9-6)^3}{6} + 6 \frac{9^4 - (9-6)^4}{24} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIw_0 + 2EI\varphi_0 + 4 = 0; \\ EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 1926,5 + 67,5 + 1620 = EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 239 = 0. \end{cases}$$

Віднімаючи перше рівняння від другого, знаходимо

$$7EI\varphi_0 - 239 - 4 = 0;$$

$$EI\varphi_0 = 243/7 = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EIw_0 = -2EI\varphi_0 - 4 = -2 \cdot 34,7 - 4 = -73,4 \text{ кНм}^3.$$

Таким чином, прогин і кут повороту вираховуємо за формулами

$$EIw(x) = -73,4 + 34,7 \cdot x - 33,7 \frac{(x-2)^3}{6} + 15 \frac{(x-6)^3}{6} + 6 \frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = 34,7 - 33,7 \frac{(x-2)^2}{2} + 15 \frac{(x-6)^2}{2} + 6 \frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

Вибираємо на осі балки декілька точок і обчислюємо $\varphi(x)$, $w(x)$ в кожній точці.

$$EI\varphi(0) = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(2) = 34,7 + 2^3 = 42,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(4) = 34,7 - 33,7 \cdot 2 + 4^3 = 31,3 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(6) = 34,7 - 33,7 \frac{4^2}{2} + 6^3 = -18,9 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(9) = 34,7 - 33,7 \frac{7^2}{2} + 15 \frac{3^2}{2} + 6 \frac{9^3 - 3^3}{6} = 34,7 - 825,7 + 67,5 + 702 = -21,5 \text{ кНм}^2.$$

$$EIw(0) = -73,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(2) = -73,4 + 34,7 \cdot 2 + 6 \frac{2^4}{24} = 0;$$

$$EIw(4) = -73,4 + 34,7 \cdot 4 - 33,7 \frac{2^3}{6} + 6 \frac{4^4}{24} = -73,4 + 138,8 - 45 + 64 = 84,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(6) = -73,4 + 34,7 \cdot 6 - 33,7 \frac{4^3}{6} + 6 \frac{6^4}{24} = -73,4 + 208,2 - 359,5 + 324 = 99,3 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(9) = -73,4 + 34,7 \cdot 9 - 33,7 \frac{7^3}{6} + 15 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{9^4 - 3^4}{24} = -73,4 + 312,3 - 1926,5 + 67,5 + 1620 = -0,1 \approx 0.$$

По отриманих результатах будуюмо епюри $EJw(x)$, $EJ\varphi(x)$. Бачимо, що максимальний прогин виникає в точці $x \approx 3,5 \text{ м}$, де $EJ\varphi(x) \approx 0$:

$$EIw(5) = -73,4 + 34,7 \cdot 5 - 33,7 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{5^4}{24} = -73,4 + 173,5 - 151,7 + 156,2 = 104,6 \text{ кНм}^3;$$

Обчислюємо максимальні значення кута повороту та прогину, поділивши знайдені значення на жорсткість балки (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$):

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3680 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$\varphi_{\max} = \varphi(2) = \frac{42,7 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 0,0116 \text{ рад} = 0,0116 \frac{180^\circ}{3,14} = 0,67^\circ;$$

$$w_{\max} = w(5) = \frac{104,6 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 28,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,84 \text{ см}.$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = -19,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2 \text{ см}$$

Умова жорсткості в прольоті

$$\frac{u_{\max}}{l_n} = \frac{2,84 \cdot 10^{-2}}{7} = 4,06 \cdot 10^{-3} > \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Для консольного кінця

$$\frac{w_{\max}}{2l_k} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2} = 5 \cdot 10^{-3} > \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Оскільки умови жорсткості не виконуються, збільшуємо переріз балки. Беремо двотавр № 22, для якого $I_y = 2550 \text{ см}^4$

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} = 5100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} = -14,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,43 \text{ см}$$

$$\frac{w_{\max}}{2l_k} = \frac{1,43 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2} = 3,6 \cdot 10^{-3} \leq \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, потрібно вибрати двотавр № 22.

Список рекомендованої літератури

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
2. Беляев Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1968. – 349 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.С.Вольмира. – М. : Наука, 1984. – 407с.
4. Писаренко, Г. С. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С.Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ : Вища шк., 2004. – 655с.
5. Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В. Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
6. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: Справочное пособие. Ч.2 / АН Украины, Ин-т проблем прочности. – К. : Наук. думка, 1994. – 539.4с.
7. Методические указания к выполнению расчетно-графических упражнений по курсу «Сопротивление материалов с основами теории и пластичности» / Сост. В. С. Еременко, Ю. А. Морсков. – К.: КИСИ, 1988. – 111с.
8. *Опір матеріалів з основами теорії пружності та пластичності: Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань* / Укл. Єременко В. С., Морсков Ю. А., Корбаков О. Ф., Станкевич А. М. – К.: КІБІ, 1993. – 104 с.
9. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: Навч. посібник у 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища школа. – Ч. 1., кн. 1. Загальні основи курсу. – 1994. – 204 с.; ч. 1., кн. 2. Опір бруса. – 1994. – 335 с. ; ч.1. кн. 3. Опір дво- і тривимірних тіл. – 1995. – 271 с.; ч. 2. кн. 4. Приклади і задачі. – 1995. – 303 с.; ч.2. кн. 5. Розрахунково-проектувальні та лабораторні роботи. – 1995. – 207 с.
10. *Шульга М. О. Опір матеріалів при статичних навантаженнях: Курс лекцій* / М. О. Шульга. – КНУБА, 2002. –140 с.

Додаток 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

20__ - 20__ навчальний рік

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс _____

Група _____

Студент (П.І.Б.) _____

Керівник (П.І.Б.) _____

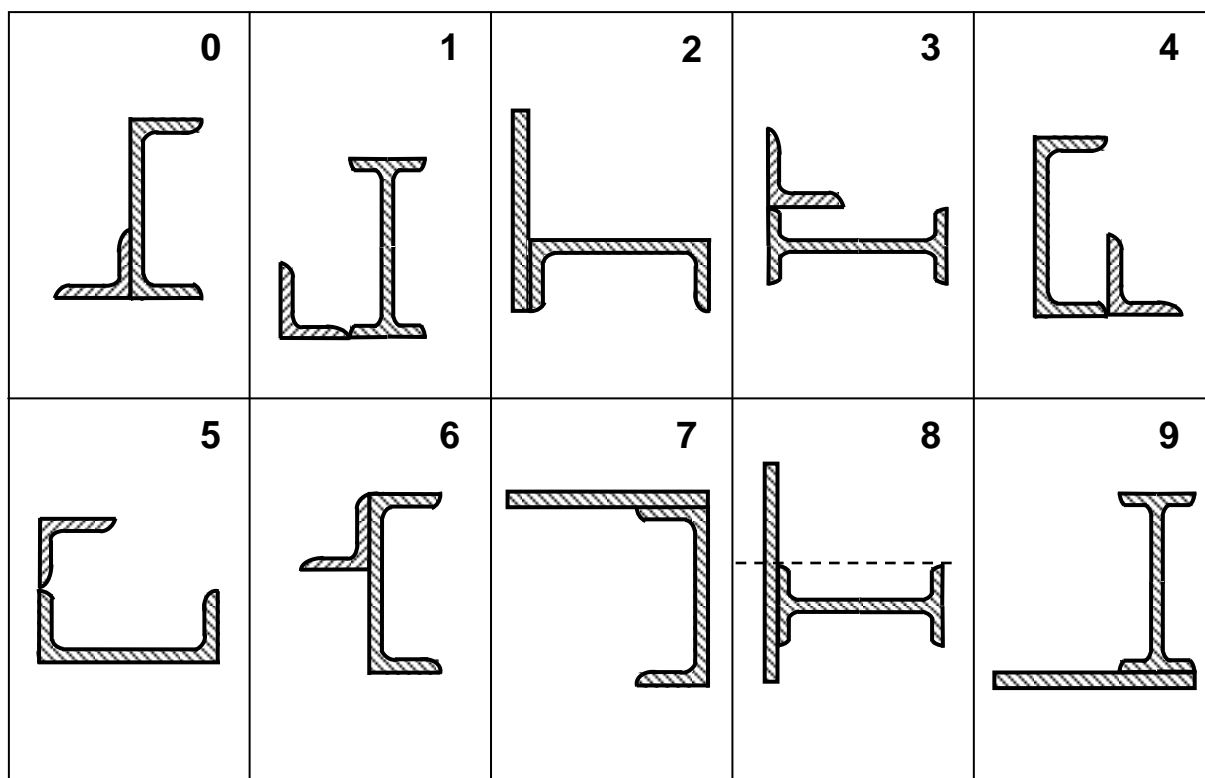
Дата здачі завдання _____

Оцінка _____

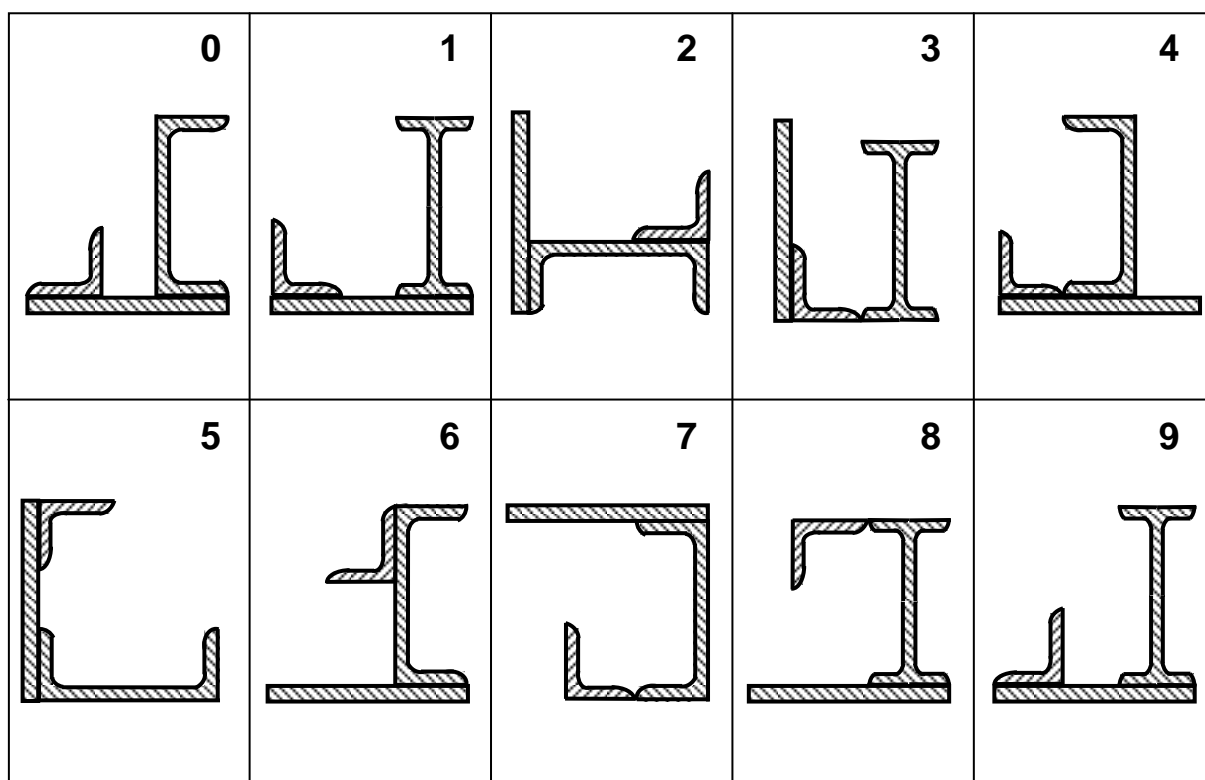
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру для додатків 2,3				
	третя	перша		друга	
	№ схеми	№ двотавра*	№ швелера*	розміри листа, мм	розміри кутка*, мм
0	0	16	20а	220х10	160х16
1	1	18	20	220х12	160х10
2	2	18а	18а	240х14	150х12
3	3	20	18	240х16	150х10
4	4	20а	16а	280х16	140х10
5	5	22	16	280х20	125х14
6	6	22а	24а	300х16	125х10
7	7	24	24	300х20	120х10
8	8	24а	22а	340х18	120х8
9	9	27	22	340х22	110х8

*Сортамент прокатної сталі береться по ГОСТ 8509–72

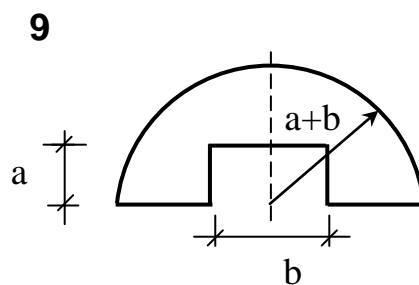
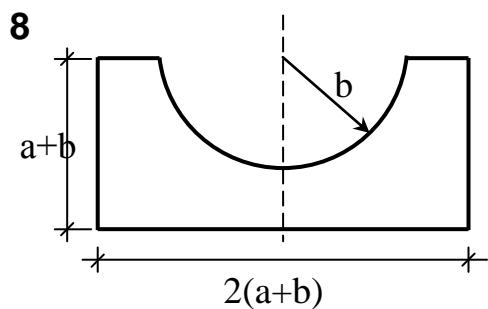
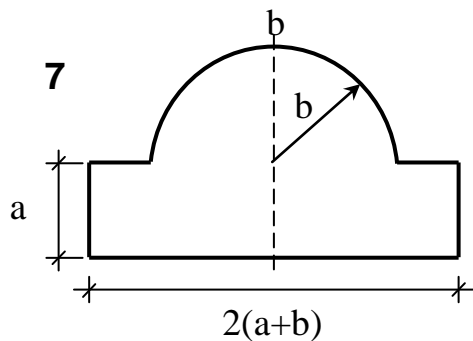
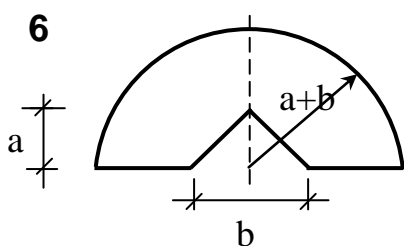
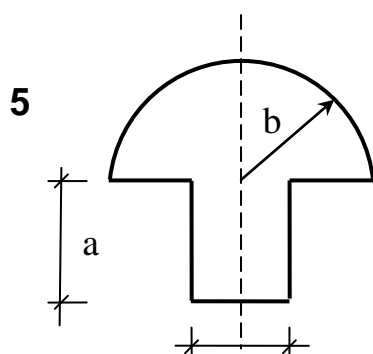
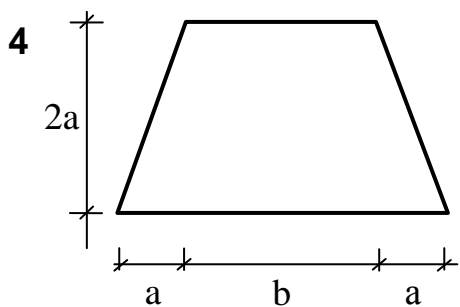
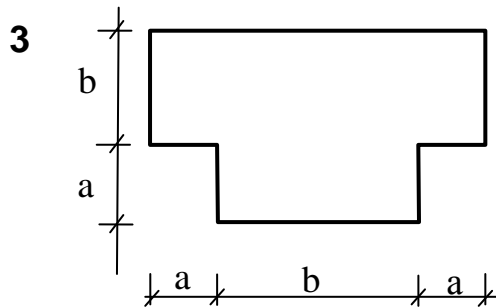
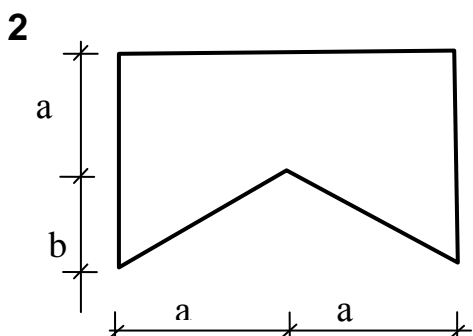
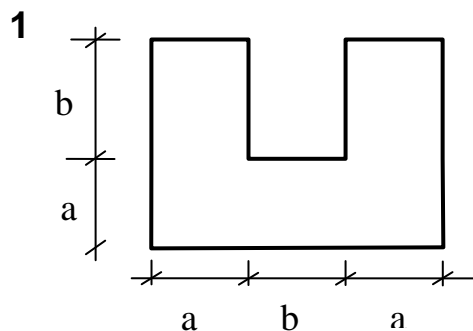
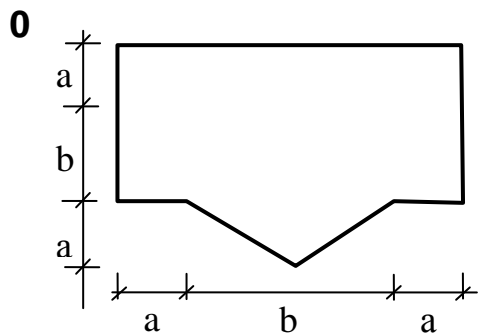
Додаток 2



Додаток 3

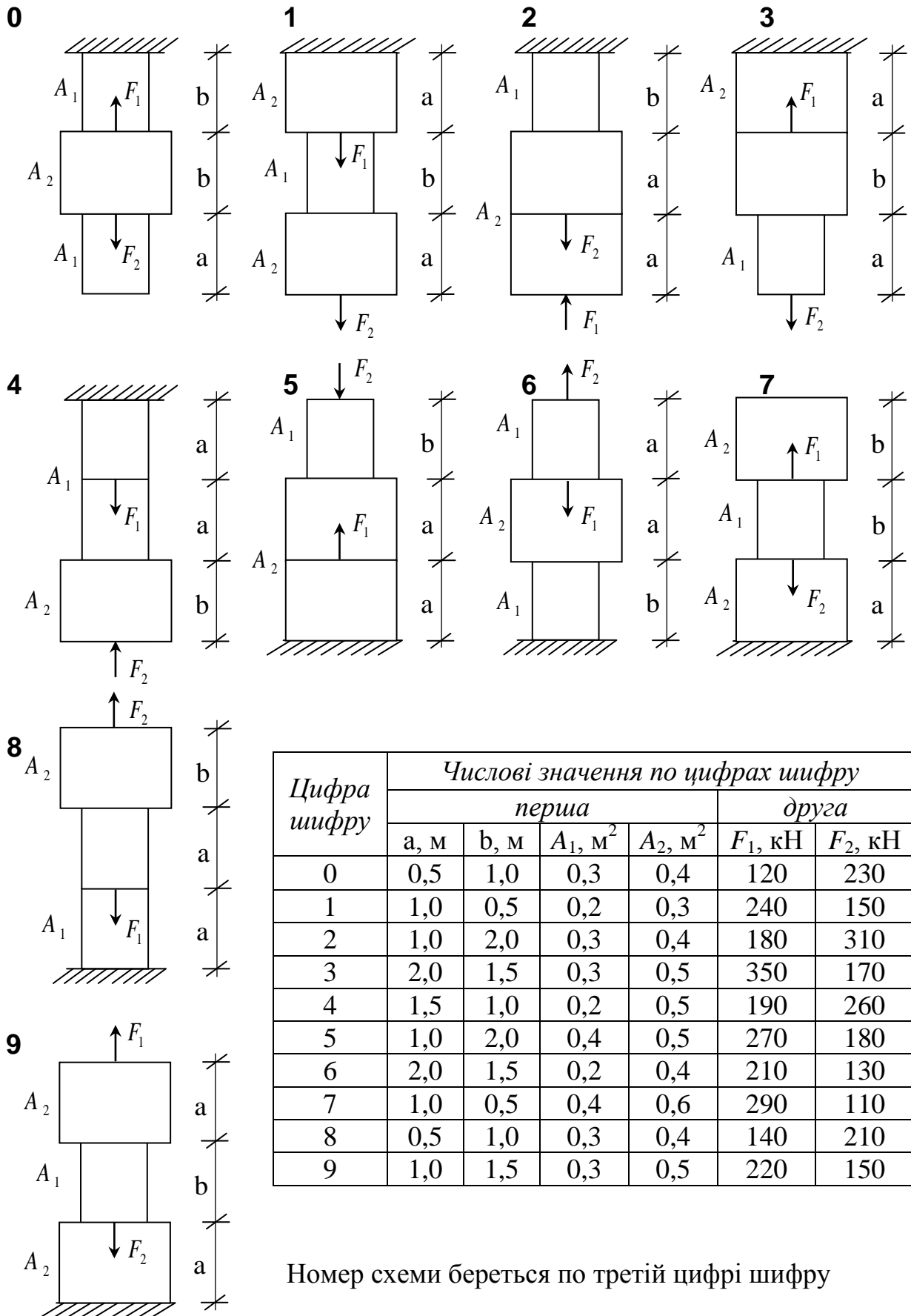


Додаток 4



* розміри a , b задаються в сантиметрах згідно до свого шифру: a дорівнює сумі двох перших цифр шифру, b дорівнює сумі другої і третьої цифр шифру, номер схеми береться по третій цифрі шифру.

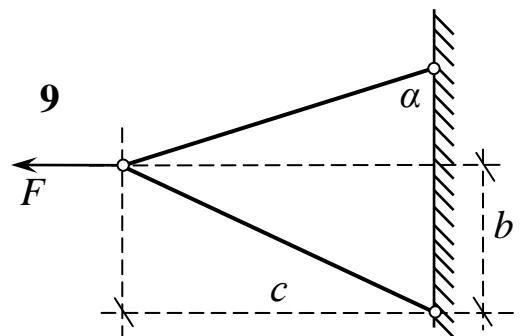
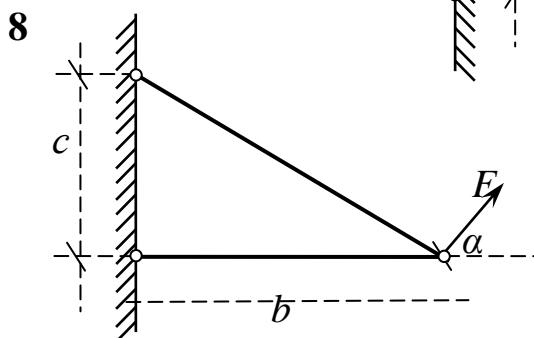
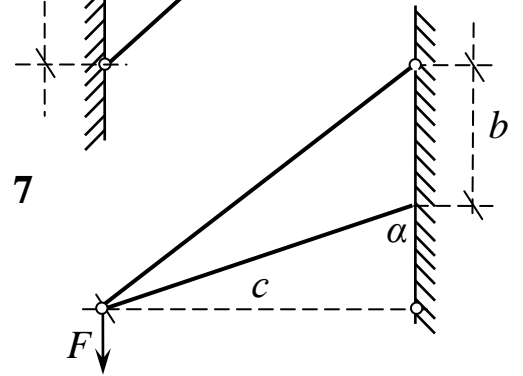
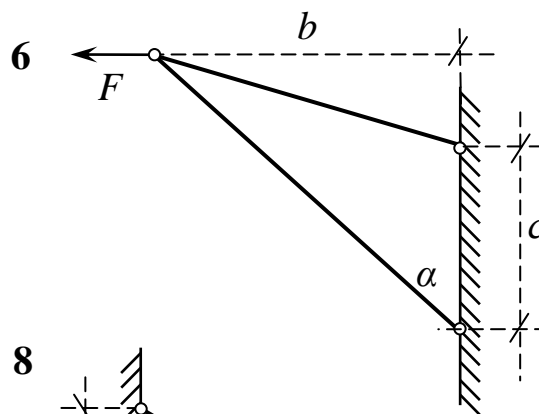
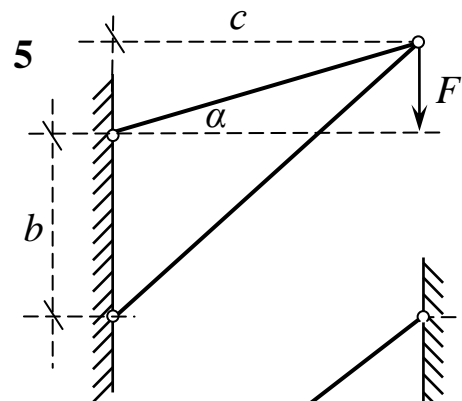
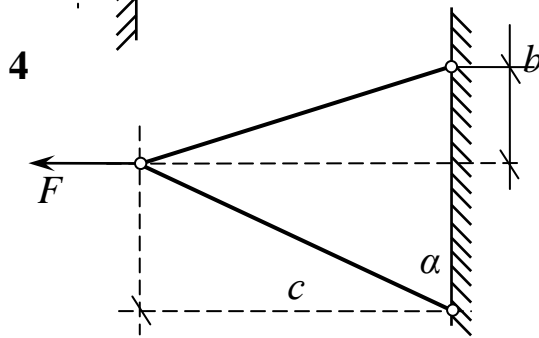
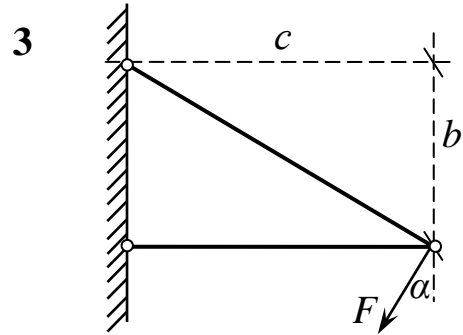
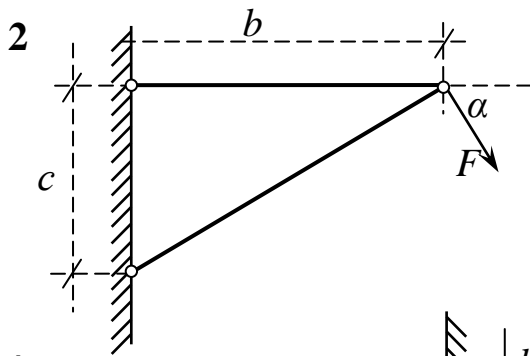
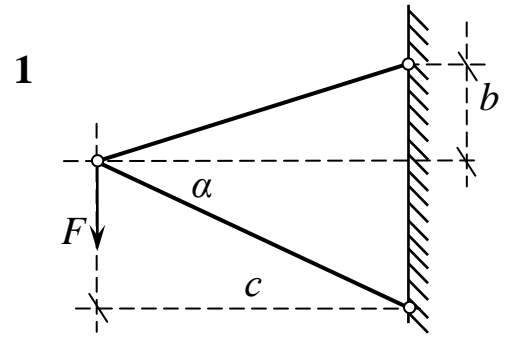
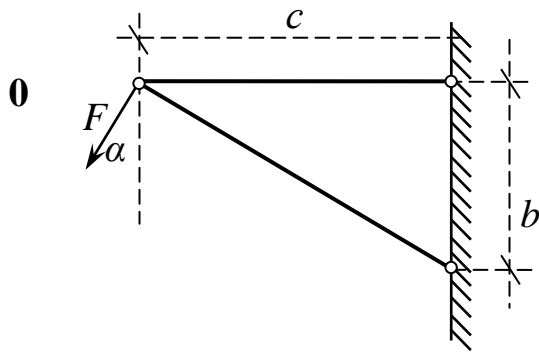
Додаток 5



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	перша				друга	
	a, м	b, м	A ₁ , м ²	A ₂ , м ²	F ₁ , кН	F ₂ , кН
0	0,5	1,0	0,3	0,4	120	230
1	1,0	0,5	0,2	0,3	240	150
2	1,0	2,0	0,3	0,4	180	310
3	2,0	1,5	0,3	0,5	350	170
4	1,5	1,0	0,2	0,5	190	260
5	1,0	2,0	0,4	0,5	270	180
6	2,0	1,5	0,2	0,4	210	130
7	1,0	0,5	0,4	0,6	290	110
8	0,5	1,0	0,3	0,4	140	210
9	1,0	1,5	0,3	0,5	220	150

Номер схеми береться по третій цифрі шифру

Додаток 6

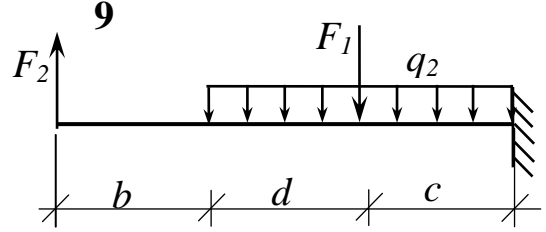
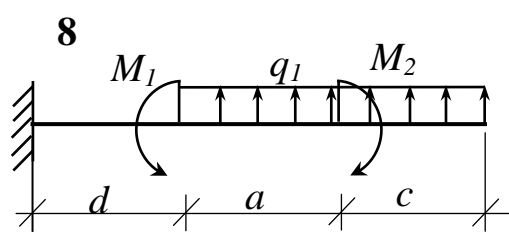
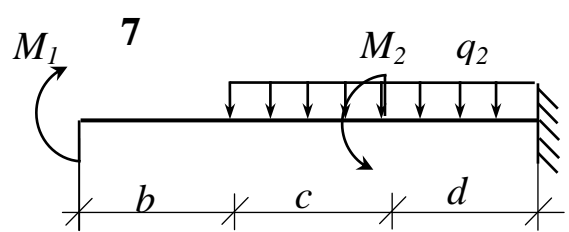
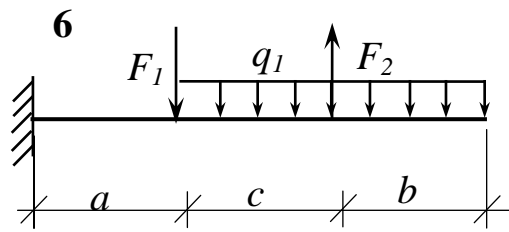
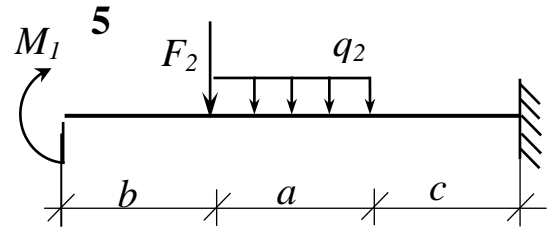
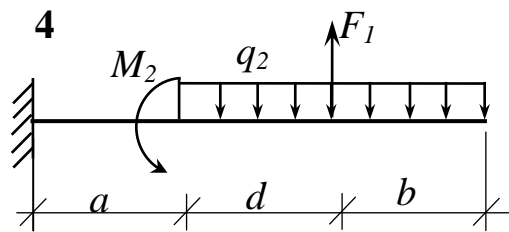
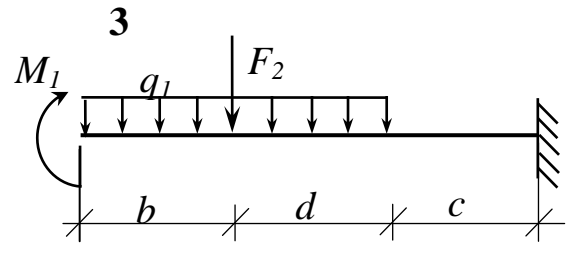
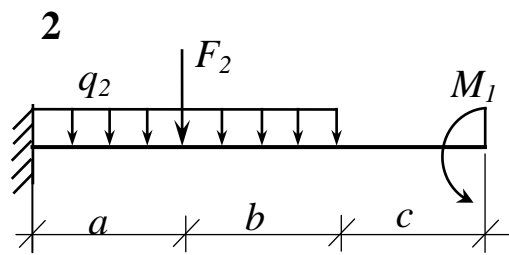
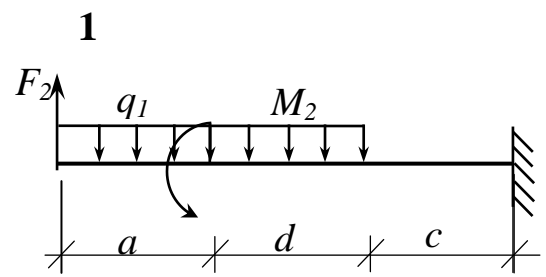
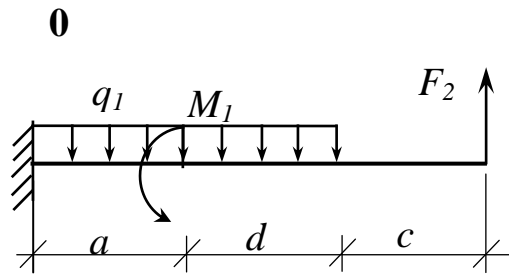


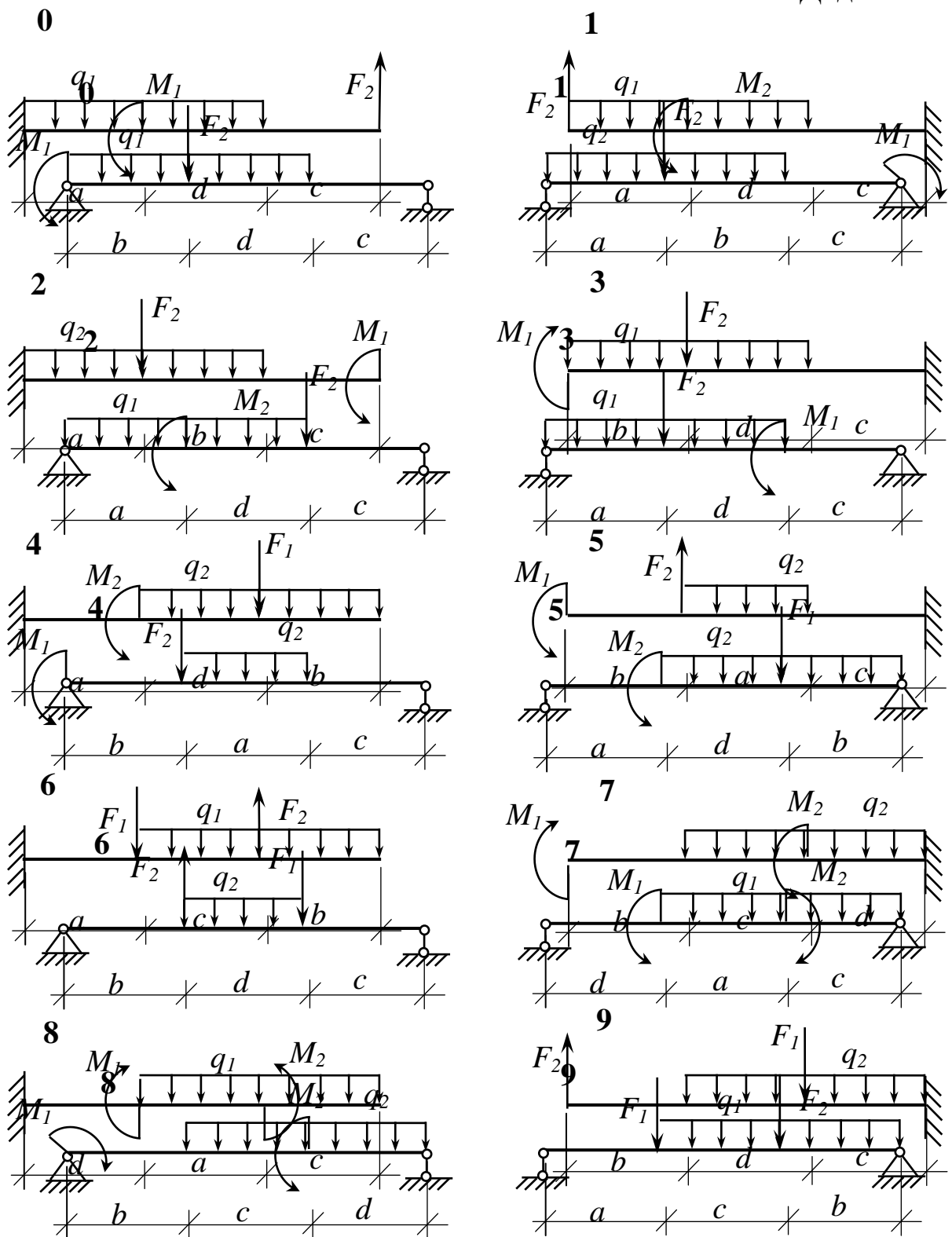
Загальні дані для додатку 6

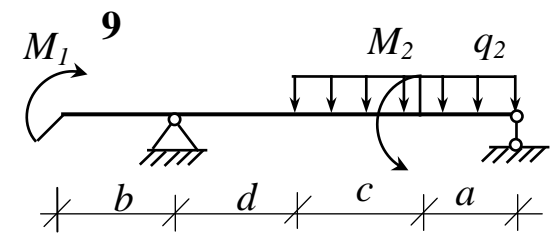
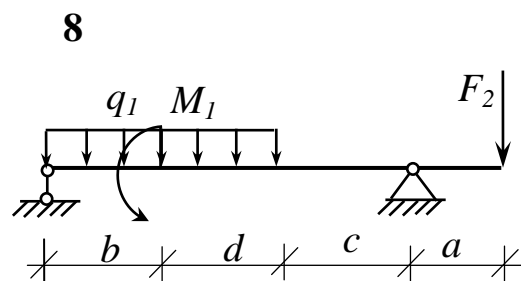
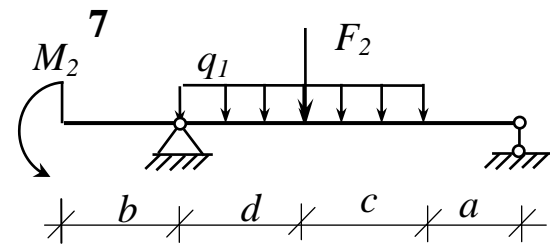
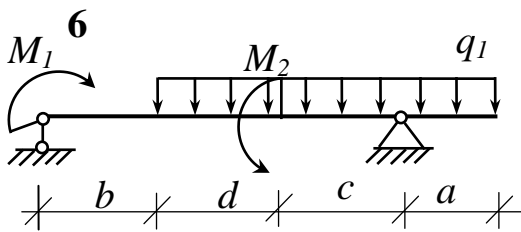
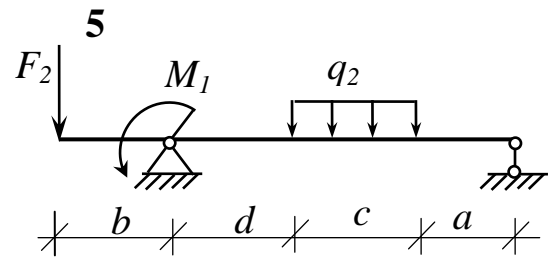
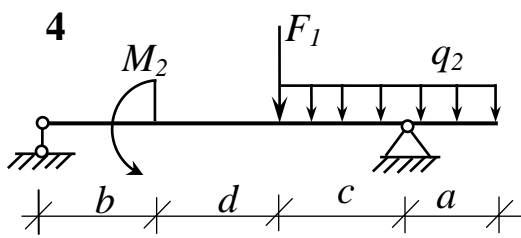
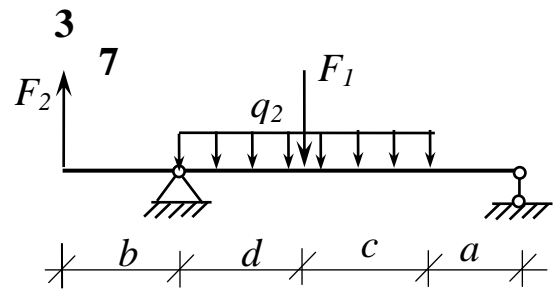
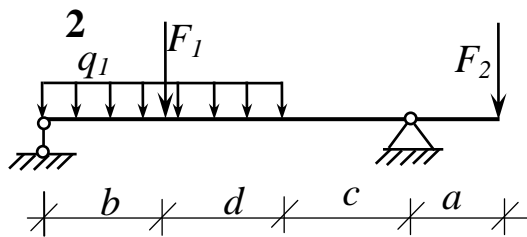
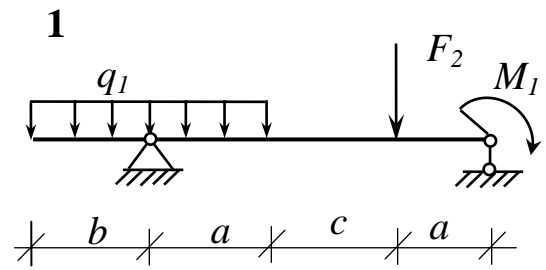
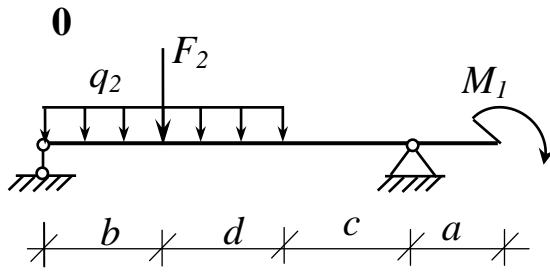
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	перша		друга		третья
	$c, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$	$b, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	№ схеми
0	3	10	4	30	0
1	2	12	5	45	1
2	4	14	2	60	2
3	5	15	3	30	3
4	3	16	4	45	4
5	2	18	5	60	5
6	4	20	2	30	6
7	5	11	3	45	7
8	3	13	4	60	8
9	4	17	5	30	9

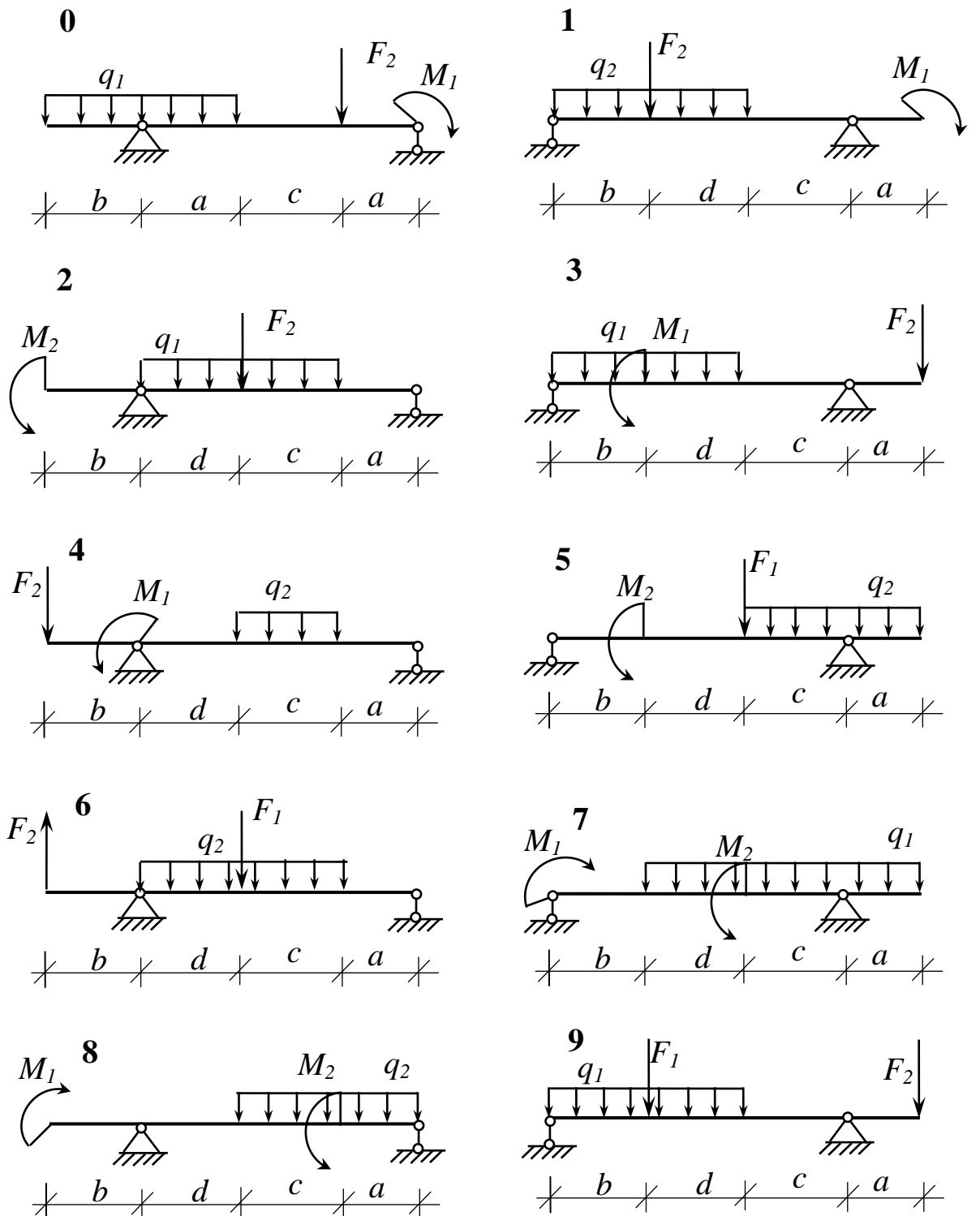
Загальні дані для додатків 7-17

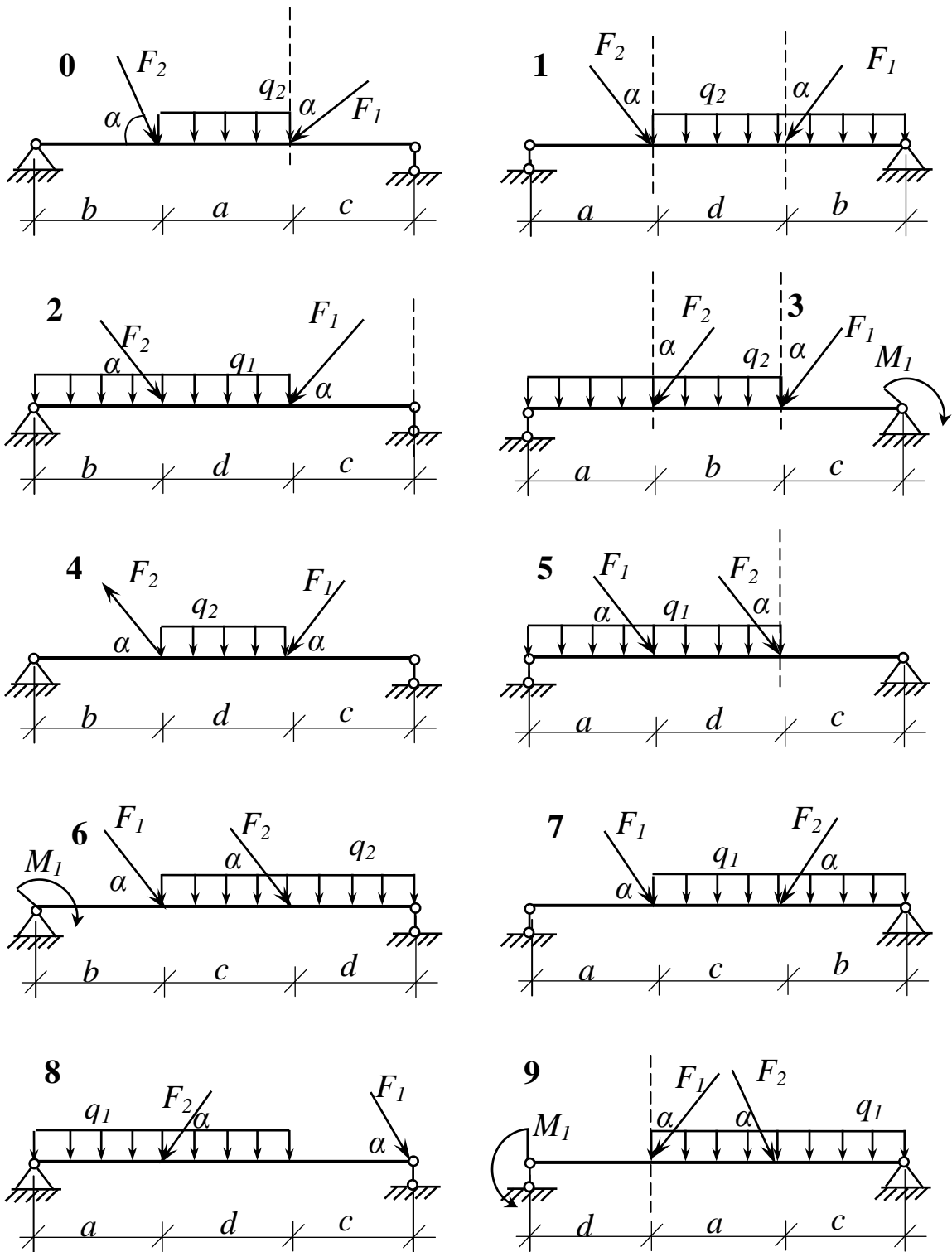
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру										
	перша					друга					третья
	$a, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$F_1, \text{ кН}$	$M_1, \text{ кНм}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$F_2, \text{ кН}$	$M_2, \text{ кНм}$	$q_2, \text{ кН/м}$	№ схеми, кут α
0	4	2	10	15	3	3	2	5	22	4	0, 30°
1	2	3	12	16	4	4	3	6	21	5	1, 45°
2	4	1	14	17	5	1	4	7	20	6	2, 60°
3	3	1	16	18	6	2	1	8	19	7	3, 45°
4	1	4	18	19	7	3	2	9	18	8	4, 30°
5	3	3	20	20	8	4	3	10	17	4	5, 45°
6	4	1	22	21	9	1	4	11	16	4	6, 60°
7	2	4	24	22	10	2	1	12	15	5	7, 30°
8	2	3	15	23	11	3	2	13	14	6	8, 60°
9	1	4	17	24	12	4	3	14	13	7	9, 30°

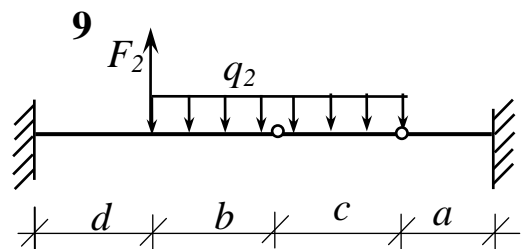
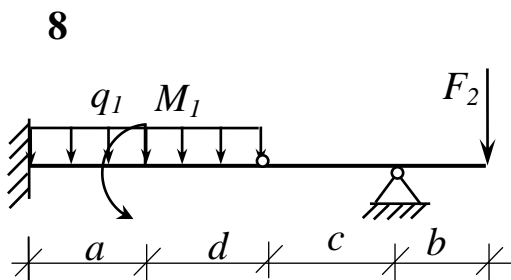
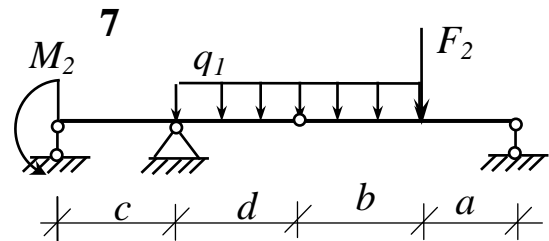
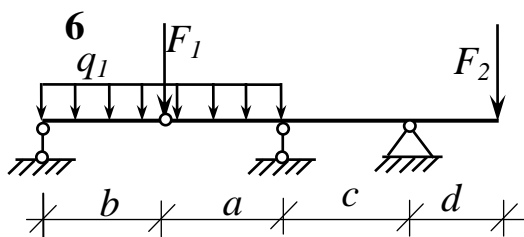
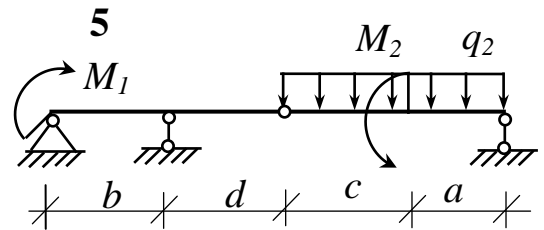
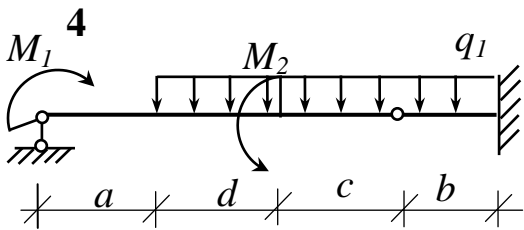
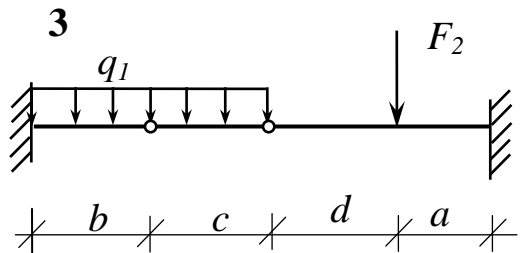
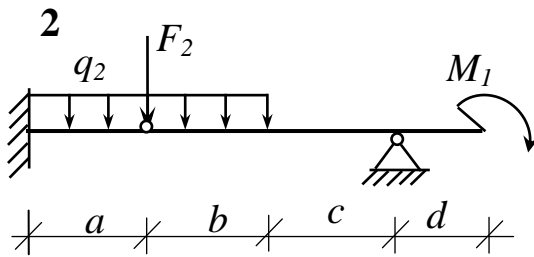
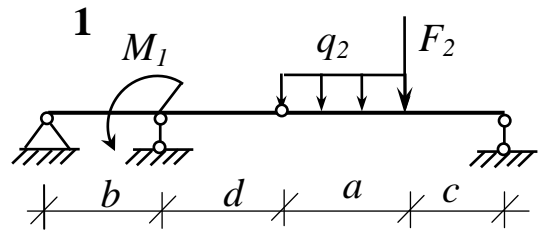
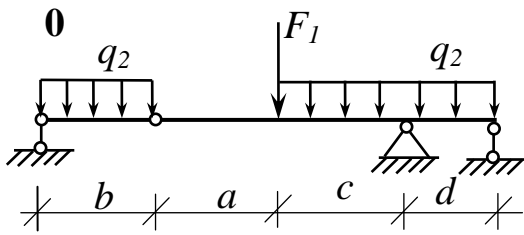


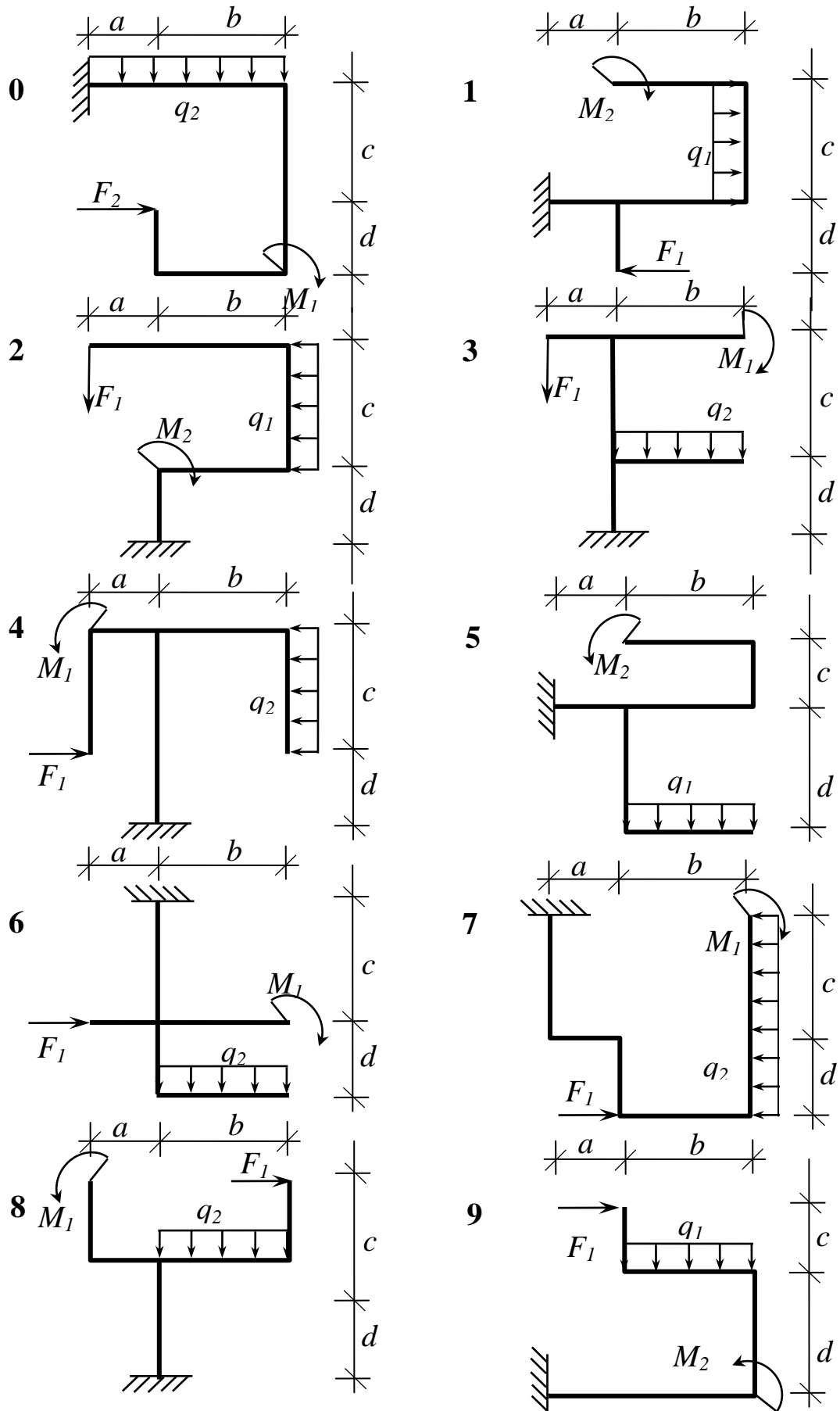


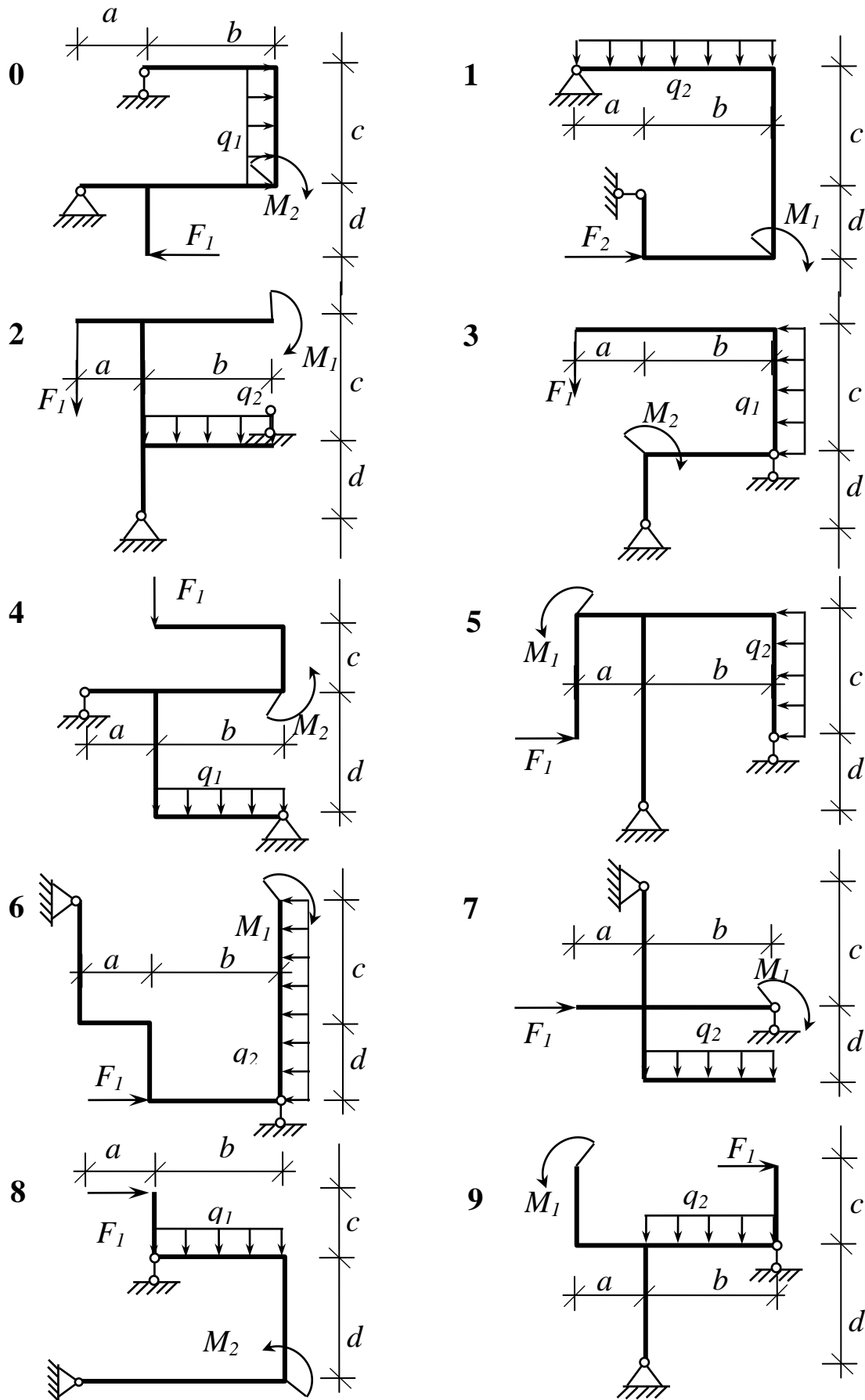


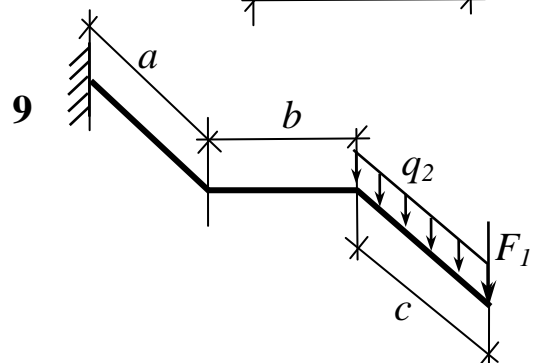
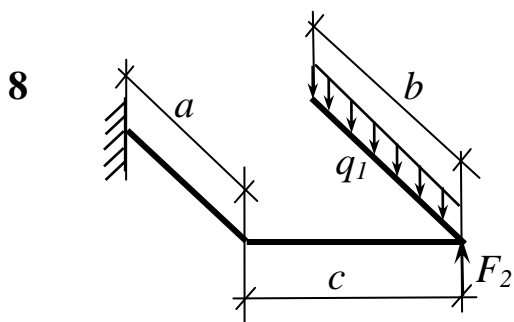
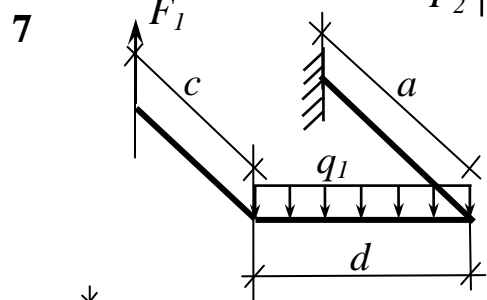
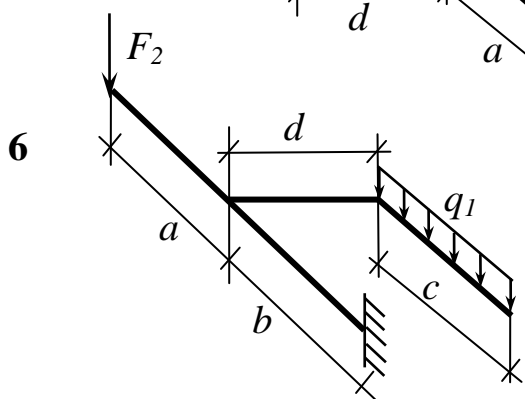
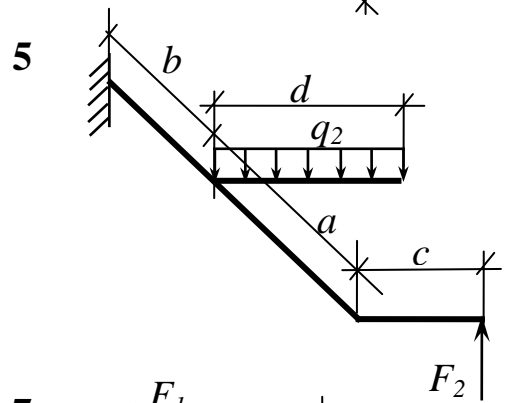
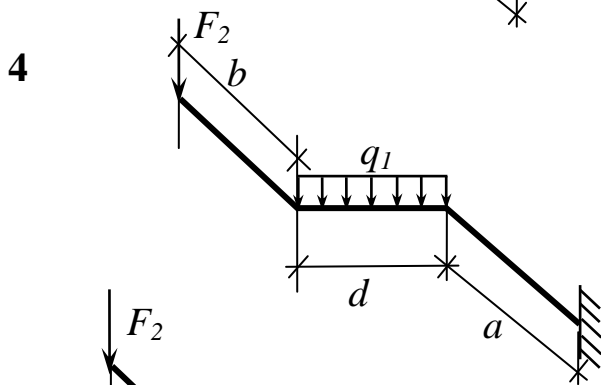
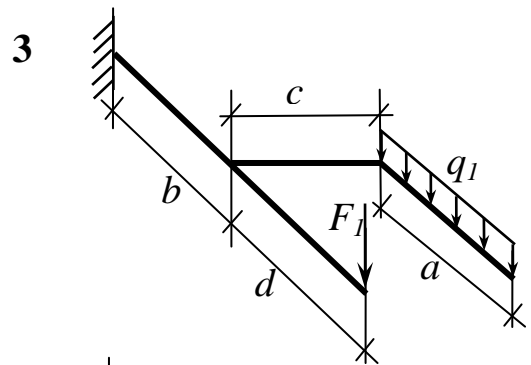
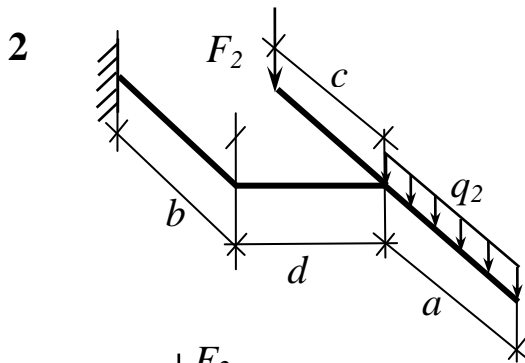
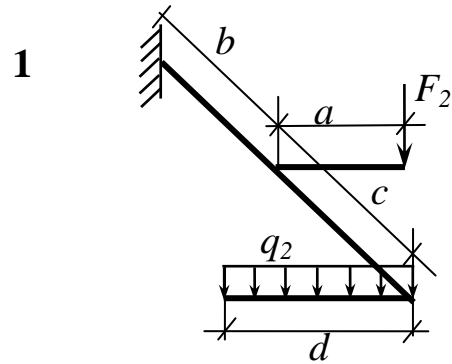
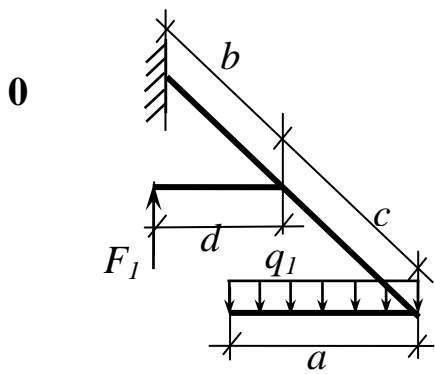


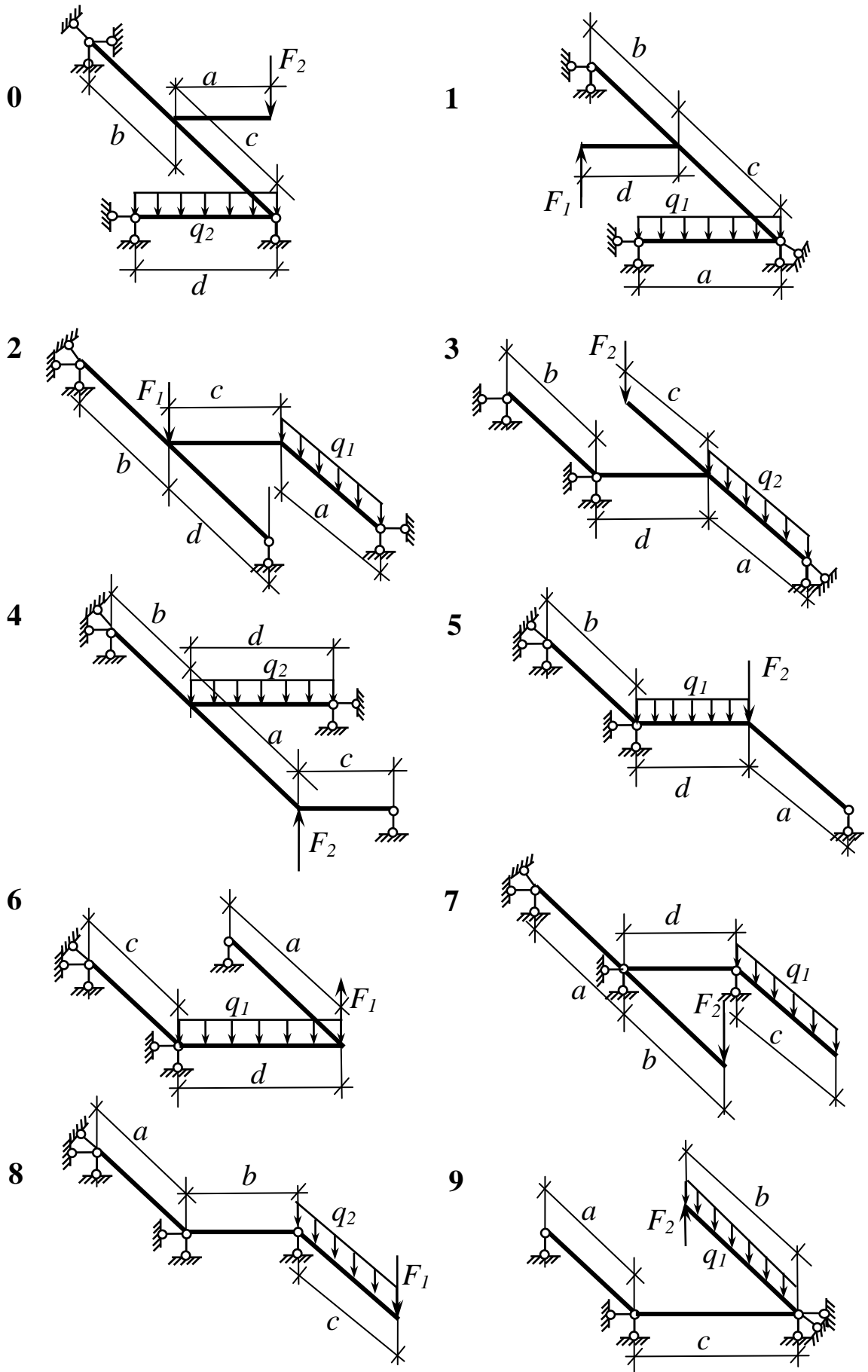


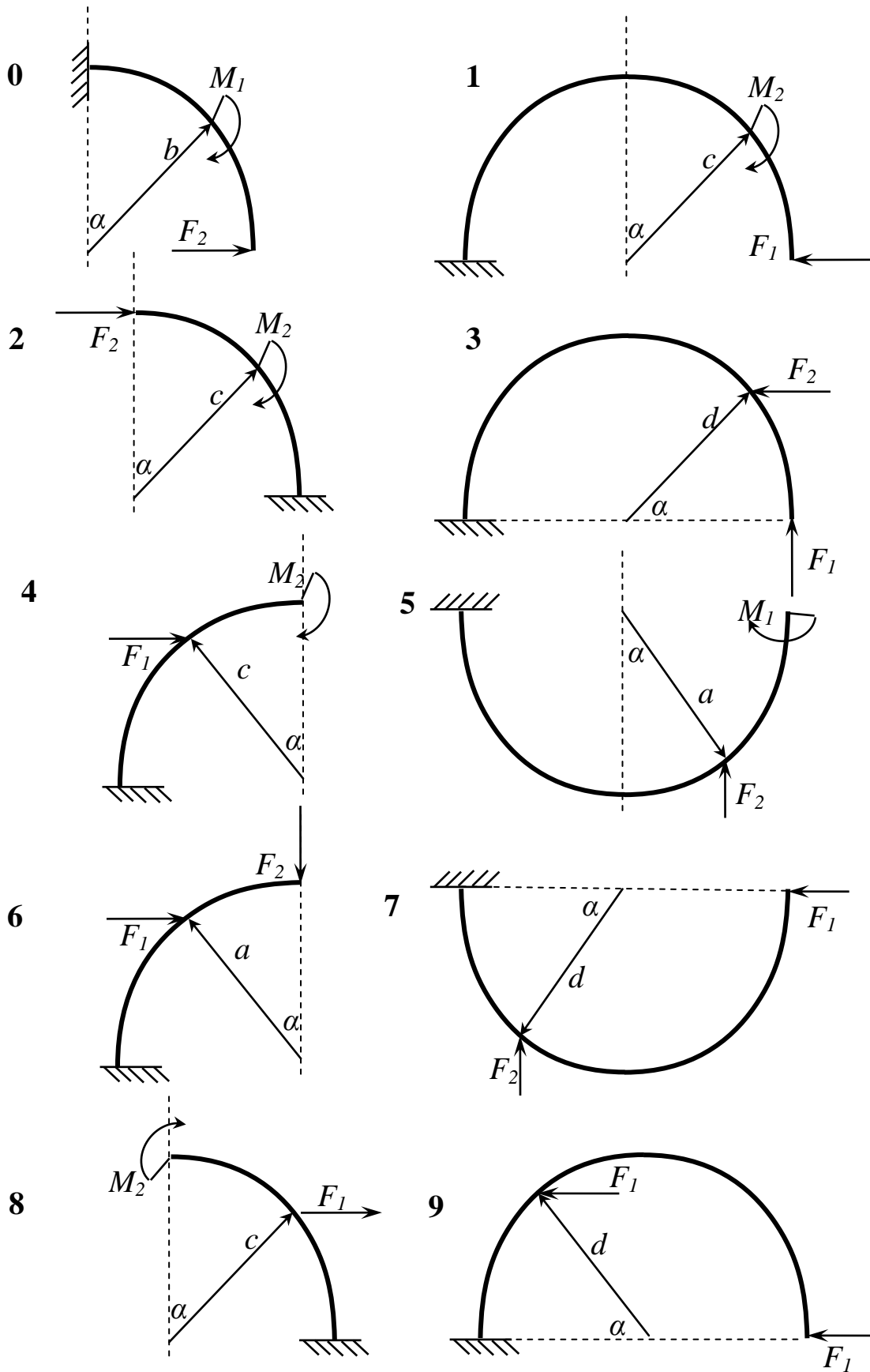




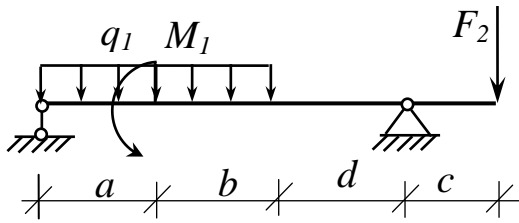




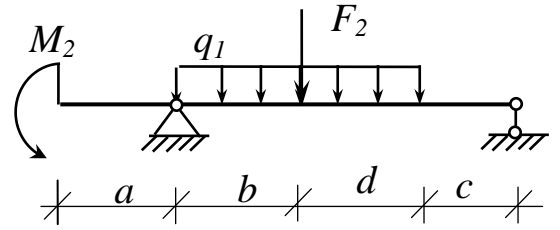




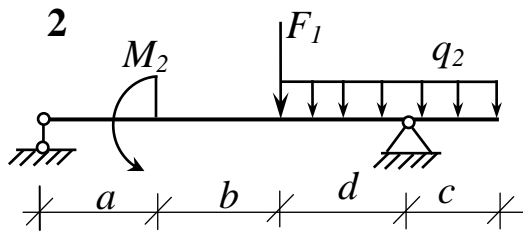
0



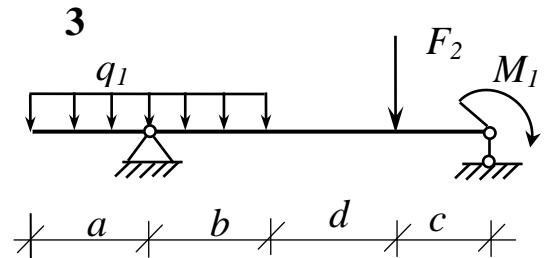
1



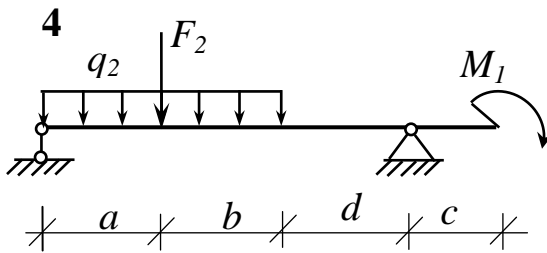
2



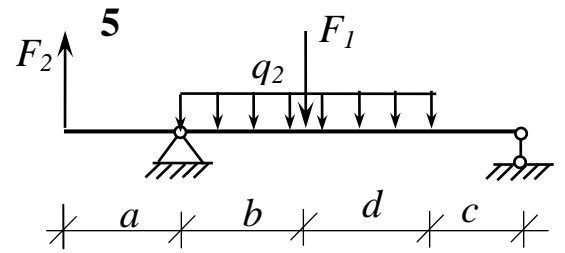
3



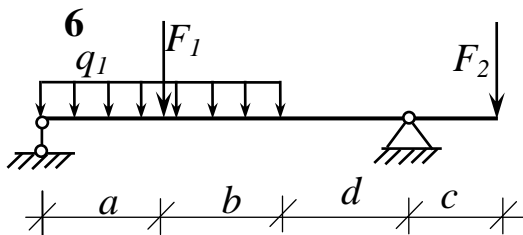
4



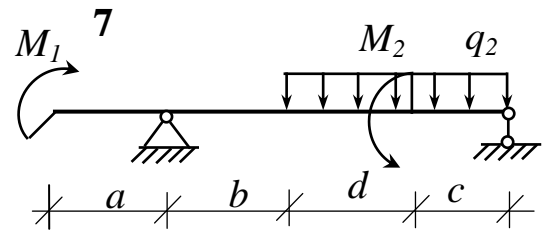
5



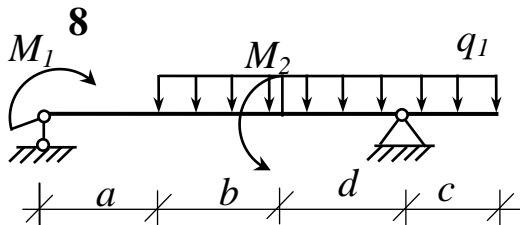
6



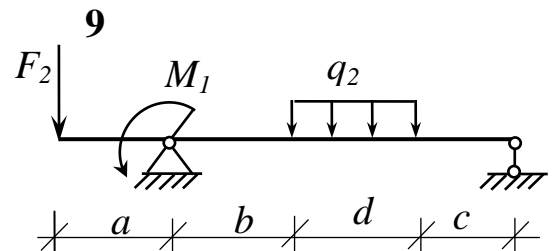
7



8



9



Навчально-методичне видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ

ОПР МАТЕРІАЛІВ

**Геометричні характеристики плоских перерізів
Розтягування (стискування) стержнів
Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах
Пряме плоске згинання балок**

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку
підготовки 6.060101 «Будівництво»

Укладач: Григор'єва Людмила Олександрівна

Комп'ютерне верстання Григор'євої Л. О.

Підписано до друку Формат 60×84 1/16
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.
Ум.-друк.арк. 2,32. Обл.-вид.арк. 2,5.
Тираж прим. Вид. № 139/III-09. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.